ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ ВОЛОГОДСКОЙ ОБЛАСТИ

БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВОЛОГОДСКОЙ ОБЛАСТИ

«ВОЛОГОДСКИЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»

Методические указания для студентов по выполнению практических работ

по дисциплине «Математика»

Профессии:

08.01.08 «Мастер отделочных строительных работ»
08.01.07 «Мастер общестроительных работ»
08.01.14 «Монтажник санитарно-технических, вентиляционных систем и оборудования»
15.01.15 «Сварщик (ручной и частично механизированной сварки (наплавки))»

Вологда

2017

Рассмотрено на заседании предметно-цикловой комиссии общеобразовательных дисциплин

Данные методические указания предназначены для студентов всех профессий БПОУ ВО «Вологодский строительный колледж» при выполнении практических работ.

Объем практических работ по дисциплине «Математика» составляет 90 часов

Перечень практических работ соответствует содержанию программы дисциплины. Практические занятия студентов повышают интеллектуальный уровень студентов, формируют умение самостоятельно находить нужную информацию, систематизировать, обобщать, помогают закрепить полученный на аудиторных занятиях по математике теоретический материал, сформировать практические навыки, что необходимо для профессиональной подготовки будущего специалиста.

Методические рекомендации могут быть рекомендованы к использованию студентами и преподавателями БОУ СПО ВО «Вологодский строительный колледж».

Авторы: Мизгирева Татьяна Александровна, преподаватель математики БПОУ ВО «Вологодский строительный колледж»

Проворова Ирина Анатольевна, преподаватель математики БПОУ ВО «Вологодский строительный колледж»

Рецензент: Рецензент: Анкудинова Е.Г., преподаватель математики БПОУ ВО «Вологодский колледж технологии и дизайна»

Методические указания предназначены для студентов и служат пособием при выполнении практических работ, предусмотренных рабочим учебным планом по профессиям:
08.01.08 «Мастер отделочных строительных работ»
08.01.07 «Мастер общестроительных работ»

08.01.14 «Монтажник санитарно-технических, вентиляционных систем и оборудования»
15.01.15 «Сварщик (ручной и частично механизированной сварки (наплавки))»
и запланированных в рабочих программах.

Содержание и объем практических работ по дисциплине «Математика» соответствует требованиям ФГОС СПО, реализуемого в пределах ОПОП с учетом профиля получаемого профессионального образования.

Практические задания направлены на экспериментальное подтверждение теоретических положений и формирование учебных умений, они составляют важную часть подготовки по освоению дисциплины.

Результат выполнения практических заданий оценивается по пятибалльной системе. Критериями оценки служат отсутствие вычислительных ошибок, правильность выполнения, аккуратность оформления.

УВАЖАЕМЫЙ СТУДЕНТ!

Методические указания по дисциплине «Математика» для выполнения практических работ созданы Вам в помощь для работы на занятиях, подготовки к практическим работам, правильного составления отчетов.

Приступая к выполнению практической работы, Вы должны внимательно прочитать цель и задачи занятия, ознакомиться с требованиями к уровню Вашей подготовки в соответствии с федеральными государственными стандартами, краткими теоретическими и учебно-методическими материалами по теме практической работы, ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.

Все задания к практической работе Вы должны выполнять в соответствии с инструкцией, анализировать полученные в ходе занятия результаты .

Отчет о практической работе Вы должны выполнить по приведенному алгоритму, опираясь на образец.

Наличие положительной оценки по практическим работам необходимо для экзамена по дисциплине «Математика», поэтому в случае отсутствия на занятие по любой причине или получения неудовлетворительной оценки за практическую работу Вы должны найти время для ее выполнения или пересдачи.

Внимание! Если в процессе подготовки к практическим работам у Вас возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается, необходимо обратиться к преподавателю для получения разъяснений или указаний .

Желаем Вам успехов!!!

Методические рекомендации по выполнению практических заданий

Подготовка к практическим работам заключатся в самостоятельном изучении теории по рекомендуемой литературе, предусмотренной рабочей программой.

Для эффективного выполнения заданий ВЫ должны знать теоретические материалы и уметь применять эти знания для приобретения практических навыков при выполнении практических заданий.

В конце занятия преподаватель выставляет оценку, которая складывается из результатов наблюдения за выполнением практической части работы, проверки отчета, беседы в ходе работы или после нее.

Оценки за выполнение практических занятий выставляется по пятибалльной системе.

Условия и порядок выполнения работы:

1. Прочитать методические рекомендации по выполнению практической работы.
2. Ответить на вопросы, необходимые для выполнения заданий.
3. Изучить содержание заданий и начать выполнение.
4. Работу выполнить в тетрадях, оформив надлежащим образом.
5. Консультацию по выполнению работы получить у преподавателя или обучающегося, успешно выполнившего работу.
6. Работа оценивается в целом, по итогам выполнения работы выставляется оценка

Защита проводится путем индивидуальной беседы или выполнения зачетного задания. Работа считается выполненной, если она соответствует критериям, указанным в пояснительной записке к практической работе.

Пропущенные практические работы отрабатываются в дополнительное время.

Перечень практических работ по дисциплине «Математика»

Темы практических работ	**Кол-во часов**
Практическое занятие №1. Целые и рациональные числа. Действия с числами.	1
Практическое занятие №2.Рациональные дроби. Иррациональные числа. Множество действительных чисел. Действия с рациональными дробями и иррациональными числами.	1
Практическое занятие №3. Приближённые вычисления. Округление чисел. Абсолютная и относительная погрешность приближённого значения числа. Действия с приближёнными величинами.	1
Практическое занятие №4. Радианная мера угла. Основные тригонометрические функции. Основные тригонометрические тождества	1
Практическое занятие №5. Решение примеров по теме «Формулы приведения»	1
Практическое занятие №6. Формулы суммы и разности тригонометрических функций.	1
Практическое занятие №7.Формулы двойного и половинного аргумента.	1
Практические занятия №8. Решение примеров на преобразование тригонометрических выражений	1
Практические занятия №9. Тригонометрические функции и их графики.	1
Практические занятия №10. Преобразование графиков тригонометрических функций.	1
Практические занятия №11. Чётные и нечётные функции. Периодичность тригонометрических функций.	1
Практические занятия №12. Решение задач по теме «Возрастание и убывание функций. Экстремумы функций».	1
Практические занятия №13. Исследование тригонометрических функций.	1
Практические занятия №14. Простейшие тригонометрические уравнения.	1
Практические занятия №15. Решение простейших тригонометрических уравнений.	1

Практические занятия №16. Тригонометрические уравнения, приводимые к квадратным уравнениям.	1
Практические занятия №17. Однородные тригонометрические уравнения.	1
Практическое занятие №18. Решение систем тригонометрических уравнений.	1
Практические занятия №19. Аксиомы стереометрии. Взаимное расположение прямых в пространстве.	1
Практическое занятие №20. Параллельные прямые в пространстве.	1
Практическое занятие №21. Признак параллельности прямых.	1
Практическое занятие №22. Признак параллельности прямой и плоскости.	1
Практическое занятие № 23. Признак параллельности плоскостей	1
Практическое занятие №24. Свойства параллельных плоскостей.	1
Практическое занятие №25. Признак перпендикулярности прямых. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Свойства перпендикулярных прямой и плоскости.	1
Практическое занятие №26.. Перпендикуляр и наклонная.	1
Практическое занятие № 27. Теорема о трёх перпендикулярах..	1
Практическое занятие № 28. Признак перпендикулярности плоскостей. Расстояние между скрещивающимися прямыми.	1
Практическое занятие №29.Изображение пространственных фигур на плоскости. Преобразование симметрии в пространстве. Движение в пространстве.	1
Практическое занятие №30. Углы между скрещивающимися прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями.	1
Практическое занятие №31. Корень n – ой степени и его свойства	1
Практическое занятие №32. Применение свойств корня n – ой степени	1
Практическое занятие №33- 34 Решение иррациональных уравнений	1
Практическое занятие №35-36. Решение систем иррациональных уравнений.	1
Практическое занятие №37-38 Преобразование рациональных и иррациональных выражений.	1

Практическое занятие № 39. Показательная функция.	1
Практическое занятие № 40. Показательные уравнения	1
Практическое занятие № 41. Решение показательных уравнений. Решение систем показательных уравнений.	1
Практическое занятие № 42. Решение систем показательных уравнений.	1
Практическое занятие № 43. Показательные неравенства.	1
Практическое занятие № 44. Решение показательных неравенств. .	1
Практическое занятие № 45. Логарифмы и их свойства	1
Практическое занятие № 46 Применение свойств логарифма	1
Практическое занятие № 47. Преобразование логарифмических выражений	1
Практическое занятие № 48. Логарифмические уравнения	1
Практическое занятие № 49. Решение логарифмических уравнений и систем.	1
Практическое занятие № 50. Решение логарифмических неравенств.	1
Практическое занятие № 51. Решение примеров по теме «Прямоугольная система координат в пространстве»	1
Практическое занятие № 52. Векторы в пространстве	1
Практическое занятие № 53. Действия над векторами в пространстве	1
Практическое занятие № 54. Решение задач по теме « Действия над векторами в пространстве»	1
Практическое занятие № 55. Основные понятия комбинаторики.	1
Практическое занятие № 56. Правила комбинаторики. Решение комбинаторных задач**.**	1
Практическое занятие № 57 – 58 Решение комбинаторных задач.	2
Практическое занятие № 59. Решение задач на перебор вариантов.	1
Практическое занятие № 60. Треугольник Паскаля **Итого: 60 час. на 1 курсе**	1
2 курс 30 час.	

Практическое занятие № 1. Многогранники. Призма.	1
Практическое занятие № 2. Площадь поверхности и объём призмы.	1
Практическое занятие № 3. Параллелепипед и его виды	1
Практическое занятие № 4. Площадь поверхности и объём параллелепипеда	1
Практическое занятие № 5. Пирамида. Площадь поверхности и объём пирамиды.	1
Практическое занятие № 6. Усечённая пирамида. Площадь поверхности и объём усечённой пирамиды.	1
Практическое занятие № 7. Сечение в кубе, призме, пирамиде.	1
Практическое занятие № 8. Цилиндр. Площадь поверхности и объём цилиндра.	1
Практическое занятие № 9. Конус. Площадь поверхности и объём конуса.	1
Практическое занятие № 10. Усечённый конус. Площадь поверхности и объём усечённого конуса.	1
Практическое занятие № 11. Шар и сфера. Сечение шара плоскостью. Площадь поверхности и объём шара и его частей.	1
Практическое занятие № 12. Понятие производной. Правила вычисления производных.	1
Практическое занятие № 13. Производная степенной, логарифмической функций.	1
Практическое занятие № 14. Производная тригонометрических функций.	1
Практическое занятие № 15. Производная сложной функции.	1
Практическое занятие № 16. Уравнение касательной.	1
Практическое занятие № 17. Признаки возрастания и убывания функции.	1
Практическое занятие № 18. Критические точки функции, максимумы и минимумы.	1
Практическое занятие № 19. Применение производной к исследованию функции.	1
Практическое занятие № 20. Решение примеров на исследование функции с помощью производной.	1
Практическое занятие № 21. Первообразная и её основное свойство. Таблица первообразных. Правила нахождения первообразных.	1

Практическое занятие № 22. Нахождение первообразных функций.	1
Практическое занятие № 23. Вычисление определённого интеграла	1
Практическое занятие № 24. Площадь криволинейной трапеции	1
Практическое занятие № 25. Нахождение площади криволинейной трапеции с помощью определённого интеграла.	1
Практическое занятие № 26. Общие методы решения уравнений. Метод разложения на множители. Метод введения новой переменной. Функционально – графический метод.	1
Практическое занятие № 27. Решение неравенств с одной переменной.	1
Практическое занятие № 28. Событие и его виды. Вероятность события.	1
Практическое занятие № 29. Сложение и умножение вероятностей.	1
Практическое занятие № 30. Решение задач по теме «Элементы комбинаторики и теории вероятностей. Математическая статистика»	1
Итого : 90 часов	
Список литературы	

1 курс

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

Тема: Целые и рациональные числа. Действия с числами.

Цель:

1. Систематизировать знания, умения, навыки по теме.

2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- правила действий над обыкновенными дробями;
- правило сокращения дробей;
- формулы сокращенного умножения;
- способы разложения выражения на множители;

2. Выполнить задания практической работы.

3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Задания практической работы.

1. Найдите значение выражения:

а) $\left(6{,}72:\frac{3}{5}+1\frac{1}{8}\cdot 0{,}8\right):1{,}21-8\frac{3}{8}$;

б) $3{,}075:1{,}5-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{25}+3{,}26\right)-1{,}025$;

в) $\left(1{,}6-2\frac{1}{6}-\left(-\frac{41}{90}\right)\right)\cdot\left(-1\frac{3}{5}\right)+0{,}25:(-1{,}25)$;

г) $5\frac{1}{2}\cdot\left(4\frac{3}{20}-6{,}45:3\right)+1\frac{11}{17}\cdot\left(7\frac{5}{6}-3\frac{7}{12}\right)$;

д) $\left(8\frac{7}{15}-3\frac{3}{4}+4\frac{2}{5}-8\frac{7}{60}\right):\left(4\frac{1}{4}-2\frac{3}{4}\right)$;

е) $\dfrac{12\frac{4}{5}\cdot 3\frac{3}{4}-4\frac{4}{11}\cdot 4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3}\cdot 2\frac{4}{7}}+13\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{3}$.

2. Выполните действия:

а) $\dfrac{ab^2-ac^2}{b^2+2dc+c^2}:\dfrac{ab^2-2abc+ac^2}{5b+5c}$; б) $\dfrac{a^2+b^2}{6-6a}:\dfrac{a^4-b^4}{a^2-2a+1}$.

3. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^2-9}{x^2-25}:\dfrac{a^2-3a}{xy+5y}+\dfrac{3-y}{x-5}$; б) $\dfrac{3y-5z}{2x+3y}-\dfrac{6xy-9y^2}{4x^2-10xz}\cdot\dfrac{4x^2-25z^2}{4x^2-9y^2}$.

Практическое занятие №3.
Приближённые вычисления. Округление чисел. Абсолютная и относительная погрешность приближённого значения числа. Действия с приближёнными величинами.

Цель занятия: *Проверить умения выполнять действия с приближенными величинамии оценивать погрешности.*

Контрольные вопросы.

1. Определение абсолютной погрешности. Формула абсолютной погрешности.
2. Определение относительной погрешности. Формула относительной погрешности.
3. Действия с приближенными величинами. Оценка погрешностей приближений.

Примеры и последовательность выполнения заданий

Действия с приближенными величинами

<u>**Пример**</u>: Пусть***a=5,0±0,1*** , ***в=3,4±0,2*** . Вычислить ***a+в, a-в, ав, a/в.*** Оценить относительные погрешности результатов для ***ав***и ***a/в.***

Решение. Здесь ***x=5,0*** , ***y=3,4*** , $\Delta_a x=\Delta_a=0,1$, $\Delta_b y=\Delta_b=0,2$. Тогда $\Delta_{a+b}=\Delta_{a-b}=\Delta_a+\Delta_b=0,1+0,2=0,3$,откуда***a+в=8,4±0,3*** и ***a-в=1,6±0,3.***

Найдем относительные погрешности:

$$\omega_{a+b}=\frac{\Delta_{a+b}}{|x+y|}=\frac{0,3}{8,4}\approx 0,036=3,6\%$$

$$\omega_{a-b}=\frac{\Delta_{a-b}}{|x-y|}=\frac{0,3}{1,6}\approx 0,186=18,6\%$$

$\Delta_{ab}=y\Delta_a+x\Delta_b=3,4\times 0,1+5,0\times 0,2\approx 1,34$

$$\Delta a/_b=\frac{|y|\Delta_a+|x|\Delta_в}{y^2}=\frac{3,4\times0,1+5,0\times0,2}{3,4^2}\approx 0,116$$

Следовательно, ***ав=17,0±1,34*** , ***a/в=1,47***±0,116.

Оценим относительные погрешности полученных результатов для ***ав*** и ***a/в*** :

$$\omega_{ab}=\omega_a+\omega_b=\frac{\Delta_a}{|x|}+\frac{\Delta_в}{|y|}=\frac{0,1}{5,0}+\frac{0,2}{3,4}=0,06=6\%$$

$$\omega a/_b=\omega_{ab}=6\%$$

Выполнить следующие задания.

1 вариант

Задание 1.Найдите относительную погрешность и выразите ее в процентах. В приближенном значении ***x*** определите верные и сомнительные цифры:

$a = 102{,}345$, $x = 102{,}247$

Задание 2.

Пусть***а=7,0±0,2*** , ***в=5,4±0,3*** . Вычислить ***а+в, а-в, ав, а/в.***

Оценить относительные погрешности результатов для ***ав***и ***а/в.***

2 вариант

Задание 1.Найдите относительную погрешность и выразите ее в процентах. В приближенном значении ***x*** определите верные и сомнительные цифры:

$a = 107{,}532$, $x = 107{,}327$

Задание 2.

Пусть***а=9,0±0,3*** , ***в=6,4±0,2.***Вычислить***а+в, а-в, ав, а/в.***

Оценить относительные погрешности результатов для ***ав***и ***а/в.***

Практическое занятие №4.

Радианная мера угла. Основные тригонометрические функции. Основные тригонометрические тождества

Цель занятия:

– *научиться переводить градусную меру угла в радианную и, обратно, радианную меру угла в градусную;*

– *научиться определять знаки синуса, косинуса и тангенса в координатных четвертях;*

– *научиться применять формулы зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же угла;*

– *изучить тему: «Синус, косинус и тангенс углов ».*

Оснащение занятия: учебник, конспекты, справочник.

Порядок выполнения работы

Задание 1. Вопросы для повторения.

1. Что называется радианом?

2. Назовите формулу перевода градусной меры угла в радианную и, обратно, радианную меру угла в градусную.
3. Дайте определение синуса, косинуса и тангенса угла.
4. Какие знаки имеют синус, косинус и тангенс в координатных четвертях?
5. Какими соотношениями связаны тригонометрические функции одного и того же аргумента?

Задание 2. Выполните № 407 (неч.), № 408 (неч.), № 420 (неч.), № 423.

Задание 3. Разберите решение задачи 1 и 2 (стр.131) и выполните № 442 (неч.), № 447.

Задание 4. Используя формулы зависимости между тригонометрическими функциями одного и того же угла выполнить № 459(1;2;3;4).

Задание 5. Запишите в конспект формулы и примеры темы:
«Синус, косинус и тангенс углов» стр. 140 и выполните № 475 (неч.).

Контроль знаний студентов: тестовые задания по 2-м вариантам (задания выдает преподаватель).

Литература: Колмогоров. Алгебра и начала анализа с. 115, с.124, с.140, с.133.

Практическое занятие №5.
Решение примеров по теме «Формулы приведения»

Цель занятия: *научится использовать формулы приведения при выполнении преобразований тригонометрических выражений.*

Порядок выполнения работы

Задание 1. Разберите задачу №1, стр.154 (§ 31) и запишите формулы (3)-(6). Как называют формулы (5)-(6)?

Задание 2. Разберите решение задач №2 и №3, стр.155.

Задание 3. Запишите формулы (7)-(9). Как их называют?

Задание 4. Запишите правила, которые можно применить, чтобы записать любую формулу приведения (стр. 157).

Задание 5. а) Выполните №525(1-4), №526(неч.), используя задачи №№2-4 как образец.

б) Выполните №527(1), №528(1).

Контроль знаний студентов:
- проверить практическую работу студентов;
- устный опрос.

1. Как называются формулы, которые вы сегодня применяли при выполнении упражнений?
2. Сформулируйте правила записи формул приведения.

Литература: КолмогоровН. А. Алгебра и начала анализа стр. 154, стр.159.

Практическое занятие №6.
Формулы суммы и разности тригонометрических функций.

Цель занятия: *научится применять формулы преобразования суммы (разности) синусов (косинусов) в произведение.*

Оснащение занятия: учебник, конспект, таблица.

Порядок выполнения работы

Задание 1. а) Разберите задачу №1, стр.159(параграф 32) и запишите формулы суммы и разности синусов (косинусов).

б) Разобрать задачи №2 и №3, стр.160.

Задание 2. Выполните №538-№539(неч.), №537(неч), №530–№531(неч.), №541(1).

Контроль знаний студентов:

– проверить практическую работу студентов;

– устный опрос.

3. Как называются формулы, которые вы сегодня применяли при выполнении упражнений?
4. Сформулируйте правила записи формул приведения.
5. Как формулы суммы (разности) синусов (косинусов) преобразовать в произведение?

Литература: КолмогоровН. А. Алгебра и начала анализа стр. 154, стр.159.

Практическое занятие №7.
Формулы двойного и половинного аргумента.

Цель занятия:

– *научиться применять формулы сложения для преобразований выражений.*

– *научиться применять формулы синуса, косинуса и тангенса двойного угла для преобразований выражений.*

Оснащение занятия: учебник, таблица значений синуса, косинуса, тангенса.

Порядок выполнения работы:

Задание 1. Познакомьтесь с содержанием п.28, стр.142 и запишите формулы сложения. Какие формулы называют формулами сложения?

Задание 2. а) Разберите задачи №1 и №2, стр.143 и запишите их в тетрадь.

б) Выполните (в парах) №481(2;4), №482(2;4), №483(2), №484(2;4).

Задание 3.а) Запишите в тетрадь задачи №4-№6, стр.144.

б) Выполните №485(четные)- №487(чет.)

Задание 4. а) Запишите формулу синуса двойного угла п.29, стр.147.

б) Разберите решение задачи №1.

в) Выполните №500(нечетные)-№503(неч).

Задание 5. а) Запишите формулу косинуса двойного угла.

б) Разберите решение задачи №2.
в) Выполните №500(четные)-№503(чет).
Задание 6. а) Запишите формулу тангенса двойного угла.
б) Разберите решение задачи №4.
в) Выполните №500(3)-№501(3), №505.
Задание 7. Организуйте работу парами и расскажите друг другу, какие формулы вы сегодня применяли для преобразований тригонометрических выражений.
Контроль знаний студентов: проверить практическую работу студентов.
Литература: Колмогоров. Алгебра и начала анализа стр.142, 147.

Практические занятия №8.
Решение примеров на преобразование тригонометрических выражений

Цель занятия: *Обобщить и систематизировать знания по теме «Основы тригонометрии»; закрепить умения использовать полученные знания для преобразования тригонометрических выражений.*

Контрольные вопросы.

1. Дайте определение тригонометрическим функциям через единичную окружность?
2. Какой координате точки соответствует значение синуса угла?
3. Какой координате точки соответствует значение косинуса угла?
4. Перечислите основные тригонометрические тождества.
5. Как определяются знаки тригонометрических функций по четвертям?
6. Какие тригонометрические функции являются четными и какие - нечетными? Почему?
7. Выразите тригонометрические функции через синус, косинус, тангенс и котангенс соответственно.
8. При каких вычислениях необходимо знание формул приведения?
9. Сформулируйте правило записи формул приведения.
10. Как выполняется понижение степени тригонометрических функций?
11. При каких вычислениях необходимо знание формул сложения?
12. При каких вычислениях необходимо знание формул двойного и половинного аргумента?

Примеры и последовательность выполнения заданий.

Пример1

Вычислить:
а)sin735^0 .

1). Применяя ***формулу приведения***

$\boxed{\sin(2\pi n+\alpha) = \sin\alpha, \quad 0 < \alpha < \pi/2}$.получаем:

$\sin 735^0 = \sin(360 \cdot 2 + 15^0) = \sin 15^0$.

2). Применяя формулу ***синуса разности***

$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta}$ имеем :

$\sin 15^0 = \sin(45^0 - 30^0) = \sin 45^0 \cdot \cos 30^0 - \cos 45^0 \cdot \sin 30^0 =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$$

б) $\cos\frac{3\pi}{4} = \cos(\frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

в) $\cos\frac{15\pi}{4} = \cos(4\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

г)$\mathrm{tg}\frac{11\pi}{3} = \mathrm{tg}(4\pi - \frac{\pi}{3}) = \mathrm{tg}(-\frac{\pi}{3}) = -\mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

д)$\mathrm{tg}\frac{13\pi}{3} = \mathrm{tg}(3\pi + \frac{\pi}{4}) = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$

<u>Пример 2</u>

а)Вычислить ***tgα, если cosα*** $= -\frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение:

Из формулы $\boxed{1+\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}$ получаем:

$\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ -1 = $\frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} - 1 = \frac{16}{9}$.

Т.к. тангенс во второй четверти отрицателен, то имеем: -

$$\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha} = -\sqrt{\frac{16}{9}} = -\frac{4}{3} .$$

Ответ: $-\frac{4}{3}$.

б) **Дано:** $\sin\alpha = -\frac{3}{5}; \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

Найти: 1) $\cos\alpha$**; 2)** $\cos(\frac{\pi}{3} - \alpha)$

Решение

1) Из основного тригонометрического тождества получим:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm\sqrt{\frac{25}{25} - \frac{9}{25}} = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$

Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ следовательно $\alpha \in$ III четверти. Косинус в третьей четверти имеет отрицательный знак. Значит $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

2) $\cos(\frac{\pi}{3} - \alpha) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha = \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{10} - \frac{3\sqrt{3}}{10} = -\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$.

<u>Пример 3</u>

Вычислить$\cos 165^0 - \cos 75^0$

Решение:

По формуле $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ находим

$\cos 165^0 - \cos 75^0 = -2\sin\frac{165^0+75^0}{2} \cdot \sin\frac{165^0-75^0}{2} = -2\sin 120^0 \sin 45^0$,

где $\sin 120^0 = \sin(180^0 - 60^0) = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.Поэтому

$cos165^0$-$cos75^0$=-2$\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$=-$\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Пример 4

а) Доказать тождество $\boldsymbol{1 - cos^2\alpha = \frac{1}{1+ctg^2\alpha}}$

Решение: Докажем тождество разными способами.

1 способ. Преобразуем левую и правую части так, чтобы получилось одно и то же выражение: $1 - cos^2\alpha = sin^2\alpha$ (*на основании тождества* $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$).

$$\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}} = \sin^2\alpha.$$

II способ. Покажем, что разность между левой и правой частями равна

$\boldsymbol{0}$ (применив формулу $1+\mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

и основное тригонометрическое тождество $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$):

$$1-\cos^2\alpha - \frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\alpha} = 1-\cos^2\alpha - \frac{1}{\frac{1}{\sin^2\alpha}} =$$

$$= 1-\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = 0.$$

Данное тождество верно при всех значениях $\alpha \neq \pi k, k \in Z$,, т. е. при условии, что
$sin\ a \neq 0$.

б) Доказать тождество $\boldsymbol{\frac{sin\,\alpha}{1+cos\,\alpha} = \frac{1-cos\,\alpha}{sin\,\alpha}}$.

Решение.

Iспособ. Преобразуем левую часть так, чтобы получилось выражение, стоящее в правой части. Умножим числитель и знаменатель дроби на $\sin\alpha$ ($\sin\alpha \neq 0$, $1+\cos\alpha \neq 0, \alpha \neq \pi k, k \in Z$ −допустимые значения).

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha\cdot\sin\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha} =$$

$$= \frac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

II способ. Найдём разность левой и правой частей:

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}-\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-1}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=$$
$$=\frac{0}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=0.$$

Выполните следующие задания

1 вариант

1.Вычислить

а) $cos\ 765^0$

б) $sin\ \frac{19\pi}{6}$

в)$sin\ \alpha$, если $cos\ \alpha=\frac{3}{5}, \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

г)$cos\alpha$и $tg\ \alpha$, если$sin\ \alpha$=-$\frac{\sqrt{13}}{4}$,$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

2.Упростить выражение:

а) cos$(\alpha-\beta)$-cos$(\alpha+\beta)$

б) $\frac{cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+cos(\pi+\alpha)}{2\,sin(\alpha-\frac{\pi}{2})\,cos(-\alpha)+1}$

3.Доказать тождество:

$$\frac{sin(\alpha+\beta)+sin(\alpha-\beta)}{cos(\alpha+\beta)+cos(\alpha-\beta)}=tg\alpha$$

2 вариант

а)$sin765^0$

б)cos$\frac{19\pi}{6}$

в) $cos\ \alpha$, если $sin\alpha=-\frac{3}{5}, \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

г)$sin\alpha$и $tg\ \alpha$, если$cos\ \alpha$= -$\frac{\sqrt{5}}{4}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

2.Упростить выражение:

а) $sin(\alpha+\beta)+sin(\alpha-\beta)$

б) $\frac{cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+cos(\pi-\alpha)}{1+2\,sin(-\alpha)\,cos(-\alpha)}$

3.Доказать тождество:

$$\frac{sin(\alpha+\beta)-sin(\alpha-\beta)}{cos(\alpha+\beta)-cos(\alpha-\beta)}=-ctg$$

1.Вычислить

Практические занятия №9.
Тригонометрические функции и их графики.

Цель занятия:

– *научиться находить область определения и множество значений тригонометрических функций;*

– *научиться определять, является ли данная функция четной или нечетной;*

– *научиться строить график и с помощью графика описывать поведение функции при изменении аргумента;*

– *изучить свойства обратных тригонометрических функций.*

Оснащение занятия: учебник, конспект, таблицы.

Порядок выполнения работы.

1. Вопросы для повторения.
   – Какие функции называются тригонометрическими? Какова их область определения и множество значений?
   – Какие тригонометрические функции являются четными, а какие нечетные?
   – Что называется периодом функции? Какие периоды имеют тригонометрические функции?
2. Разберите решение задачи 1-3 стр.198 и выполните № 691(неч), № 692(неч).
3. Разберите решение задачи 1 стр.201 и выполните № 701(неч), №704(неч).
4. По рисунку 88, стр.205; по рисунку 91, стр.209; по рисунку 95, стр.214 назовите промежутки возрастания и убывания функций. Выполните №709 и №710, №721 и №722.
5. Как построить графики тригонометрических функций?
   На странице 224 выполните задание 2 и 3.
6. Запишите в конспект ответы на вопросы:
   – На каком промежутке изменений аргумента задается функция ?
   – Дайте определение функции .
   – Укажите область значений функции .
   – Постройте график функции .
   – Охарактеризуйте таким же образом функции .

Контроль знаний студентов:

– проверить практическую работу;

– индивидуальные вопросы по практической работе.

Литература: Колмогоров. Алгебра и начала анализа стр.204-218.

Практическое занятие № 10

Тема « Преобразование графиков тригонометрических функций»

Цель: используя преобразования графиков функции, постройть заданную функцию.

1 вариант	2 вариант	3 вариант
Постройте график функции $y = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$	Постройте график функции $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$	Постройте график функции $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$
4 вариант	5вариант	6 вариант
. Постройте график функции $y = -2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$	Постройте график функции $y = -2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$	Постройте график функции $y = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$
7 вариант	8вариант	9 вариант
. Постройте график функции $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$	Постройте график функции $y = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$	Постройте график функции $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$
1 вариант	2 вариант	3 вариант
Постройте график функции $y = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$	Постройте график функции $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$	Постройте график функции $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1$
4 вариант	5вариант	6 вариант

. Постройте график функции $y = -2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$	Постройте график функции $y = -2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) -1$	Постройте график функции $y = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) -1$
7 вариант	8вариант	9 вариант
. Постройте график функции $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$	Постройте график функции $y = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) +1$	Постройте график функции $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) -1$

Практические занятия №14.
Простейшие тригонометрические уравнения.

Цель занятия:

– *научиться вычислять арккосинус числа а ,научиться вычислять арксинус числа а;*

– *научиться находить значения арккосинусов, арксинусрв отрицательных чисел через значения арккосинусов положительных чисел;*

– *научиться решать простейшие уравнения*

Оснащение занятия: учебник, конспект, справочник.

Порядок выполнения работы:

Часть1.

Задание 1. Повторение теоретического материала.

1. Какова область значений косинуса?
2. При каком значении а, уравнение имеет корни?
3. По какой формуле находятся корни уравнения ?
4. Сколько корней имеет уравнение и почему?
5. Что называется арккосинусом числа **а**?

6. По какой формуле можно находить значения арккосинусов отрицательных чисел через значения арккосинусов положительных чисел?

   Задание 2. Выполните № 568 (неч.), № 569 (неч.), № 571-№ 573 (неч.).

   Задание 3. Запишите формулу сложения и выполните №574.

   Задание 4. Разберите решение задачи 4 (стр.167) и выполните № 576 (неч.).

Часть2

Задание 1. Повторение теоретического материала.

1. Какова область значений синуса?
2. При каком значении а, уравнение имеет корни?
3. По какой формуле находятся корни уравнения ?
4. Сколько корней имеет уравнение и почему?
5. Что называется арксинусом числа а?
6. По какой формуле можно находить значения арксинусов отрицательных чисел через значения арксинусов положительных чисел?

Задание 2. Выполните № 586 (неч.), № 587 (неч.), № 589-№ 591 (неч.).

Задание 3. Запишите формулу сложения и выполните № 592.

Задание 4. Разберите решение задачи 4 (стр.173), задайте вопрос по решению и выполните № 596.

Контроль знаний студентов: выполнить самостоятельную работу по 2-м вариантам (задания выдает преподаватель).

Часть 3.

Задание 1. Повторите определение арктангенса числа и формулу для нахождения
значения арктангенсов отрицательных чисел.

Выполните: В-1.№607(1;2). В-2. №607(3;4).

Задание 2. Какой формулой выражаются все корни уравнения ?

Решите уравнения, используя эту формулу:

В-1. №610(1;4), №611(3), №659(1;4). В-2. №610(3;6), №611(2), №659(2;3).

Задание 3. Разберите решение задачи №4 на странице 179 и выполните:

В-1. №612(1) В-2. №612(3)

Задание 4. Выполните в парах № 609, № 613, №615(1,3).

Контроль знаний студентов: проверить практическую работу студентов.

Практическая работа № 16,17

Тема: Тригонометрические уравнения, приводимые к квадратным. Однородные тригонометрические уравнения.

Цель занятия: *проверить, закрепить и проконтролировать знания по рассматриваемой теме; продолжить развитие умения решать тригонометрические уравнения с применением тригонометрических формул.*

Контрольные вопросы.

1. Основные тригонометрические формулы.
2. Простейшие тригонометрические уравнения. Частные случаи.
3. Понятие однородного уравнения,свойства однородных уравнений.
4. Формулы понижения степени.
5. Формулы двойного и половинного угла.
6. Формулы преобразования сумм в произведение и произведения в суммы.

Примеры и последовательность выполнения заданий.

Основные методы решения

Любое тригонометрическое уравнение в процессе решения с помощью надлежащих преобразований должно быть приведено к простейшим. Наиболее часто при решении тригонометрических уравнений применяются следующие методы:

- разложение на множители;
- способ замены (сведение к алгебраическим уравнениям);
- сведение к уравнениям, однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$;
- преобразование суммы тригонометрических функций в произведение;
- преобразование произведения тригонометрических функций в сумму;
- использование формул понижения степени;
- равенство одноименных тригонометрических функций;
- равенство одноименных тригонометрических функций
- введение вспомогательного аргумента.

При этом, как правило, в процессе решения тригонометрического уравнения приходится использовать не один, а несколько из указанных выше методов.

Способ замены

Данным методом решаются уравнения вида

$$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0,\ a\cos^2 x + b\cos x + c = 0\ (a \neq 0),$$

$$atg^2x+btgx+c=0,\ actg^2x+bctgx+c=0.$$

Они сводятся к простейшим тригонометрическим уравнениям с помощью замены $\sin x=t$ или $\cos x=t$.

Уравнения $a\sin^2 x+b\cos x+c=0,\ a\cos^2 x+b\sin x+c=0$

не являются с виду алгебраическими, но их можно свести к алгебраическим: $a\cos^2 x-b\cos x-(a+c)=0,\ a\sin^2 x-b\sin x-(a+c)=0$.

При решении уравнений этим методом необходимо знать основные тригонометрические формулы.

Пример 1. Решить уравнение $\cos^2 x+\cos x-2=0$.

Решение. Это уравнение является квадратным относительно $\cos x$. Поэтому сделаем замену $\cos x=t$. В результате получим уравнение $t^2+t-2=0$. Его корни: $t_1=1,\ t_2=-2$, то есть получаем уравнение $\cos x=1$ или $\cos x=-2$. Первое уравнение дает $x=2\pi k,\ k\in Z$. Второе уравнение не имеет корней.

Ответ: $x=2\pi k,\ k\in Z$.

Пример 2. Решить уравнение $6\cos^2 x+5\sin x-7=0$.

Решение. Так как $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, то уравнение можно представить в виде $6\left(1-\sin^2 x\right)+5\sin x-7=0$;

$6\sin^2 x-5\sin x+1=0$.

Сделаем замену $t=\sin x$. Получим квадратное уравнение $6t^2-5t+1=0$, решая которое, имеем: $D=25-6\cdot 4=1,\ t_{1,2}=\dfrac{5\pm 1}{12}$,то есть $t_1=\dfrac{1}{2},\ t_2=\dfrac{1}{3}$.

Таким образом, получим два простейших уравнения $\sin x=\dfrac{1}{2}$ или $\sin x=\dfrac{1}{3}$.

Решая их, имеем $x=(-1)^k\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$ или $x=(-1)^k\arcsin\dfrac{1}{3}+\pi k,\ k\in Z$.

Ответ: $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k;\ (-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z$

Однородные уравнения

Пример 1. Решить уравнение:

$$3\sin^2 x - 2\sin x \cos x - \cos^2 x = 0.$$

Решение. Это уравнение является однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Поэтому, разделив его на $\cos^2 x$ $(\cos x \neq 0)$, получим $3tg^2 x - 2tgx - 1 = 0$.

Введем новую переменную $tgx = t$ и решим квадратное уравнение $3t^2 - 2t - 1 = 0$.

Его корни $t_1 = 1,\ t_2 = -\frac{1}{3}$.

Получили два простейших тригонометрических уравнения $tgx = 1,\ tgx = -\frac{1}{3}$.

Решая их, найдем: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$ или $x = -arctg\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ -arctg\frac{1}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Пример 2. Решить уравнение:

$$6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2.$$

Решение. Это уравнение, сводящееся к однородному. Имеем

$$6\sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x),$$
$$4\sin^2 x + \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0,$$

то есть получили однородное уравнение. Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$ $(\cos x \neq 0)$, получим $4tg^2 x + tgx - 3 = 0$. Решая это уравнение, квадратное относительно tgx, найдем, что $tgx=-1$ либо $tgx=\frac{3}{4}$. Таким образом, $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$ или $x=arctg\frac{3}{4}+\pi k,\ k\in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ arctg\frac{3}{4}+\pi k,\ k\in Z$.

Разложение на множители

При решении уравнений этим методом нужно пользоваться известными способами разложения на множители алгебраических выражений. Необходимо знать основные тригонометрические формулы и дополнительно:

$$tg(x\pm y)=\frac{tgx\pm tgy}{1\mp tgxtgy};\qquad \sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x;$$
$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x.$$

Пример 1. Решить уравнение $\sin 2x-\cos x=0$.

Решение. Применяя формулу синуса двойного угла, получим

$\sin 2x=2\sin x\cos x$, $\cos x(2\sin x-1)=0$

Полученное уравнение равносильно совокупности уравнений: $\cos x=0,\ 2\sin x-1=0$.

Решение 1-го уравнения: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$.

Уравнение $2\sin x-1=0$ преобразуем к виду $\sin x=\frac{1}{2}$,

имеющему решение $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ (-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ \ k\in Z$.

Пример 2. Решить уравнение

$\sin x+\cos x=\sin x\cos x+1$.

Решение. Перенесем все члены уравнения в левую часть и разложим ее на множители:

$$\sin x + \cos x - \sin x \cos x - 1 = 0,$$
$$\sin x(1 - \cos x) - (1 - \cos x) = 0,$$
$$(\sin x - 1)(1 - \cos x) = 0.$$

Отсюда следует, что $\sin x - 1 = 0$ или $1 - \cos x = 0$, то есть имеем уравнение $\sin x = 1$ или $\cos x = 1$.

Решая их, получим $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$ или $x = 2\pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ 2\pi k,\ k \in Z$.

Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

При решение уравнений данным способом необходимо знать формулы *преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.*

Пример **.** Решить уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) - \sin 2x = 0$.

Решение. По формулам приведения $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \sin 3x$.

Получаем уравнение $\sin 3x - \sin 2x = 0$.

Преобразуем разность синусов в произведение:

$$\sin 3x - \sin 2x = 2\sin\frac{3x - 2x}{2}\cos\frac{3x + 2x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}.$$

В результате имеем уравнение $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2} = 0$, откуда $\sin\frac{x}{2} = 0$ или $\cos\frac{5x}{2} = 0$.

Решая эти уравнения, получим $x = 2\pi k,\ k \in Z$; $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}k,\ k \in Z$.

Ответ: $2\pi k,\ \frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}k,\ k\in Z$.

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

При решение уравнений данным способом необходимо знать формулы *преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.*

***Пример*.** Решить уравнение $\sin 2x\sin 6x=\cos x\cos 3x$.

Решение. Преобразуем по выше приведенным формулам левую и правую части уравнения. В результате получим:

$$\frac{1}{2}\left[\cos(2x-6x)-\cos(2x+6x)\right]=\frac{1}{2}\left[\cos(x-3x)+\cos(x+3x)\right],$$

иначе $\cos 4x-\cos 8x=\cos 2x+\cos 4x$, то есть $\cos 8x+\cos 2x=0$. Преобразовывая теперь в произведение сумму косинусов, будем иметь

$2\cos 5x\cos 3x=0$, откуда $\cos 5x=0,\ x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5},\ k\in Z$ или $\cos 3x=0,\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5},\ \frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},\ k\in Z$.

Использование формул понижения степени

При решении уравнений данным способом необходимо знать формулы *понижения степени*:

***Пример*.** Решить уравнение:

$$\cos^2 3x+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)=\cos^2 7x+\cos^2 9x+\cos\frac{3\pi}{2}.$$

Решение. Сразу заметим, что $\cos\frac{3\pi}{2}=0$, а $\sin\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)=\cos 5x$, и уравнение принимает вид $\cos^2 3x+\cos 5x=\cos^2 7x+\cos^2 9x$. Используя, формулы *понижения степени*, перепишем его в виде

$$\frac{1}{2}(1+\cos 6x)+\frac{1}{2}(1+\cos 10x)=\frac{1}{2}(1+\cos 14x)+\frac{1}{2}(1+\cos 18x),$$

то есть $\cos 6x+\cos 10x=\cos 14x+\cos 18x$. Преобразуем суммы косинусов в произведения, тогда получим

$$2\cos 8x\cos 2x=2\cos 16x\cos 2x,$$
$$\cos 2x(\cos 16x-\cos 8x)=0.$$

Наконец, преобразовывая разность косинусов в произведение, получим $-2\sin 4x\sin 12\cos 2x=0$. Задача свелась к решению совокупности трех уравнений: $\sin 4x=0$ или $\sin 12x=0$ или $\cos 2x=0$, из которой находим три семейства решений заданного уравнения: $x=\frac{\pi k}{4},\ x=\frac{\pi n}{12},\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi l}{2},\ k,n,l\in Z$.

Однако ответ можно записать в виде $x=\frac{\pi n}{12},\ n\in Z$, поскольку он содержит в себе два других семейства (чтобы убедиться в этом, достаточно положить $n=3k$ или $n=6l+3$).

Ответ: $\frac{\pi n}{12},\ n\in Z$.

Равенство одноименных тригонометрических функций

Данным методом решаются уравнения вида $\sin\alpha=\sin\beta,\ \cos\alpha=\cos\beta,\ tg\alpha=tg\beta$.

1) $\sin\alpha=\sin\beta$

$$\left[\begin{array}{l}\alpha+\beta=(2n+1)\pi\\ \alpha-\beta=2n\pi,\ n\in Z\end{array}\right.$$

2) $\cos\alpha=\cos\beta$

$$\left[\begin{array}{l}\alpha+\beta=2n\pi\\ \alpha-\beta=2n\pi,\ n\in Z\end{array}\right.$$

3) $tg\alpha=tg\beta$

$$\begin{cases}\alpha\neq(2n+1)\frac{\pi}{2},\ \beta\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}\\ \alpha-\beta=n\pi,\ n\in Z\end{cases}$$

Пример **.** Решить уравнение $\sin 3x=\sin 5x$.

Решение. На основании условий равенства двух синусов имеем:

$$\left[\begin{array}{l}5x-3x=2k\pi\\ 3x+5x=(2k+1)\pi,\ k\in Z\end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\frac{(2k+1)\pi}{8},\ k\in Z\end{array}\right..$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{(2k+1)\pi}{8},\ k \in Z \end{array}\right.$

Введение вспомогательного аргумента

Метод основан на преобразовании выражения $a\sin x + b\cos x$, где a и b – постоянные, не обращающиеся в нуль одновременно.

Введем угол φ, положив

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Тогда:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right) = \sqrt{a^2+b^2}(\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi),$$

где φ находится из уравнения $tg\varphi = \dfrac{b}{a}$.

Пример **.** Решить уравнение $\dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 1$.

Решение. Так как $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = 1$, то $\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ уже являются соответственно косинусом и синусом определенного угла; ясно, что этот угол $\dfrac{\pi}{3}$. Таким образом, получаем

$$\sin x\cos\frac{\pi}{3} + \cos x\sin\frac{\pi}{3} = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

Решая это уравнение, имеем $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Уравнение, рассмотренное в последнем примере, имеет вид $a\sin x + b\cos x = c$.

Метод рационализации для уравнения вида

$$a\sin x + b\cos x = c$$

Известно, что если $\alpha \neq (2n+1)\pi,\ n \in Z$, то $\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ tg\alpha$ выражаются рационально через $tg\frac{\alpha}{2}$.При решение уравнений данным способом необходимо знать формулы*половинного угла.*

Вводим вспомогательное неизвестное так, чтобы после подстановки получилось рациональное уравнение относительно вспомогательного неизвестного.

Данное уравнение можно переписать в виде

$$a\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} + b\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} = c.$$

Положим $tg\frac{\alpha}{2} = t$, тогда получим

$$a\frac{2t}{1+t^2} + b\frac{1-t^2}{1+t^2} = c.$$

Решим данное уравнение и получим следующие ответы

1. если $a^2 + b^2 < c^2$, то у уравнения нет корней;

2. если $a^2 + b^2 \geq c^2,\ c \neq -b$, то $x = 2arctg\frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c} + 2n\pi,\ n \in Z$;

3. если $c \neq -b$, то $x = \begin{cases} (2n+1)\pi \\ -2arctg\frac{b}{a} + 2n\pi,\ n \in Z \end{cases}$.

***Пример*.** Решить уравнение $3\sin x + 4\cos x = 3$.

Решение. $a = 3,\ b = 4,\ c = 3,\ a^2 + b^2 > c^2$ - уравнение имеет решение.

$$3\frac{2t}{1+t^2}+4\frac{1-t^2}{1+t^2}=3 \;\;\Rightarrow\;\; 7t^2-6t-1=0,\; t_{1,2}=\frac{3\pm 4}{7}.$$

1) $t_1=1,\;\; \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+n\pi,\;\; x=\frac{\pi}{2}+2n\pi,\; n\in Z$;

2) $t_2=-\frac{1}{7},\;\; \frac{x}{2}=-arctg\frac{1}{7}+n\pi,\;\; x=-2arctg\frac{1}{7}+2n\pi,\; n\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi,\; x=-2arctg\frac{1}{7}+2n\pi,\; n\in Z$.

Выполните следующие задания:

Решите уравнения

Вариант 1 1. $2\sin^2 x - 5\sin x - 7 = 0$ 2. $12\sin^2 x + 20\cos x - 19 = 0$	3. $3\sin^2 x + 14\sin x \cos x + 8\cos^2 x = 0$ 4. $7\, tg\, x - 10 ctg\, x + 9 = 0$

5. $5\sin 2x - 14\cos^2 x + 2 = 0$
6. $9\cos 2x - 4\cos^2 x = 11\sin 2x + 9$

Вариант 2
1. $10\cos^2 x - 17\cos x + 6 = 0$
2. $2\cos^2 x + 5\sin x + 5 = 0$
3. $6\sin^2 x + 13\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$
4. $5 \operatorname{tg} x - 4\operatorname{ctg} x + 8 = 0$
5. $6\cos^2 x + 13\sin 2x = -10$
6. $2\sin^2 x + 6\sin 2x = 7(1 + \cos 2x)$

Вариант 3
1. $3\sin^2 x - 7\sin x + 4 = 0$
2. $6\sin^2 x - 11\cos x - 10 = 0$
3. $\sin^2 x + 5\sin x \cos x + 6\cos^2 x = 0$
4. $4 \operatorname{tg} x - 12\operatorname{ctg} x + 13 = 0$
5. $5 - 8\cos^2 x = \sin 2x$
6. $7\sin 2x + 9\cos 2x = -7$

Вариант 4
1. $10\cos^2 x + 17\cos x + 6 = 0$
2. $3\cos^2 x + 10\sin x - 10 = 0$
3. $2\sin^2 x + 9\sin x \cos x + 10\cos^2 x = 0$
4. $3 \operatorname{tg} x - 12\operatorname{ctg} x + 5 = 0$
5. $10\sin^2 x - 3\sin 2x = 8$
6. $11\sin 2x - 6\cos^2 x + 8\cos 2x = 8$

Вариант 5
1. $10\sin^2 x + 11\sin x - 8 = 0$
2. $4\sin^2 x - 11\cos x - 11 = 0$
3. $4\sin^2 x + 9\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$
4. $3 \operatorname{tg} x - 8\operatorname{ctg} x + 10 = 0$
5. $3\sin 2x + 8\sin^2 x = 7$
6. $10\sin^2 x + 11\sin 2x + 6\cos 2x = -6$

Вариант 6
1. $3\cos^2 x - 10\cos x + 7 = 0$
2. $6\cos^2 x + 7\sin x - 1 = 0$
3. $3\sin^2 x + 10\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$
4. $6 \operatorname{tg} x - 14\operatorname{ctg} x + 5 = 0$
5. $6\sin^2 x + 7\sin 2x + 4 = 0$
6. $7 = 7\sin 2x - 9\cos 2x$

Практическое занятие №22.
Признак параллельности прямой и плоскости.

Цель занятия:

– *научиться выполнять чертеж к задачам;*
– *научиться применять знания по данной теме при решении и доказательстве задач.*

Оснащение занятия: учебник, конспекты, схемы, карточки.

Порядок выполнения работы:

Задание 1. Повторите теоретический материал.

Вопросы для повторения I группы.

1. Что изучает стереометрия?
2. Каковы основные (простейшие) фигуры в пространстве?
3. Сформулируйте аксиомы стереометрии.
4. Докажите теорему о плоскости, проходящей через прямую и не лежащую на ней точку.

Вопросы для повторения II группы.

1. Каково может быть взаимное расположение двух прямых в пространстве?
2. Какие прямые в пространстве называются параллельными? скрещивающимися?
3. Сформулируйте лемму о пересечении плоскости параллельными прямыми.
4. Докажите теорему о параллельности трех прямых.

Вопросы для повторения III группы.

1. Каково может быть взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве?
2. В каком случае прямая и плоскость называются параллельными?
3. Докажите признак параллельности прямой и плоскости.

Задание 2. Выполните № 17, № 20, № 23, № 30.

Контроль знаний студентов:

1. Самостоятельная работа по 2- м вариантам (задание выдает преподаватель).
2. Проверить правильность выполнения задания 2.

Литература: Погорелов Геометрия стр.9-11.

Практическая работа №23.

Признак параллельности плоскостей.

Цель занятия:
– *научиться строить чертежи к задачам;*
– *научиться применять знания по данной теме при решении и доказательстве задач.*
Оснащение занятия: учебник, конспекты, схема, модели, карточки.

Порядок выполнения работы:
Задание 1. Повторить теоретический материал по данной теме.

<u>Вопросы для повторения I группе:</u>
1. Каково может быть взаимное расположение двух плоскостей в пространстве?
2. В каком случае две плоскости называются параллельными? Приведите пример.
3. Сформулируйте признак параллельности плоскостей.
4. Сформулируйте свойства параллельных плоскостей.

<u>Вопросы для повторения II группе:</u>
1. Что называется тетраэдром?
2. Перечислите основные элементы тетраэдра (показать на модели).
3. Какие ребра тетраэдра называются противоположными?
4. Назовите виды тетраэдра.

<u>Вопросы для повторения III группе:</u>
1. Что называется параллелепипедом?
2. Перечислите основные элементы параллелепипеда (показать на модели).
3. Что называется диагональю параллелепипеда?
4. Сформулируйте свойства параллелепипеда.

Задание 2. Выполните № 50, № 60, № 58, № 65, № 70, № 79.
Контроль знаний студентов:
– Самостоятельная работа по 2-м вариантам (задания выдает преподаватель)
– Проверить правильность выполнения задания 2.
Литература: Погорелов. Геометрия стр.9, стр.24.

Практическая работа № 26,27

Перпендикуляр и наклонная. Теорема о трех перпендикулярах.

Цели:
научиться строить рисунок к задаче;
научиться применять знания по данной теме при решении и доказательстве задач.
Оснащение занятия: учебник, конспекты, многогранники, карточки.
Порядок выполнения работы:

Задание 1. Повторите вопросы:

1. Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?
2. Сформулируйте определение и признак перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве.
3. Что называется расстоянием от точки до плоскости?
4. Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах (прямую и обратную).

Задание 2. Выполните № 116(а), № 117, № 149, № 155, № 151.

Контроль знаний студентов:

– самостоятельная работа по 2-м вариантам (задания выдает преподаватель)

– проверить правильность выполнения задания 2.

Литература: Атанасян Л. С. Геометрия стр.36, стр.40.

Практическая работа № 28

Признак перпендикулярности плоскостей.

Цель: *научиться применять знания по данной теме при решении и доказательстве задач.*

Оснащение занятия: учебник, конспекты, модели.

Порядок выполнения работы:

Задание 1. Вопросы для повторения.

1. Какая фигура называется двугранным углом? Приведите примеры.
2. Как измеряется двугранный угол?
3. Назвать виды двугранных углов.
4. Выполните № 167.
5. Решить задачу:
   В тетраэдре РАВС угол АВС равен 90^0, прямая РВ перпендикулярна плоскости АВС. Докажите, что угол РСВ – линейный угол двугранного угла с ребром АС.

Задание 2. Вопросы для повторения.

1. Какие две плоскости называются перпендикулярными? Приведите пример.
2. Сформулируйте признак перпендикулярности двух плоскостей.
3. Выполните № 178.
4. Решите задачу:
   Из точек А и В, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры АС и ВД на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка АВ, если СД=АС=6см, ВД=7см.

Задание 3. Вопросы для повторения.

1. Какой параллелепипед называется прямоугольным?

2. Сформулируйте свойства прямоугольного параллелепипеда.
3. Что называют измерениями прямоугольного параллелепипеда?
4. Сформулируйте свойство параллелепипеда, связанное с его измерениями.
5. Выполните № 187(в), № 188, № 189.

Контроль знаний студентов:
проверка практической работы студентов.
Вопросы студентам: стр.57, вопрос 7, 8, 9, 10.
Литература: Погорелов. Геометрия стр.49-53.

Практическое занятие №32.
Применение свойств корня n – ой степени

Цель занятия: *Обобщить и систематизировать знания по теме «Свойства корней и степеней»; закрепить умения использовать полученные знания для преобразования алгебраических выражений.*

Контрольные вопросы.

1. Определение корня натуральной степени из числа.
2. Основные свойства корня натуральной степени из числа.
3. Определение степени с рациональным показателем.
4. Основные свойства степени с рациональным показателем.
5. Понятие степени с действительным показателем.
6. Основные свойства степени с действительным показателем.
7. Как избавиться от иррациональности в знаменателе.

Примеры и последовательность выполнения заданий

<u>Пример 1.</u> **Вычислить**

а) $9^{\frac{3}{2}}+27^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}+(3^3)^{\frac{2}{3}}-(2^{-4})^{-\frac{3}{4}}=3^3+3^2-2^3=27+9-8=28$

б) $\sqrt[3]{12+4\sqrt{5}}*\sqrt[3]{12-4\sqrt{5}}=\sqrt[3]{(12+4\sqrt{5})*(12-4\sqrt{5})}=\sqrt[3]{144-80}=$
$\sqrt[3]{64}=4$

в) $(9+\sqrt{73})^{\frac{1}{3}}*(9-\sqrt{73})^{\frac{1}{3}}=\left((9+\sqrt{73})(9-\sqrt{73})\right)^{\frac{1}{3}}=\left((9^2-\sqrt{73})^2\right)^{\frac{1}{3}}=$
$8^{\frac{1}{3}}=2^{3*\frac{1}{3}}=2$

г)$\left(\left(\sqrt{3^3}+\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^3}\right):\left(\sqrt{3}+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=\left(\sqrt{3}+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)*\left[\left(\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{3}*\sqrt{\frac{1}{3}}+\right.\right.$

$\left.\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2\right]:\left(\sqrt{3}+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=3-1+\frac{1}{3}=2\frac{1}{3}$

д) $\frac{9-4\sqrt{5}}{9+4\sqrt{5}}+\frac{9+4\sqrt{5}}{9-4\sqrt{5}}=\frac{\left(9-4\sqrt{5}\right)^2+\left(9+4\sqrt{5}\right)^2}{\left(9+4\sqrt{5}\right)\left(9-4\sqrt{5}\right)}=\frac{81-72\sqrt{5}+80+81+72\sqrt{5}+80}{81-80}=322$

Пример 2. **Упростить выражение и найти его значение**

а) $\frac{9a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{9}{5}}+2a^{-\frac{1}{5}}}$ при $a=5$

Решение

$$\frac{9a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{9}{5}}+2a^{-\frac{1}{5}}}=\frac{9a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{4}{5}}\left(a+2a^{-1}\right)}=\frac{9a}{a^2+2}.\text{ При } a=5\ \ \frac{9a}{a^2+2}=\frac{9\cdot5}{5^2+2}=\frac{5}{3}.$$

б) $\frac{b^{\frac{5}{4}}c^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}c^{\frac{5}{4}}}{b^{\frac{5}{4}}c^{\frac{5}{4}}}$ при $b=2, c=5$

Решение

$$\frac{b^{\frac{5}{4}}c^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}c^{\frac{5}{4}}}{b^{\frac{5}{4}}c^{\frac{5}{4}}}=\frac{b^{\frac{5}{4}}c^{\frac{5}{4}}\left(c^{-1}+b^{-1}\right)}{b^{\frac{5}{4}}c^{\frac{5}{4}}}=\frac{1}{c}+\frac{1}{b}=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=\frac{7}{10}.$$

Пример 3. **Избавиться от иррациональности в знаменателе**

а)$\frac{a}{b\sqrt{c}}$ **Решение**$\frac{a}{b\sqrt{c}}=\frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}}=\frac{a\sqrt{c}}{bc}$

б)$\frac{8}{3\sqrt{2}}$ **Решение** $\frac{8}{3\sqrt{2}}=\frac{8\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{3\cdot2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}.$

в) $\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ **Решение** $\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{2\sqrt{a}\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\frac{2\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}.$

г) $\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$ **Решение:** $\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{(3-\sqrt{3})^2}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=\frac{9-6\sqrt{3}+3}{9-3}=\frac{12-6\sqrt{3}}{6}=2-\sqrt{3}.$

д) $\frac{6}{\sqrt[5]{27}}$ **Решение:** $\frac{6}{\sqrt[5]{27}}=\frac{6}{\sqrt[5]{3^3}}=\frac{6\cdot\sqrt[5]{3^2}}{\sqrt[5]{3^3}\cdot\sqrt[5]{3^2}}=\frac{6\sqrt[5]{9}}{3}=2\sqrt[5]{9};$

е) $\frac{a^5}{\sqrt[7]{a^4}}$ **Решение :** $\frac{a^5}{\sqrt[7]{a^4}}=\frac{a^5\cdot\sqrt[7]{a^3}}{\sqrt[7]{a^4}\cdot\sqrt[7]{a^3}}=\frac{a^5\cdot\sqrt[7]{a^3}}{a}=a^4\cdot\sqrt[7]{a^3}.$

Практическая часть:
Выполните следующие задания

<u>1 вариант</u>

<u>Задание 1.</u>**Вычислить**

а) $16^{\frac{5}{4}}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}+27^{\frac{2}{3}}.$

б) $\sqrt[3]{12+4\sqrt{5}}\times\sqrt[3]{12-4\sqrt{5}};$

в) $(6+\sqrt{27})^{\frac{1}{2}}\times(6-\sqrt{27})^{\frac{1}{2}};$

г) $(\sqrt{5^3}+\frac{1}{\sqrt{5^3}})\div(\sqrt{5}+\sqrt{\frac{1}{5}});$

д) $\frac{7-4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}+\frac{7+4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}.$

<u>Задание 2.</u>**Упростить выражение и найти его значение**

а) $\frac{a^{\frac{7}{3}}+a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}}$ при $a=2$

б) $\frac{a^{\frac{5}{3}}c^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}c^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}c^{\frac{5}{3}}}$ при $a=7,\ c=3$

<u>Задание 3.</u>**Избавиться от иррациональности в знаменателе**

а) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$; б) $\frac{3\sqrt{c}}{\sqrt{c}+\sqrt{b}}$; в) $\frac{5-\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}$;

г) $\frac{6}{\sqrt[7]{64}}$ д) $\frac{a^6}{\sqrt[9]{a}}$

<u>2 вариант</u>

<u>Задание 1.</u>**Вычислить**

а) $8^{\frac{2}{3}}+36^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{3}{4}}.$

б) $\sqrt[5]{10+2\sqrt{17}}\times\sqrt[5]{10-2\sqrt{17}};$

в) $(12-\sqrt{19})^{\frac{1}{3}}\times(12+\sqrt{19})^{\frac{1}{3}};$

г) $(\sqrt{7^3}-\frac{1}{\sqrt{7^3}})\div(\sqrt{7}-\sqrt{\frac{1}{7}});$

д) $\frac{8-4\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}+\frac{8+4\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}$.

Задание 2. **Упростить выражение и найти его значение**

а) $\dfrac{b^{\frac{5}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}}$ при *b=3*

б) $\dfrac{a^{\frac{7}{5}}c^{\frac{2}{5}}+a^{\frac{2}{5}}c^{\frac{7}{5}}}{a^{\frac{7}{5}}c^{\frac{7}{5}}}$ при *a=9, c=2*

Задание 3. **Избавиться от иррациональности в знаменателе**

а) $\frac{7}{5\sqrt{3}}$; б) $\frac{5\sqrt{c}}{\sqrt{c}-\sqrt{b}}$; в) $\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$;

г) $\frac{12}{\sqrt[7]{81}}$ д) $\frac{a^7}{\sqrt[6]{a}}$

Практическое занятие №33- 34

Решение иррациональных уравнений

Цель занятия: *Обобщить и систематизировать знания по теме «иррациональные уравнения».*

1. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Иррациональным называется уравнение, в котором неизвестное (переменная) содержится под знаком корня или под знаком операции возведения в рациональную (дробную) степень.

Для решения иррациональных уравнений обычно используются следующие приемы:

1) «уединение» корня в одной из частей уравнения и возведение в соответствующую степень;

2) введение новой переменной;

3) сведение к системе уравнений;

4) применение свойств функций, входящих в уравнение.

Следует помнить, что при решении иррациональных уравнений необходима проверка всех найденных корней путем их подстановки в исходное уравнение или нахождение ОДЗ и следующий анализ корней (при решении методом приведения к равносильной смешанной системе уравнений и неравенств необходимость в этом отпадает).

Простейшим иррациональным уравнением является уравнение вида:

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x), \qquad (*)$$

при решении, которого важную роль играет четность или нечетность $\boldsymbol{n}$.

Если $\boldsymbol{n}$ - нечетное, то уравнение (*) равносильно уравнению

$$\boldsymbol{f(x) = (g(x))^n}.$$

Если $\boldsymbol{n}$ - четное, то, так как корень считается арифметическим, необходимо учитывать ОДЗ (область допустимых значений): $\boldsymbol{f(x) \geq 0}$. Уравнение (*) в этом случае равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) = \left(g(x)\right)^n; \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x^3 - 2x + 1} = 1$$

Решение. Так как в данном примере $\boldsymbol{n=3}$ - нечетное, то после возведения обеих частей уравнения в третью степень получим равносильное данному уравнение:

$$x^3 - 2x + 1 = 1^3 \Leftrightarrow x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{x+1} = 2 - x.$$

Решение. Так как ***n=2*** - четное, то исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x+1 = (2-x)^2 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 4-4x+x^2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+3=0 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5-\sqrt{13}}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{5-\sqrt{13}}{2}$.

Иногда встречаются уравнения вида $\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$, которые решаются следующим образом:

n - нечетное $\Rightarrow f(x) = g(x)$

$$\boldsymbol{n} \text{ - четное} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{2x+6} - \sqrt{x+1} = 0$.

Решение. Запишем данное уравнение в виде: $\sqrt{2x+6} = \sqrt{x+1}$. Возводя обе части в квадрат и учитывая, что $x+1 \geq 0$, получим уравнение *2x+6=x+1*, решение которого есть *x=-5* – не удовлетворяет выписанному условию. Значит, данное уравнение не имеет решений.

Ответ: нет решений

Иногда иррациональное уравнение содержит несколько радикалов. В этом случае для избавления от радикалов уравнение приходится возводить в соответствующую степень несколько раз. При этом предварительно уединяют один из радикалов так, чтобы обе части уравнения стали неотрицательными. Особое внимание следует обратить на правильное нахождение ОДЗ.

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{2x-9} - \sqrt{x-3} = 1$.

Решение. Запишем уравнение в виде: $\sqrt{2x-9} = 1 + \sqrt{x-3}$.

Так как теперь обе части полученного уравнения неотрицательны, то возведем их в квадрат:

$$2x - 9 = 1 + x - 3 + 2\sqrt{x-3} \Leftrightarrow x - 7\sqrt{x-3}.$$

Полученное уравнение равносильно исходному. Для его решения рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x-7 \geq 0 \\ (x-7)^2 = 4(x-3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x^2 - 14x + 49 = 4x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 7 \\ x^2 - 18x + 61 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 7 \\ x = 9 \pm \sqrt{20} \end{cases} \Leftrightarrow x = 9 + \sqrt{20}.$$

Ответ: $x = 9 + \sqrt{20}$.

Введение новой переменной в ряде случаев позволяет перейти от иррационального уравнения к рациональному уравнению.

Пример 5. Решить уравнение $x^2 + 3x + 4\sqrt{x^2 + 3x - 5} = 10$.

Решение. Возведение данного уравнения в квадрат привело бы к уравнению четвертой степени, что нерационально. Поэтому запишем уравнение в виде$x^2 + 3x - 5 + 4\sqrt{x^2 + 3x - 5} = 5$

и введем «новую» переменную:

$$y = \sqrt{x^2 + 3x - 5}, y \geq 0$$

Получим$y^2 + 4y - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -5. \end{array}\right.$.

Вернемся к «старым» переменным$\sqrt{x^2 + 3x - 5} = 1$ *или* $\sqrt{x^2 + 3x - 5} = -5$.

Второе из полученных уравнений решений не имеет,

а решения первого есть числа$x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$.

Ответ: $x_1 = \frac{-3-\sqrt{33}}{2}$, $x_2 = \frac{-3+\sqrt{33}}{2}$.

Практическая часть

Решите уравнения

1. $\sqrt{x+3} = \sqrt{5-x}$
2. $\sqrt{x+11} = x - 1$
3. $\sqrt{x^2 + x + 4} = 4$

1. $\sqrt{x+4} = \sqrt{2x-1}$
2. $\sqrt{x+10} = x - 2$
3. $\sqrt{x^2 - x - 3} = 3$

Практическое занятие № 40.
Показательные уравнения

Цель занятия: *Рассмотреть основные приемы решения показательных уравнении, обобщить и систематизировать знания по теме «Показательные уравнения, и методы их решений»; закрепить умения использовать полученные знания при решении показательных уравнений разными методами.*

Контрольные вопросы.

1. Какие уравнения называются показательными.
2. Основные свойства степени с рациональным показателем.
3. Основные свойства степени с действительным показателем.

Примеры и последовательность выполнения заданий

Методы решения показательных уравнений

1. Простейшие показательные уравнения

Примеры.

Пример 1. Решите уравнение: $3^{4x-5} = 3^{x+4}$.

Решение.

$3^{4x-5} = 3^{x+4}$

$4x - 5 = x + 4$

$3x = 9$

$x = 3$.

Ответ:3

2. Методы преобразования показательных уравнений к простейшим.

А. Метод уравнивания оснований.

Примеры.

Пример 1. Решите уравнение: $27 * 3^{4x-9} - 9^{x+1} = 0$.

Решение.

$$27 * 3^{4x-9} - 9^{x+1} = 0$$

$3^3 3^{4x-9} - (3^2)^{x+1} = 0$

$3^{3+(4x-9)} - 3^{2(x+1)} = 0$

$3^{4x-6} - 3^{2x+2} = 0$

$3^{4x-6} = 3^{2x+2}$

$4x-6=2x+2$

$2x = 8$

$x=4$. *Ответ:* 4.

Пример 2. Решите уравнение: $2^{2x} \cdot 3^x \cdot 5^x - 60^{4x-15} = 0$.

Решение.

$(2^2)^x \cdot 3^x \cdot 5^x - 60^{4x-15} = 0$

$(2^2)^x \cdot 3^x \cdot 5^x = 60^{4x-15}$

$4^x \cdot 3^x \cdot 5^x = 60^{4x-15}$

$(4 \cdot 3 \cdot 5)^x = 60^{4x-15}$

$60^x=60^{4x-15}$
$x=4x-15$
$3x=15$
$x=5$. *Ответ:* 5.

В. Уравнения, решаемые разложением на множители.

Примеры.

Пример 1. Решите уравнение: $x\cdot 2^x = 2\cdot 2^x + 8x-16$.

Решение.

$x\cdot 2^x = 2\cdot 2^x + 8x-16$
$x\cdot 2^x - 2\cdot 2^x = 8\cdot(x-2)$
$2^x\cdot (x-2) - 8\cdot(x-2)$
$(x-2)\cdot(2^x - 8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ 2^x-8=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ 2^x=8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ 2^x=2^3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Ответ: $\{2; 3\}$

Пример 2 . Решите уравнение: $5^{2x} - 7^x + 5^{2x}\cdot 35 + 7^x\cdot 35 = 0$

Решение.

$5^{2x} - 7^x - 5^{2x}\cdot 35 +7^x\cdot 35= 0$
$(5^{2x} - 7^x)-(5^{2x}\cdot 35 +7^x\cdot 35)= 0$
$(5^{2x}-7^x)-35(5^{2x}-7^x)=0$
$(5^{2x}-7^x)\cdot (1-35)=0$
$(5^{2x}-7^x)\cdot(-34)=0$, т.к $-34\neq 0$, *то*
$(5^{2x}-7^x)=0$
$(5^2)^x=7^x$
$\frac{25^x}{7^x}=1$
$(\frac{25}{7})^x=1$
$(\frac{25}{7})^x=(\frac{25}{7})^0$ $x=0$ *Ответ:* 0.

С. Уравнения, которые с помощью подстановки $\alpha^{f(x)} = t$, $t>0$ преобразуются к квадратным уравнениям (или к уравнениям более высоких степеней).

Пусть $A\cdot\alpha^{2f(x)} + B\cdot\alpha^{f(x)} + C = 0$, где А, В, С - некоторые числа. Сделаем замену: $\alpha^{f(x)} = t$, $t>0$, тогда $A\cdot t^2 + B\cdot t + C = 0$

Решаем полученное уравнение, находим значения t, учитываем условие t >0 , возвращаемся к простейшему показательному уравнению $\alpha^{f(x)} = t$, решаем его и записываем ответ.

Примеры.

Пример 1 . Решите уравнение: $2^{2+x} - 2^{2-x} = 15$.

Решение.

$2^{2+x} - 2^{2-x} =15$
$2^2 2^x - \frac{2^2}{2^x} = 15$
$4 (2^x)^2 - 4 = 15\cdot 2^x$

Делаем замену $t = 2^x$, $t > 0$. *Получаем уравнение* $4t^2 - 4 = 15t \Leftrightarrow 4t^2 - 15t - 4=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = -\frac{1}{4} \end{array}\right.$, $t = -\frac{1}{4}$ не удовлетворяет условию $t > 0$.

Вернемся к переменной х:

$2^x = 4$

$2^x = 2^2$

х=2.*Ответ: 2*

Практическая часть

1 вариант

Решите уравнения:

1) $9^x = 3^{2\sqrt{2}}$
2) $2^{2x+1} = 32$
3) $3 \cdot 9^x = 81$
4) $2^{x+2} + 2^x = 5$
5) $3^{2x-1} + 3^{2x} = 108$
6) $3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 63$
7) $3^{x^2+x-12} = 1$
8) $4^x - 14 \cdot 2^x - 32 = 0$

2 вариант

Решите уравнения:

1) $7^{x\sqrt{3}} = \sqrt{7}$
2) $2^{2+x} = 4$
3) $2 \cdot 4^x = 64$
4) $3^x + 4 \cdot 3^{x+1} = 13$
5) $2^{3x+2} - 2^{3x-2} = 30$
6) $2^{x+11} + 2^{x-1} + 2^x = 28$
7) $2^{x^2-7x+10} = 1$
8) $2^{2x+1} + 7 \cdot 2^x = 4$

Практическое занятие № 43.
Показательные неравенства.

Цель занятия: *Обобщение свойств степеней, применение их к решению показательных уравнений; рассмотреть особенности решения показательных неравенств; закрепить умения использовать полученные знания при решении примеров разными методами.*

1 Показательные неравенства

При решении показательных неравенств используются следующие утверждения:

А.1. Если $a > 1$, неравенство

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

равносильно неравенству

$$f(x) > g(x).$$

Аналогично, $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

А.2. Если $0 < a < 1$, неравенство

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

равносильно неравенству

$$f(x) < g(x).$$

Аналогично, $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

А.3. Неравенство

$$[h(x)]^{f(x)} > [h(x)]^{g(x)} \qquad (1)$$

равносильно совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) > g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ f(x) < g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Замечание. Если знак неравенства (*1*) нестрогий, дополнительно рассматривается и случай

$$\begin{cases} h(x) = 1, \\ x \in D(f) \cap D(g), \end{cases}$$

где $D(f)$ ($D(g)$) означает область определения функции f (g).

А.4. Если $b \geq 0$, неравенство

$$a^{f(x)} < b$$

не имеет решений (следует из свойств показательной функции).

А.5. Если $b \leq 0$, множеством решений неравенства $a^{f(x)} > b$ является $x \in D(f)$.

А.6. Если $a > 1$, $b > 0$, неравенство

$$a^{f(x)} > b$$

равносильно неравенству

$$f(x) > \log_a b.$$

Аналогично, $a^{f(x)} < b \Leftrightarrow f(x) < \log_a b$.

А.7. Если $0 < a < 1$, $b > 0$, неравенство

$$a^{f(x)} > b$$

равносильно неравенству

$$f(x) < \log_a b.$$

Аналогично, $a^{f(x)} < b \Leftrightarrow f(x) > \log_a b$.

Пример 12. Решите неравенство $2^{10x-5} \geq \frac{1}{16}$.

Решение:

$$2^{10x-5} \geq \frac{1}{16} \Leftrightarrow 2^{10x-5} \geq 2^{-4} \Leftrightarrow 10x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq -0{,}4$$

Ответ: $x \in [-0{,}4; +\infty)$.

Пример 13. Решите неравенство $\left(\frac{1}{7}\right)^{5x-1} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^4$.

Решение:

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{5x-1} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^4 \Leftrightarrow 5x-1 \leq 4 \Leftrightarrow 5x \leq 5 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Ответ: $x \geq 1$.

Пример 14. Решите неравенство $\frac{2}{3}^{x^2-5x+10} \geq \frac{16}{81}$

Решение: Неравенство переписывается в виде:

$$\frac{2}{3}^{x^2-5x+10} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

Функция $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ монотонно убывает, поэтому неравенство $\left(\frac{2}{3}\right)^a \geq \left(\frac{2}{3}\right)^b$ эквивалентно неравенству $a \leq b$. Основание степени отбрасывается с *изменением* знака неравенства:

$$x^2 - 5x + 10 \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 6 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leq x \leq 3$$

Ответ: [2; 3].

Пример 15. Решите неравенство $4^x — I0 \cdot 2^x + I6 > 0$

Решение: Делая замену $\boldsymbol{t = 2^x}$, приходим к квадратному неравенству относительно $\boldsymbol{t}$:

$$t^2 - I0t + I6 > 0.$$

Его решения: t > 8 или t < 2. Обратная замена:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x > 8, \\ 2^x < 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3, \\ x < 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

Пример 16. Решите неравенство $5^{2x+1} \leq 5^x + 4$

Решение: Перепишем неравенство в виде:

$$5 \cdot 5^{2x} - 5^x - 4 \leq 0$$

и сделаем замену $\boldsymbol{t = 5^x}$:

$$5t^2 - t - 4 \leq 0$$

Решения полученного квадратного неравенства: $-\frac{4}{5} \leq t \leq 1$

Обратная замена: $\begin{cases} 5^x \geq -\frac{4}{5}, \\ 5^x \leq 1. \end{cases}$

Первое неравенство системы выполнено при всех значениях x (поскольку функция $y = 5^x$ принимает только положительные значения). Решения второго неравенства системы — множество $x \leq 0$.

Ответ: $(-\infty; 0]$.

Практическая часть:

Выполните следующие задания:

1 вариант

1. $\frac{x^2-14x-15}{10-4x} > 0$
2. $49^{x+1} \leq \left(\frac{1}{7}\right)^x$
3. $9^x + 8 \cdot 3^x > 9$
4. $2 \cdot 3^{x+1} - 3^x < 15$

2 вариант

1. $\frac{5x^2+4x-1}{7-2x} < 0$
2. $9^x \leq \left(\frac{1}{27}\right)^{2-x}$
3. $4^x - 3 \cdot 2^x > 4$
4. $2^x + 3 \cdot 2^{x-3} < 22$

Практическое занятие № 44.
Решение показательных неравенств

Цель занятия:

– научиться решать показательные неравенства;

– научиться решать показательные неравенства графически.

Оснащение занятия: конспекты, учебник алгебры-10 класс

Порядок выполнения работы:

Задание 1.

Повторите теоретический лекционный материал по теме «Свойства показательной функции и ее график», «Показательные неравенства».

Задание 2.

Организуйте работу парами и на основании теоретического материала задайте друг другу вопросы, начинающиеся со слов: – «Что?»; «Как?»; «Какими?»; «Почему?»

Несколько вопросов и ответов по окончании работы в парах будут заслушаны перед группой.

Задание 3. Назовите свойство показательной функции, которое применяется при решении показательных неравенств.

Задание 4. Решить неравенство №228(1), №229(1,3), №232(3),

Задание 5. Выполнить №233(2), №236(1,3).

Контроль знаний студентов:

Задание 6. Решить неравенство самостоятельно.
Вариант-1. № 228(5), №231(1) , №232(1).
Вариант-2. № 228(3), №231(3), №232(2).
Задание 7. Решить графически неравенство самостоятельно.
Вариант-1. №200(1,4). Вариант-2. №200(2,3).
Контрольные вопросы:

1. Что называется показательной функцией?
2. Какими свойствами она обладает?
3. Как расположен график показательной функции?
4. Какие неравенства называются показательными?
5. Как решить показательные неравенства графически?

Литература: Колмогоров .Алгебра и начала анализа стр. 98, стр.107.

Практическое занятие № 46
Применение свойств логарифма

Цель занятия:

Обеспечить закрепление понятия логарифм числа; формирование практических навыков преобразования логарифмических выражений на основе изученного теоретического материала (определения и свойств логарифмов).

Контрольные вопросы.

1. Понятие логарифма числа.
2. Основное логарифмическое тождество.
3. Понятие десятичного логарифма числа.
4. Понятие натурального логарифма числа.
5. Основные свойства логарифмов.
6. Формула перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию.

Примеры и последовательность выполнения заданий.

Пример 1. Вычислить. $49^{0,5\log_7 9}$

Решение. $49^{0,5\log_7 9}=(7^2)^{0,5\log_7 9}=7^{2\cdot 0,5\log_7 9}=7^{\log_7 9}=9$

Пример 2. Вычислить.

а) $\log_3 15-\log_3 5+3^{\log_3 5}$

Решение. $\log_3 15-\log_3 5+3^{\log_3 5}=\log_3\frac{15}{3}+5=\log_3 3+5=1+5=6$

б) $\log_3 36-2\log_3 2+\log_2\frac{1}{4}$

Решение.

$$\log_3 36-2\log_3 2+\log_2\frac{1}{4}=\log_3 36-\log_3 2^2+\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\log_3\frac{36}{4}+\log_2 2^{-2}=\log_3 9-2=2-2=0$$

Пример 3. Упростить выражение. $3^{\log_2\frac{1}{4}+\log_3 5}+\log_4\sqrt[5]{16}$

Решение. $3^{\log_2\frac{1}{4}+\log_3 5}+\lg\sqrt[5]{100}=3^{\log_2 2^{-2}}\cdot 3^{\log_3 5}+\frac{1}{5}\lg 100=3^{-2}\cdot 5+\frac{1}{5}\cdot 2=\frac{1}{9}\cdot 5+\frac{2}{5}=\frac{25+18}{45}=\frac{43}{45}$

Пример 4. Вычислить. $\frac{\log_3 216}{\log_8 3}-\frac{\log_3 24}{\log_{72} 3}$

Решение.

$$\frac{\log_3 216}{\log_8 3}-\frac{\log_3 24}{\log_{72} 3}=\frac{\log_3 216}{\frac{\log_3 3}{\log_3 8}}-\frac{\log_3 24}{\frac{\log_3 3}{\log_3 72}}=\frac{\log_3 216}{\frac{1}{\log_3 8}}-\frac{\log_3 24}{\frac{1}{\log_3 72}}=\log_3 216\cdot\log_3 8-\log_3 24\cdot\log_3 72=$$

$$=\log_3(72\cdot 3)\cdot\log_3 8-\log_3(8\cdot 3)\cdot\log_3 72=(\log_3 72+\log_3 3)\log_3 8-(\log_3 8+\log_3 3)\log_3 72=$$

$$=(\log_3 72+1)\log_3 8-(\log_3 8+1)\log_3 72=\log_3 72\cdot\log_3 8+\log_3 8-\log_3 72\cdot\log_3 8-\log_3 72=$$

$$=\log_3 8-\log_3 72=\log_3\frac{8}{72}=\log_3\frac{1}{9}=\log_3 3^{-2}=-2$$

Практическая часть:

Выполните следующие задания

1 вариант

Вычислить:

1) $3^{2-\log_3 9}$

2) $\log_2\log_4 256$

3) $\frac{\log_5 27}{\log_5 9}$

4) $\frac{\log_5 36-\log_5 12}{\log_5 9}$

5) $\frac{\log_2 24}{\log_{96} 2}-\frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$

6) $\log_2 0{,}8-\log_2 1\frac{1}{8}+\log_2 22{,}5$

7) $2\log_{\frac{1}{5}} 10-\log_{\frac{1}{5}} 28+\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{5}}\sqrt[3]{49}$

8) $\frac{\log_7 14-\frac{1}{3}\log_7 56}{\log_6 30-\frac{1}{2}\log_6 150}$ **(*)**

2 вариант

1) $4^{3-\log_4 64}$

2) $\log_3\log_4 64$

3) $\frac{\log_3 8}{\log_3 16}$

4) $\frac{\log_7 8}{\log_7 15 - \log_7 30}$

5) $\frac{\log_2 192}{\log_{12} 2} - \frac{\log_2 24}{\log_{96} 2}$

6) $\log_3 3{,}6 - \log_3 1{,}4 + \log_3 1\frac{1}{6}$

7) $\frac{5}{3}\log_{\frac{2}{3}} \sqrt[5]{8} - 3\log_{\frac{2}{3}} 3 + \frac{1}{2}\log_{\frac{2}{3}} 36$

8) $\frac{\log_2 24 - \frac{1}{2}\log_2 72}{\log_3 18 - \frac{1}{3}\log_3 72}$**(*)**

Практическое занятие № 47.
Преобразование логарифмических выражений.

Цель занятия:

– научиться вычислять логарифмы чисел;

– научиться применять свойства логарифмов при выполнении преобразований выражений, содержащих логарифмы;

– изучить тему «Десятичные и натуральные логарифмы».

Оснащение занятия: учебник, конспекты, справочник.

Порядок выполнения работы

Задание 1. Вопросы для повторения.

1. В чем заключается определение логарифма данного числа по данному основанию?
2. Какие ограничения накладываются на основание и на логарифмируемое число?
3. Что можно сказать о логарифме числа, равного основанию?
4. Чему равен логарифм единицы по любому основанию?
5. Перечислите свойства логарифмов.

Задание 2. Проверить: а)   б) ; в) ; г)
д) ; е) .

Задание 3. Найти N, если: а) ; б) ; в) ; г) .

Задание 4. Найти а, если: а) ; б) ; в) ; г) .

Задание 5. Используя свойства логарифмов выполнить № 290- № 293 (1;3).

Задание 6. Разберите решение задач 5 и 6 на стр.89-90 и выполните № 277(1,3,5), № 278(н е ч.).

Задание 7. Прочитайте п.17, стр. 94 и дайте ответ письменно на вопросы:

1. Какие логарифмы называются десятичными? Как их записывают?
2. Какие логарифмы называются натуральными? Как их записывают?
3. Запишите формулу перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию.
4. Запишите формулы перехода к десятичным и натуральным логарифмам.
5. Разберите решение задачи 2 на странице 96.

Задание 8. Выполните № 307 (5;6).

Контроль знаний студентов:

1. Проверить практическую работу студентов.
2. Выполнить тестовое задание по 2-м вариантам (задание выдает преподаватель).

Литература: Колмогоров. Алгебра и начала анализа стр.88, стр.92, стр.94.

Практическое занятие № 48,49

Логарифмические уравнения

Решение логарифмических уравнений и систем.

Цель занятия: Обобщение свойств логарифмов, применение их к решению уравнений;закрепление основных методов решения логарифмических уравнений

Контрольные вопросы.

1. Что понимают под логарифмическим уравнением?
2. Что называется корнем уравнения?
3. Что значит «решить уравнение»?
4. Какие уравнения называются равносильными?
5. Что такое потенцирование?
6. Обязательной ли является в общем случае проверка найденных значений неизвестного по условию уравнения?
7. Какие свойства логарифмов вам известны?

Примеры и последовательность выполнения заданий.

1. ***Простейшее логарифмическое уравнение:***

$log_a f(x) = b;$

ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases}$

Решение:

1) $f(x) = a^b$;
2) Отбор корней, удовлетворяющих ОДЗ.

<u>Пример:</u>

$log_7(2x - 1) = 1$

$log_7(2x - 1) = log_7 7$

2x-1=7 ↔ 2x=8 ↔ x=4

Проверка:$log_7(2\cdot 8-1)=log_7 7=1$

$1=1$

Ответ: x=4.

2. По свойству логарифмов и определение логарифма

$log_a f(x)=log_a g(x);$

ОДЗ: $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ a>0, a\neq 1 \end{cases}$

1)Решить f(x)=g(x)

2)Отбор корней, удовлетворяющих ОДЗ.

<u>Пример:</u>

$lg(3x-17)-lg(x+1)=0$

ОДЗ:

$\begin{cases} 3x-17>0 \\ x+1>0 \\ a>0, a\neq 1 \end{cases}; \begin{cases} 3x>17 \\ x>-1 \end{cases}; \begin{cases} 3x>17 \\ x>-1 \end{cases}; \begin{cases} x>17/3 \\ x>-1 \end{cases} x>5\frac{2}{3}.$

$lg(3x-17)=lg(x+1)$

3x-17=x+1

3x-x=17+1

2x=18

x=9 - уд. ОДЗ

Ответ: x=9

Замечание: *Можно решить без ОДЗ, но тогда обязательна проверка!*

3.Если в уравнении логарифмы с разными основаниями

$log_a f(x)=log_{\sqrt{a}} g(x);$

ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases}$

1)Сведите логарифмы к одному основанию
2)Отбор корней, удовлетворяющих ОДЗ.

<u>Пример 1:</u>

$$log_{\sqrt{2}} x + 4\, log_4 x + log_8 x = 13$$

$$2log_2 x + 4 * \frac{1}{2} log_2 x + \frac{1}{3} log_2 x = 13$$

$$2log_2 x + 2\, log_2 x + \frac{1}{3} log_2 x = 13$$

$$4\frac{1}{3} log_2 x = 13$$

$\frac{13}{3} log_2 x = 13$, $log_2 x = 13 : \frac{13}{3}$

$log_2 x = 3$, $x=2^3, x=8$

Ответ: x=8.

4.Метод введения новой переменной

$a(log_m x)^2 + blog_m x + c = 0;$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ m > 0, m \neq 1 \end{cases}$

Пусть $t = log_m x;$ $\boldsymbol{at^2+bt+c=0}$

Решим квадратное уравнение

$D = b^2 - 4ac;$

$t1 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a};$

$t2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a};$

$log_m x = t1; x = m^{t1};$

$log_m x = t2; x = m^{t2};$

<u>Пример 1:</u>

$log^2{}_2 x+2log_2 x-3=0$

ОДЗ: $x > 0$

$log_2 x = t$, $t > 0$

$t^2+2t-3=0$ $t_1=1$, $t_2=-3$ *–посторонний корень,т.к.* $t > 0$

$log_2 x = 1$,$log_2 x = log_2 2$, x=2

Ответ: x=2.

Пример 2: *(разные основания и ввод новой переменной)*

$log_3 x + log_x 9 = 3$

$log_3 x + \frac{log_3 9}{log_3 x} = 3$ /*$log_3 x$

$log_3^2 x + log_3 9 = 3 log_3 x$

$log_3^2 x + 2 = 3 log_3 x$

$log_3^2 x - 3 log_3 x + 2 = 0$

$log_3 x = t$,$t^2 - 3t + 2 = 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = 1$

1) $log_3 x = t_1$, $log_3 x = 2$, $log_3 x = log_3 9$, x=9
2) $log_3 x = t_2$, $log_3 x = 1$, $log_3 x = log_3 3$, x=3

Ответ: 9;3.

Практическая часть:

Выполните следующие задания

Решите уравнения:

1 вариант

1) $\log_4(2x+3) = 3.$

2) $\log_3(x-8) + \log_3 x = 2.$

3) $\log_{\sqrt{3}} x + \log_9 x = 10.$

4) $\log_3 x = 3\log_3 2 + 4\log_9 5.$

5) $\log_4 x + \log_8 x = 5.$

6) $\log_2^2 x - 4\log_4 x = 3.$

7) $\log_2 x + \log_x 2 = 2{,}5.$

2 вариант

1) $\log_5(2x-1) = 2.$

2) $\log_2(x-2) + \log_2 x = 3.$

3) $\log_8 x + \log_{\sqrt{2}} x = 14.$

4) $\log_2 x = 6\log_8 9 - 2\log_2 3.$

5) $\log_9 x - \log_{27} x = \frac{2}{3}.$

6) $\log_5^2 x - 2 = 3\log_{125} x.$

7) $\log_2 x - 2\log_x 2 = -1.$

Практическое занятие № 50.
Решение логарифмических неравенств.

Цель занятия: *Обобщение свойств логарифмов, применение их к решению неравенств; закрепление основных методов решения логарифмических уравнений и неравенств;закрепить умения использовать полученные знания при решении примеров разными методами.*

Логарифмические неравенства

Неравенство, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании называется **логарифмическим неравенством**.

В процессе решения логарифмических неравенств часто используются следующие утверждения относительно равносильности неравенств и учитываются свойства монотонности логарифмической функции.

Утверждение 1. Если $a > 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Утверждение 2. Если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Утверждение 3. Неравенство $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ равносильно совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) > g(x) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ 0 < f(x) < g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Подчеркнем, что в неравенстве $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ вместо знака $>$ может фигурировать любой из знаков $\geq$,$<$, $\leq$.

В этом случае ***утверждения 1-3*** соответственно преобразуются.

Пример 17. Решите неравенство: $\log_3(x-1) + \log_3(x+5) < \log_3(5x+1)$.

Решение. Используя свойства логарифмов, преобразуем левую часть: $\log_3(x-1) + \log_3(x+5) = \log_3((x-1)(x+5)) = \log_3(x^2+4x-5)$ и решим систему неравенств:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x+5>0 \\ 5x+1>0 \\ x^2+4x-5<5x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^2-x-6<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1 \\ -2<x<3 \end{cases} \Rightarrow 1<x<3.$$

Обращаю ваше внимание на то, что положительным должно быть **каждое** логарифмируемое выражение, а не только их произведение.
Ответ: (1; 3).

Пример 18. Решите неравенство $\log_3 \frac{1+2x}{1+x} < 1$.

Решение:

$$\log_3 \frac{1+2x}{1+x} < 1 \Leftrightarrow \log_3 \frac{1+2x}{1+x} < \log_3 3 \Leftrightarrow 0 < \frac{1+2x}{1+x} < 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1+2x}{1+x} < 3, \\ \frac{1+2x}{1+x} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{1+x} > 0, \\ \frac{1+2x}{1+x} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x > -1; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x > -\frac{1}{2}; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x > -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-0{,}5; +\infty)$.

Пример 19. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{5}}\left(2x^2+5x+1\right) < 0$.

Решение:

$$\log_{\frac{1}{5}}\left(2x^2+5x+1\right) < 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{5}}\left(2x^2+5x+1\right) < \log_{\frac{1}{5}} 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+5x+1 > 1 \Leftrightarrow 2x^2+5x > 0 \Leftrightarrow x\cdot(2x+5) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -\frac{5}{2}, \\ x > 0. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty; -2{,}5) \cup (0; +\infty)$.

Выполните следующие задания:

1 ВАРИАНТ

1. $\log_2(1-2x) < 0$.
2. $\log_{\frac{1}{2}}(2x+5) > -3$.
3. $\log_3(x^2 - x + 3) > 2$
4. $\ln(4x-5) \le \ln(5x-8)$
5. $\log_{\frac{1}{2}}(x+8) > log_{\frac{1}{2}}(x-3) + \log_{\frac{1}{2}}(3x)$

2 ВАРИАНТ

1. $\log_2(2x+1) > 4$
2. $\log_{\frac{1}{5}}(2x+3) > -3$
3. $\log_2(x^2 + x + 2) > 3$
4. $\lg(2x-3) \le \lg(3x-5)$
5. $\log_{\frac{1}{2}}(2x+15) > log_{\frac{1}{2}}(5x) + \log_{\frac{1}{2}}(x-4)$

Решите систему уравнений*

a) $\begin{cases} x + y = 6, \\ \log_2 x + \log_2 y = 3. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2^x + \left(\frac{1}{3}\right)^y = 5, \\ 2^{2x} + \left(\frac{1}{3}\right)^{2y} = 13. \end{cases}$

c) $*\begin{cases} 2^x + 6\cdot 2^{-x} \le 7, \\ \frac{2x^2-6x}{x-4} \le x. \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 8, \\ \log_{12} x + \log_{12} y = 1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 3^{y} = 7, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + 3^{2y} = 25. \end{cases}$

c) $*\begin{cases} 3^{x} + 10 \cdot 3^{-x} \le 11, \\ \frac{2x^2-5x}{x-3} \le x. \end{cases}$

Практическая работа № 53-54
Тема: Действия над векторами в пространстве.

Цель занятия: *Обобщить и систематизировать знания по теме «Действия над векторами»; закрепить умения использовать полученные знания для решения геометрических задач.*

Контрольные вопросы.

1. Понятие прямоугольной системы координат в пространстве. Ее элементы.
2. Понятие вектора. Действия над векторами в координатной форме.
3. Скалярное произведение векторов.
4. Угол между векторами.
5. Длина вектора. Разложение вектора по координатным векторам.
6. Формула Расстояния между двумя точками. Координаты середины отрезка

Примеры и последовательность выполнения заданий.

Пример 1

Даны векторы $\bar{a}\{5;3;0\}$; $\bar{b}\left\{\frac{1}{2};-2;-4\right\}$; $\bar{c}\ \{-3;1;1\}$ $\bar{d}\ \{-1;1;-1\}$

Вычислить $|(2\bar{a} + \bar{k})| - 4(2\bar{b} - \bar{c})\bar{d}$

Решение.

$2\bar{a}\ \{5\cdot 2;3\cdot 2;0\cdot 2\} \Rightarrow 2\bar{a}\ \{10;6;0\}$

$\bar{k}\ \{0;0;1\}$

$2\bar{a} + \bar{k}\ \{10+0;6+0;0+1\} \Rightarrow 2\bar{a} + \bar{k}\ \{10;6;1\}$

$\left|2\bar{a}+\bar{k}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{10^2+6^2+1^2} = \sqrt{100+36+1} = \sqrt{137}$

$2\bar{b}\left\{2\cdot\frac{1}{2};2\cdot(-2);2\cdot(-4)\right\} \Rightarrow 2\bar{b}\{1;-4;-8\}$

$2\bar{b} - \bar{c}\ \{1-(-3);-4-1;-8-1\} \Rightarrow 2\bar{b} - \bar{c}\ \{4;-5;-9\}$

$4(2\bar{b} - \bar{c})\ \{4\cdot 4;4\cdot(-5);4\cdot(-9)\} \Rightarrow 4(2\bar{b} - \bar{c})\{16;-20;-36\}$

Так как $4(2\bar{b} - \bar{c})\bar{d}$ - это скалярное произведение векторов, то по формуле скалярного произведения $\bar{a}\cdot\bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ получим:

$4(2\bar{b} - \bar{c})\bar{d}$ =16·(-1) + (-20)·1 + (-36)·(-1)= -16 – 20 + 36 = 0

Тогда $|(2\bar{a} + \bar{k})| - 4(2\bar{b} - \bar{c})\bar{d} = \sqrt{137} + 0 = \sqrt{137}$

Ответ: $|(2\bar{a} + \bar{k})| - 4(2\bar{b} - \bar{c})\bar{d} = \sqrt{137}$

Пример 2. Выяснить при каких значениях m и n данные векторы коллинеарные: $\bar{a}\{m;2;5\}$ и $\bar{b}\{1;-1;n\}$.

Решение.

У коллинеарных векторов соответствующие коэффициенты пропорциональны. Запишем соответствующую пропорцию, из которой найдем m и n:

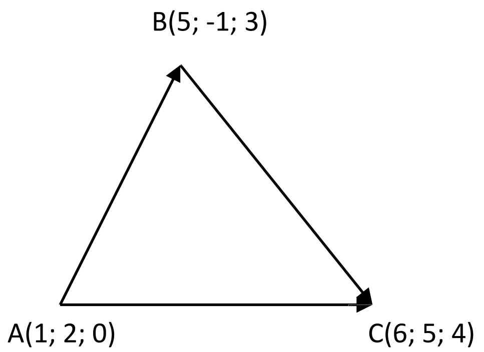
$\frac{m}{1} = \frac{2}{-1} = \frac{5}{n}$**,** откуда $m = \frac{2\cdot 1}{-1} = -2;\quad n = \frac{5\cdot(-1)}{2} = -\frac{5}{2} = -2.5$

Ответ: m = -2, n = -2.5.

Пример 3.

Вершины треугольника имеют координаты A(1; 2; 0), B(5; -1; 3), C(6; 5; 4). Найдите длины сторон треугольника и угол A треугольника ABC.

Решение.



1. Найдем координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$

$\overline{AB}\ \{5-1; -1-2; 3-0\} \Rightarrow \overline{AB}\ \{4; -3; 3\}$

$\overline{BC}\ \{6-5; 5-(-1); 4-3\} \Rightarrow \overline{BC}\ \{1; 6; 1\}$

$\overline{AC}\ \{6-1; 5-2); 4-0\} \Rightarrow \overline{AC}\ \{5; 3; 4\}$

2. Найдем длины каждого вектора. Это и будет длины сторон треугольника ABC.

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9+9} = \sqrt{34}$$

- длина стороны AB

$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{1^2 + 6^2 + 1^2} = \sqrt{1+36+1} = \sqrt{38}$ - длина стороны BC

$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{25+9+16} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ - длина стороны AC

3. Найдем угол BAC – это угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

$$\cos BAC = \frac{4\cdot 5 + (-3)\cdot 3 + 3\cdot 4}{\sqrt{34}\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{20-9+12}{5\sqrt{68}} = \frac{23}{10\sqrt{17}}.$$

$$\angle A = \arccos\frac{23\sqrt{17}}{170}$$

Ответ: $AB=\sqrt{34}, BC=\sqrt{38}, AC=5\sqrt{2}$, $\angle A=\arccos\frac{23\sqrt{17}}{170}$

Выполните следующие задания

1 вариант

1. Запишите координаты вектора: $\vec{a}$ = $3\vec{\imath}$+$2\vec{\jmath}$-$5\vec{k}$,$\vec{b}$ = -$2\vec{\imath}$-$3\vec{\jmath}$+$4\vec{k}$, $\vec{c}$ = $\vec{\imath}$-$\vec{\jmath}$, $\vec{m}$ = $2\vec{k}$, $\vec{n}$=- $\vec{\jmath}$+$\vec{k}$ и найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Даны векторы$\vec{a}${-3;-1;2},$\vec{в}${0;3;4}, $\vec{c}${0;-1;0}, запишите разложение этих векторов по координатным векторам $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$.

3. Найдите середину отрезка АС: А (6; 7; 8) , С (4; 3; 2)
4. При каких значениях k и с данные векторы коллинеарные: $\bar{a}\{2;c;3\}$, $\bar{b}\{3;2;k\}$

5. Дан Δ ABC найдите:
   а) их координаты.
   б) длины векторов $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}$.
   в) углы между векторами $\overrightarrow{AB}$и $\overrightarrow{AC}$.

   Если известны координаты вершин треугольника: А(-5;2;-2), В(-4;3;0), С(-5;2;0).

6. Найдите скалярное произведение векторов, используя формулу: $\vec{a}\cdot\vec{в}$ = $|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\cos(\vec{a}\vec{в})$ (*)
   Если $\vec{a}${1;2;2} , $\vec{в}${-2;-1;-2}.
   Для этого:

   1) найдите длину $\vec{a}$ и $\vec{в}$.
   2) $\cos(\vec{a}\vec{в})$.
   3)подставьте найденные значения в формулу (*)

2 вариант

1. Запишите координаты вектора: $\vec{a}$ = $2\vec{\imath}$+$4\vec{\jmath}$-$3\vec{k}$,$\vec{b}$ = -$3\vec{\imath}$-$2\vec{\jmath}$+$2\vec{k}$, $\vec{c}$ = $\vec{\jmath}$-$\vec{k}$, $\vec{m}$ = $3\vec{\jmath}$,$\vec{n}$=- $\vec{\imath}$-$\vec{k}$и найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Даны векторы$\vec{a}${-4;2;1},$\vec{в}${3;4;0}, $\vec{c}${0;0;-1}, запишите разложение этих векторов по координатным векторам $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$.

3. Найдите середину отрезка BD: В (8; 2; 6) **,** D (2; 8; 4)
4. При каких значениях k и с данные векторы коллинеарные: $\bar{a}\{k;c;2\}$, $\bar{b}\{6;9;3\}$

5. Дан Δ KNM найдите:
   а) их координаты.
   б) длины векторов $\overrightarrow{KN},\overrightarrow{NM},\overrightarrow{KM}$.
   в) углы между векторами $\overrightarrow{KN}$ и $\overrightarrow{KM}$.

   Если известны координаты вершин треугольника: K(4;-3;0), N(5;-3;1), M(5;-5;-1).

6. Найдите скалярное произведение векторов, используя формулу: $\vec{a}\cdot\vec{в}$ = $|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|\cdot\cos(\vec{a}\vec{в})$ (*)
   Если $\vec{a}${2;1;2} , $\vec{в}${-1;-2;-2}.
   Для этого:
   1) найдите длину $\vec{a}$ и $\vec{в}$.
   2) $\cos(\vec{a}\vec{в})$.
   3)подставьте найденные значения в формулу(*)

2 курс

Практическое занятие № 1,3,5

Многогранники. Призма.

Параллелепипед и его виды

Пирамида. Площадь поверхности и объём пирамиды.

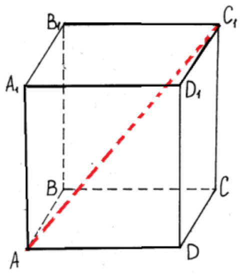
Цель занятия: *Закрепить и обобщить знания о выпуклых многогранниках, совершенствовать умения и навыки решения задач на нахождение элементов и площадей поверхностей многогранников.*

Контрольные вопросы.

1. Понятие многогранника, выпуклого многогранника.
2. Призма. Элементы призмы. Свойства призмы.
3. Параллелепипед. Свойства параллелепипеда. Куб.
4. Пирамида. Элементы пирамиды. Свойства пирамиды.

Примеры и последовательность выполнения заданий.

Задача 1



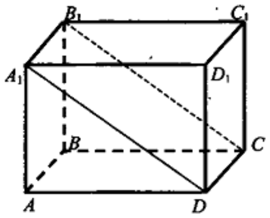
Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$-прямоугольный параллелепипед; AB=6см, AD=4см, AA_1=12см.

Найти: AC_1.

Решение: $AC_1=\sqrt{AB^2+AA_1{}^2+AD^2}=\sqrt{6^2+4^2+12^2}=\sqrt{196}=14(м)$

Ответ: 14м.

Задача 2



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$-прямоугольный параллелепипед; AB= 4м, AD= 3м, $S_{DCB_1A_1}$=20 м^2.

Найти: $S_{бок.}$

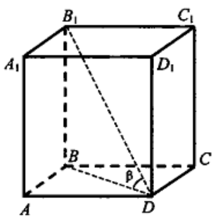
Решение: $S_{DA_1B_1C} = A_1D \cdot DC;$ $A_1D = \frac{S}{DC}$; *DC=AB=4(м),* A_1D*=20:4=5(м),* по теореме Пифагора $AA_1=\sqrt{A_1D^2 - AD^2}$;

$AA_1=\sqrt{5^2 - 3^2}$*=4(см);* $S_{бок.}=P_{осн} \cdot AA_1$; $P_{осн}=(AD+DC) \cdot 2=(3+4) \cdot 2=14$*см;*

$S_{бок.}=14 \cdot 4=56$ (см^2)

Ответ: 56см^2.

Задача 3



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$-куб; B_1D-диагональ куба; $\angle BDB_1 = \alpha$.

Найти: $tg\ \alpha$.

Решение: 1.Известно, что все ребра куба равны. Пусть $AB=AD=AA_1=a$.

2. ΔABD –прямоугольный. $BD^2=a^2+a^2=2a^2$; $BD=a\sqrt{2}$.

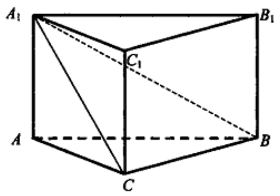
3.*BD*- проекция B_1Dна *ABCD*⟹угол между этими прямыми есть α.

4. В ΔB_1BD :$tg\ \alpha=\frac{B_1B}{BD}$, $tg\ \alpha = \frac{a}{a\sqrt{2}}$,$tg\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 4

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$лежит прямоугольныйΔABC ($\angle C= 90°$). Через сторону *BC* и вершину A_1проведена плоскость, $\angle BA_1C= 30°$, $A_1B = 10$; $AC = 5$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

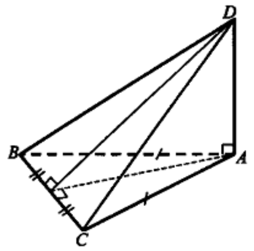


Решение:

1. $A_1C \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах)
2. $BC= \frac{1}{2}A_1B=5$.
3. $AB=5\sqrt{2}$.
4. $AA_1=\sqrt{100 - 50}=5\sqrt{2}$.
5. $S_{бок}=AA_1(AB+BC+AC)$; $S_{бок}=5\sqrt{2}(5\sqrt{2}+10)=50+50\sqrt{2}=50(1 + \sqrt{2})$

Ответ: $50(1+\sqrt{2})$.

Задача 5



Основанием пирамиды *DABC* является треугольник *ABC*, у которого *AB = AC = 13* см,
BC = 10 см, ребро *AD* перпендикулярно к плоскости основания и равно 9 см. Найдите площадь боковой поверхности.

Дано: DABC - пирамида; ΔABC - равнобедренный, *AB=AC= 13*см; *BC = 9* см; *AD⊥ADC, AD = 9* см.
Найти: $S_{бок}$,
Решение:
1. Проведем *AK⊥BC*, тогда *BC⊥DK (*по теореме о трех перпендикулярах*)*, т.е.*DK*-высота ΔDBC.
2. Из ΔABK получаем: К=$\sqrt{AB^2-BK^2}=\sqrt{169-25}$=$\sqrt{144}$=12 ($см$).
3. Из ΔDAK получаем: DK=$\sqrt{DA^2+AK^2}=\sqrt{81+144}$=$\sqrt{225}$=15 ($см$).
4. Из $\Delta ADB=\Delta ADC$(по двум катетам):$S_{бок}$=$2S_{\Delta ADB}+S_{\Delta BDC}$;
$S_{бок}$= 13·9+5·15=117+75=192($см^2$).

*Ответ:*192 $см^2$.

Выполните следующие задания:

Вариант I

1. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 6 см, а диагональ боковой грани 10 см. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.
2. Основание прямой призмы - ромб со стороной 5 см и тупым углом 120°. Боковая поверхность призмы имеет площадь 240 $см^2$. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.
3. Основание пирамиды - прямоугольник со сторонами 6 и 8 см. Высота пирамиды равна 12 см и проходит через точку пересечения диагоналей основания. Найдите боковые ребра пирамиды.
4. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 60°. Найдите боковое ребро пирамиды.

Вариант II

1. **1.** Боковое ребро правильной треугольной призмы равно 9 см, а диагональ боковой грани равна 15 см. Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.
2. **2.** Основание прямой призмы - ромб с острым углом 60°, Боковое ребро призмы равно 10 см, а площадь боковой поверхности - 240 см^2. Найдите площадь сечения призмы, проходящего через боковое ребро и меньшую диагональ основания.
3. **3.** Основание пирамиды - ромб с диагоналями 10 и 18 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей, ромба. Меньшее боковое ребро пирамиды равно 13 см. Найдите большее боковое ребро пирамиды.
4. **4.** Основанием пирамиды DABC является прямоугольный треугольник ABC, у которого гипотенуза AB равна 29 см, катет AC равен 21 см. Ребро DA перпендикулярно к плоскости основания и равно 20 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Практическое занятие № 2,4

Площадь поверхности и объём призмы.

Площадь поверхности и объём параллелепипеда

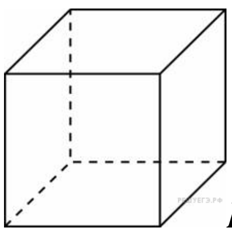
Цель занятия: *Закрепить и обобщить знания о выпуклых многогранниках, совершенствовать умения и навыки решения задач на нахождение элементов, площадейповерхностей и объемовмногогранников.*

Контрольные вопросы.

1. Понятие многогранника, выпуклого многогранника.
2. Призма. Элементы призмы. Свойства призмы.
3. Площадь полной и боковой поверхностей, объем призмы.
4. Параллелепипед. Свойства параллелепипеда. Куб.
5. Площадь полной поверхности и объем параллелепипеда.

Примеры и последовательность выполнения заданий.

Задача 1.Объем куба равен 8. Найдите площадь его поверхности.



Решение:

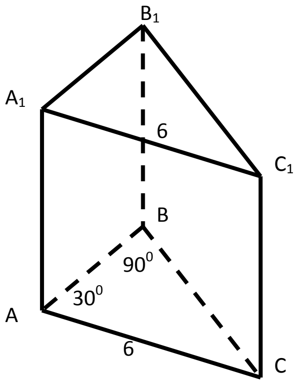
Площадь поверхности куба выражается через его ребро a как $S = 6a^2$, а объем — как $V = a^3$. Отсюда видно, что площадь поверхности куба выражается через его объем как $S = 6V^{\frac{2}{3}}$. Отсюда находим, что

$$S = 6 \cdot 8^{\frac{2}{3}} = 6 \cdot (2^3)^{\frac{2}{3}} = 6 \cdot 4 = 24.$$

Ответ:24.

Задача 2. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с углом 300. Гипотенуза этого треугольника равна боковому ребру и равна 6. Найти объем призмы.

Решение



1. $V = S_{осн} \cdot H$.
2. $V = S_{осн} \cdot 6$
3. $S_{осн}$- ?.$S_{осн} = ½ AB \cdot BC$
4. $BC = ½ AC = 3$;

$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{36-9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$S_{осн} = ½\ 3\sqrt{3} \cdot 3 = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

5. $V = \dfrac{9\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 27\sqrt{3}$

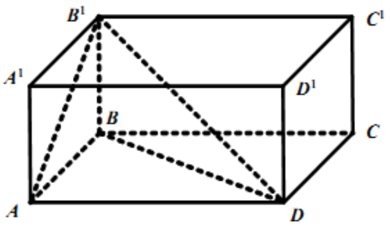
Ответ: $27\sqrt{3}$

Задача 3.Диагональ меньшей боковой грани прямоугольного параллелепипеда равна большему ребру основания. Высота параллелепипеда равна 2 см, диагональ основания равна 14 см. Найдите объем параллелепипеда.

Дано:$ABCDA_1B_1C_1D_1$-прямоугольный параллелепипед,

$AD>DC$, $AB_1=AD$, $BB_1=2$ *см*, $BD=14$*см*.

Найти:V



Решение: $B'D = \sqrt{BB'^2 + BD^2} =$

$\sqrt{2^2 + 14^2} = 10\sqrt{2}$ (см).

Чтобы найти большую ***диагональ параллелограмма****, можно воспользоваться общеизвестной формулой соотношения суммы квадратов двух диагоналей и удвоенной суммы квадратов длин сторон. Она является прямым следствием из свойств диагоналей*:

$d_1^2 + d_2^2 = 2\cdot(a^2 + b^2)$.

в нашей задачебольшая диагональ B_1D т.е. $2AD^2=B_1D^2$

$AD = \sqrt{\frac{1}{2} B'D^2} = 10$ (см) . $AB^2 + AD^2 = BD^2$;

$AB^2 = BD^2 - AD^2$; $AB = \sqrt{14^2 - 10^2} = 4\sqrt{6}$ (см).

$V_{\text{парал.}} = AB \cdot AD \cdot h = 4\sqrt{6} \cdot 10 \cdot 2 = 80\sqrt{6}$ (см^3).

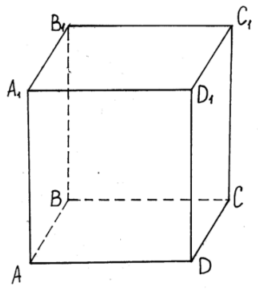
$\sqrt{6} \approx 2{,}45$ $\boldsymbol{V_{\text{парал.}} \approx 196}$ ***см^3.***

Ответ: $V_{\text{парал.}} \approx 196$ *см^3.*

Задача 4. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 24 см^3, площадь основания 12 см^2. Одна сторона основания в три раза больше другой. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$-прямоугольный параллелепипед, $V=24$*см^3*, $AD=3AB, S_{осн}=12$*см^2*

Найти: $S_П$



Решение: $S_П = S_{бок} + S_{осн}$

$S_П = 2(AB+AD) \cdot AA_1 + 2S_{осн}$

$V = S_{осн} \cdot h \quad \Rightarrow h = \frac{V}{S_{осн}}$,

$AA_1 = h = 24:12 = 2$

$S_{осн} = AB \cdot 3AB = 3AB^2 \quad \Rightarrow \quad 12 = 3AB^2$,

$AB^2 = 4$, $AB = 2$, $AD = 6$

$S_{бок} = 2 \cdot (6+2) \cdot 2 = 32$, $S_П = 32 + 2 \cdot 12 = 56$ *(см^2)*

Ответ: *56 см^2.*

Выполните следующие задания:

1 ВАРИАНТ

1. Площадь поверхности куба со стороной *a* равна 24. Найдите его объем.
2. Основание прямой призмы - прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если ее наибольшая боковая грань - квадрат.
3. Основание прямого параллелепипеда - ромб с диагоналями 10 и 24 см. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

2 ВАРИАНТ

1. Площадь поверхности куба со стороной *a* равна 96. Найдите его объем.

2. Основание прямой призмы - прямоугольный треугольник с гипотенузой 13 см и катетом
   12 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если ее наименьшая боковая грань - квадрат.
3. Основание прямого параллелепипеда - ромб с меньшей диагональю 12 см. Большая
   диагональ параллелепипеда равна $16\sqrt{2}$ см и образует с боковым ребром угол 45°. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

Практическая работа 8,9,10,11

Цилиндр. Площадь поверхности и объём цилиндра.

Конус. Площадь поверхности и объём конуса.

Усечённый конус. Площадь поверхности и объём усечённого конуса.

Шар и сфера. Сечение шара плоскостью. Площадь поверхности и объём шара и его частей.

Цель занятия: *Закрепить и обобщить знания о телах вращения; совершенствовать умения и навыки решения задач на нахождение элементов, объемов и площадей поверхностей тел вращения.*

Контрольные вопросы.

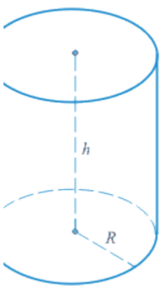
1. Конус. Площадь полной и боковой поверхности. Объем.
2. Цилиндр. Площадь полной и боковой поверхности. Объем.
3. Шар. Площадь поверхности и объем шара.

Краткие теоретические сведения

Обозначения:

V — объем;
$S_{полн}$ — площадь полной поверхности;
$S_{бок}$ — площадь боковой поверхности;
l — образующая конуса;
R — радиус;
D, d — диаметр;
h — высота.

Цилиндр

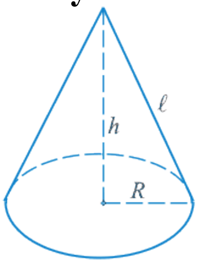


$$S_{бок} = 2\pi R \cdot h$$

$$S_{полн} = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot h$$

$$V = \pi R^2 h$$

Конус

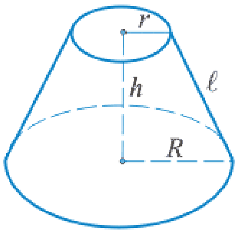


$$S_{бок} = \pi R \cdot \ell = \frac{1}{2}\pi \cdot d \cdot \ell$$

$$S_{полн} = \pi R(R+\ell)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Усеченный конус

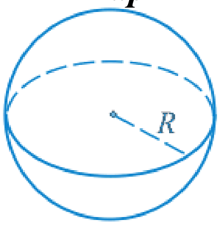


$$S_{бок} = \pi \cdot \ell \cdot (R+r) = \frac{1}{2}\pi(D+d)$$

$$S_{полн} = S_{бок} + \pi(R^2 + r^2)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h(R^2 + Rr + r^2)$$

Шар



$$S_{полн} = 4\pi \cdot R^2 = \pi \cdot d^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi \cdot d^3$$

Выполните следующие задания:

Вариант 1

1. Найдите площадь боковой поверхности тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника с катетами 4 см и 7 см, вокруг большего катета.*Ответ :* $4\sqrt{65}\pi$ *см*^{2}

2. Плоскость проходит на расстоянии 8 см от центра шара. Радиус сечения равен 15 см. Найдите площадь поверхности шара. *Ответ:36* π *см*^{3}
3. Высота конуса равна 5 см, а угол при вершине осевого сечения равен 120°. Найдите объем конуса. *Ответ:125*π *см*^{3}

4. Найдите объем тела, которое получено при вращении квадрата со стороной 7 см вокруг прямой, соединяющей середины противоположных сторон. *Ответ: 85,75* π *см*^{3}

5. Квадрат со стороной 3 см вращается вокруг своей диагонали. Найдите объем тела вращения. *Ответ:*$\frac{9\sqrt{2}}{2}\pi$ *см*^{3}

Вариант 2

1. Объем шара равен 36π см^2. Найдите площадь поверхности шара. *Ответ:1156* π *см*^{2}

2. Высота конуса равна 12 см, а его образующая равна 13 см. Найдите площадь полной поверхности конуса. *Ответ :* 90π *см*^{2}

3. Найдите объем тела, полученного при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом 6 см вокруг его оси симметрии. *Ответ:18*$\sqrt{2}\pi$ *см*^{3}

4. Квадрат со стороной 3 см вращается вокруг своей диагонали. Найдите площадь поверхности тела вращения тела вращения. *Ответ:9*$\sqrt{2}\pi$ *см*^{2}

5. Найдите объем тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 6 см и 10 см вокруг большей стороны. *Ответ:360*π *см*^{3}

Практическая работа №1-6, 8-11(дополнение)

Тема: Вычисление площади поверхностей и объемов тел.

Цель занятия: *Закрепить и обобщить знания о выпуклых многогранниках;*

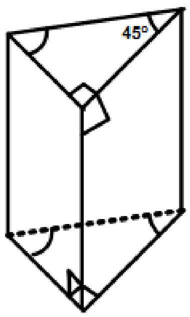
совершенствовать умения и навыки решения задач на нахождение элементов, объемов и площади поверхностей многогранников и тел вращения.

Контрольные вопросы.

1. Понятие многогранника.
2. Понятие тела вращения.
3. Параллелепипед. Площадь полной поверхности и объем параллелепипеда.
4. Призма. Площадь полной и боковой поверхностей, объем призмы.
5. Пирамида. Площадь полной и боковой поверхностей, объем пирамиды.
6. Цилиндр. Площадь полной и боковой поверхностей, объем цилиндра.
7. Конус. Площадь полной и боковой поверхностей, объем конуса.
8. Шар. Площадь полной и боковой поверхностей, объем шара.

Примеры и последовательность выполнения заданий.

Задача 1.Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетом 6 см и острым углом 45°. Объем призмы равен 108 см^3 . Найдите площадь полной поверхности призмы. Решение:



В основании лежит равнобедренный треугольник с

$$\angle = 90°;\ V = S_{осн.} \cdot H = \frac{1}{2}a^2 \cdot H \Rightarrow H = \frac{2V}{a^2}$$

$$H=\frac{2\cdot 108}{36}=6 \text{ см.} \quad S_{\text{пол.}}=2S_{\text{осн.}}+S_{\text{бок.}}=$$

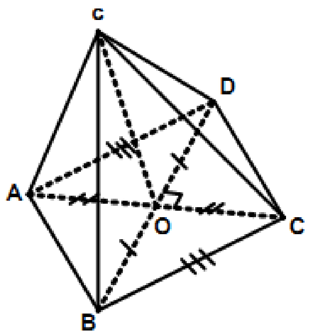
$$=\ a^2+2aH+\sqrt{a^2+a^2}\cdot H=a^2+2aH+\sqrt{2}aH=$$

$$=36+2\cdot 6\cdot 6+\sqrt{2}\cdot 6\cdot 6=36(3+\sqrt{2})\ \text{ см}^2.$$

Ответ: $\mathbf{36(3+\sqrt{2})}$*см*^{2}.

<u>Задача 2.</u> *Основание пирамиды — ромб с диагоналями 6 см и 8 см. Высота пирамиды опущена в точку пересечения его диагоналей. Меньшие боковые ребра пирамиды равны 5 см. Найдите объем пирамиды.*

Решение:



$$S_{\text{осн.}}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24\ (\text{см}^2);$$

$$SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=$$

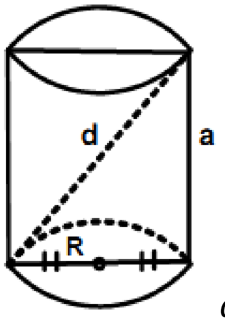
$$=\sqrt{SB^2-\left(\frac{BD}{2}\right)^2}=\sqrt{25-9}=4\ (\text{см});$$

$$V=\frac{1}{3}SO\cdot S_{\text{осн.}}=\ \frac{1}{3}\cdot 24\cdot 4=32\ (\text{см}^3)\ .$$

Ответ: *32см*^{3}.

<u>Задача 3.</u> *Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна 8√2 см. Найдите объем цилиндра.*

Решение:



$$d = \sqrt{2}a = 2\sqrt{2}R \Longrightarrow R = 4см \Longrightarrow h = 8см$$

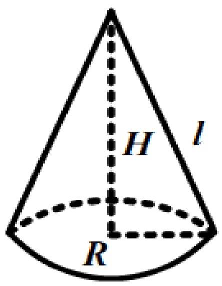
$$S_{осн} = \pi R^2 = 16\pi\ см^2$$

$$V = 16\pi \cdot 8 = 128\pi\ см^3.$$

Ответ: $128\pi\ см^3$

<u>Задача 4.</u> *Высота конуса равна 8 см, объем $24\pi\ см^3$. Найдите площадь полной поверхности конуса.*

Решение:



$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{8}{3}\pi R^2 = 24\pi \ \Rightarrow R = 3$$

$$S_{пол.} = \pi R(l + R) =$$

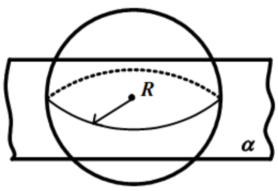
$$= \pi R(\sqrt{H^2 + R^2} + R) = \pi \cdot 3(\sqrt{64+9} + 3) =$$

$$= 3\pi(\sqrt{73} + 3)\ \ см^2$$

Ответ: $\mathbf{3\pi(\sqrt{73} + 3)}$*$см^2$.*

<u>Задача 5.</u> Площадь сечения шара плоскостью, проходящей через его центр, равна $4\ \pi\ см^2$. Найдите объем шара.

Решение:



$$S = \pi R^2 = 4\pi \Rightarrow R = 2\ (см);$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 8 = \frac{32}{3}\pi\ \ (см^3)$$

Ответ: $\mathbf{\frac{32}{3}\pi}$*$см^3$.*

Выполните следующие задания:

Вариант №1

1. Стороны основания прямого параллелепипеда 6см и 4см, угол между ними $45°$. Диагональ большей боковой грани 10см. Найдите площадь боковой и площадь полной поверхности параллелепипеда.
2. Основание прямой призмы – треугольник со сторонами 8см и 15см и углом между ними $60°$. Высота призмы 11см. Найдите площадь боковой и площадь полной поверхности призмы.
3. Найдите площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, если двугранный угол при стороне основания равен $30°$, а радиус окружности, описанной около основания, равен 2см.
4. Найдите объём правильной треугольной пирамиды, высота которой равна 12см и составляет с боковым ребром угол $45°$.
5. Основание прямой призмы – ромб со стороной 13см и одной из диагоналей равной 24см. Найдите объём призмы, если диагональ боковой грани 14см.
6. Развёртка боковой поверхности цилиндра является квадратом, диагональ которого равна 10см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
7. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу в $120°$. Высота цилиндра равна 5см, радиус цилиндра - $2\sqrt{3}$ см. Найдите площадь сечения.

Вариант №2

1. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб со стороной 12см и углом $60°$. Меньшая диагональ параллелепипеда 13см. Найдите площадь боковой и площадь полной поверхности параллелепипеда.
2. Основание прямой призмы – треугольник со сторонами 8см и 3см и углом между ними $60°$. Высота призмы 15см. Найдите площадь боковой и площадь полной поверхности призмы.
3. Найдите площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, если её апофема 4см, а угол между апофемой и высотой пирамиды равен $30°$.
4. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, боковое ребро которой равно 12см и образует с высотой угол $30°$.
5. Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелограмм ABCD. AB = 12см, AD = 15см, $\angle BAD = 45°$. Найдите объём призмы, если диагональ DC_1 боковой грани равна 13см.
6. Развёртка боковой поверхности цилиндра является прямоугольником, диагональ которого равна 8см, а угол между диагоналями - $30°$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
7. Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, есть квадрат. Эта плоскость отсекает от окружности основания дугу в $90°$. Радиус цилиндра равен 4см. Найдите площадь сечения.

Практическое занятие № 12,13,14,15,16

Понятие производной. Правила вычисления производных.

Производная степенной, логарифмической функций.

Производная тригонометрических функций.

Производная сложной функции.

Уравнение касательной.

Цель занятия: *Обобщить и систематизировать знания по теме «Производная»; закрепить умения использовать полученные знания для решения упражнений.*

Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте определение производной функции в точке.
2. В чем состоит геометрический смысл производной?
3. В чем состоит физический смысл производной?
4. Правила дифференцирования.
5. Формулы дифференцирования.
6. Уравнение касательной к графику функции.
7. Производные сложной и обратной функций.
8.

Примеры и последовательность выполнения заданий.

<u>Пример 1</u>

Найти производную функции $y = \ln\left(x^2 - 4x + 4\right)$

По свойству *дифференцирования сложной функции* вначале находим производную натурального логарифма и домножаем на производную подлогарифмической функции:

$$y' = \left(\ln\left(x^2 - 4x + 4\right)\right)' = \frac{1}{x^2 - 4x + 4} \cdot \left(x^2 - 4x + 4\right)'$$

Производная суммы равна сумме производных и константу можно выносить за знак производной, поэтому имеем:

$$y' = \frac{1}{x^2 - 4x + 4} \cdot \left[\left(x^2\right)' - (4x)' + (4)'\right]$$

$$y' = \frac{1}{x^2 - 4x + 4} \cdot \left[2x - 4\,(x)' + 0\right]$$

$$y' = \frac{1}{x^2 - 4x + 4} \cdot (2x - 4)$$

$$y' = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 4}$$

Знаменатель дроби можно свернуть по *формуле квадрат разности*, а в числителе двойку вынесем как общий множитель за скобки:

$$y' = \frac{2(x-2)}{(x-2)^2}$$

сокращаем:

$y' = \dfrac{2}{x-2}$ ***Ответ.*** $y' = \dfrac{2}{x-2}$

<u>Пример 2</u>

Найдите значение производной функции $y = \frac{x}{x+1}$ *в точке* x_0=-2

Решение:

Найдем производную фукции:

$$y' = \frac{x + 1 - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Найдем значение $y'(x_0)$ при $x_0=-2$

$$y' = \frac{1}{(-2+1)^2} = 1$$

Ответ:1

<u>Пример 3</u>

Написать уравнение касательной к графику функции y=f(x) в точке с абсциссой x_0 :

а) $f(x)=x^2+x+1, x_0=1$

Решение:

а) $f(x_0)=1^2+1+1=3$

$f'(x)=2x+1$

$f'(x_0)=2\cdot 1+1=3$

Т.к. $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ уравнение касательной,то получим:

$y=3+3(x-1)$, $y=3+3x-3$, $y=3x$

Ответ: $y=3x$

б) $f(x)=\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$

$f(x_0)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f'(x)=\cos x$

$f'(x_0)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Т.к. $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ уравнение касательной,то получим:

$y=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}\pi}{8}$

Ответ: $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}\pi}{8}$

<u>Пример 4</u>

Материальная точка движется прямолинейно по закону $\frac{1}{3}t^3-3t^2-5t+3$, где $x(t)$ — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?

Решение.

Найдем производную функции $\frac{1}{3}t^3-3t^2-5t+3$:

$x'(t)=t^2-6t-5$

По условию, скорость точки равна 2 м/с, значит, значение производной в момент времени t_0 равно 2.

Получаем уравнение:

$x'(t_0)=t_0^2-6t_0-5=2$

Решим его:

$t_0^2-6t_0-5=2$, $t_0^2-6t_0-5-2=0$, $t_0^2-6t_0-7=0$

$t_1=7$, $t_2=-1$ – не подходит по смыслу задачи: время не может быть отрицательным.

Ответ: *7*

Выполните следующие задания:

1 ВАРИАНТ

Задание 1. ***Найдите производную функции***

1) $y = 12x^2 - \sqrt{x}$
2) $y = 3\sin x + 4x^3$
3) $y = \frac{3}{x} - 4\cos x$
4) $y = 3x^5 - 8x^{10}$
5) $y = x^3 + 4x^2 - \frac{5}{x^2}$
6) $y = x(x^3 + 4x^2 - 1)$
7) $y = \frac{x^5 + 4x^4 - 1}{x^2}$
8) $y = x\sin x$
9) $y = (x^2 + 4x - 1)^6$
10) $y = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$

Задание 2. ***Найдите значение производной функции***

а) $y=\sin(4x-\frac{\pi}{6})$ в точке $x_0=\frac{\pi}{12}$

б) $y=\ln(2-x)$ в точке $x_0=-1$

в) $y=e^{2x-1}$ в точке $x_0=\frac{1}{2}$

г) $y=\sqrt{2x+5}$ в точке $x_0=2$

Задание 3. ***Написать уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой*** x_0:

а) $y=x^2-2x$, $x_0=3$ **б)** $y=\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{6}$

Задание 4.

а) Тело движется по прямой так, что расстояние S до него от некоторой точки A этой прямой изменяется по закону $S = 0{,}5t^2 + 3t + 4$ (м), где t — время движения в секундах. Найдите скорость тела через *2 с* после начала движения.

б) Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)= x^3+2x^2-3x+7$, где $x(t)$— расстояние от точки отсчета в метрах, t— время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна *4 м/с*?

2 ВАРИАНТ

Задание 1. ***Найдите производную функции***

1) $y = 2x^3 - 4\sqrt{x}$
2) $y = 2\sin x + 3x^3$
3) $y = \frac{5}{x} - 7\cos x$
4) $y = 3x^{11} - 5x^4$
5) $y = x^4 - 6x + \frac{3}{x^2}$
6) $y = x(x^2 - 5x + 1)$
7) $y = \frac{x^3 - 5x^2 + 1}{x^2}$
8) $y = x\cos x$
9) $y = (x^3 - 5x + 1)^5$
10) $y = \sin(4x - \frac{\pi}{4})$

Задание 2. ***Найдите значение производной функции***

а) $y=\cos(4x-\frac{\pi}{6})$ в точке $x_0=\frac{\pi}{12}$

б) $y=\ln(3-x)$ в точке $x_0=-2$

в) $y=e^{3x-1}$ в точке $x_0=\frac{1}{3}$

г) $y=\sqrt{3x+10}$ в точке $x_0=2$

Задание 3. ***Написать уравнение касательной к графику функции в точке с абсциссой*** x_0:

а)$y=x^3+3x$, $x_0=3$ **б)**$y=\cos x$, $x_0=\dfrac{\pi}{3}$

Задание 4.
а)Тело движется по прямой так, что расстояние S до него от некоторой точкиA этой прямой изменяется по закону $S = 0{,}5t^2-5t+ 1$(м), где t — время движения в секундах. Найдите скорость тела через *4 с* после начала движения.
б)Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=2x^3-3x^2-10x+1$, где $x(t)$— расстояние от точки отсчета в метрах, t— время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна *2 м/с*?

Практическое занятие № 17, 18, 19

Признаки возрастания и убывания функции.

Критические точки функции, максимумы и минимумы

Применение производной к исследованию функции

Цель занятия: *Закрепить и обобщить умения и навыки исследования функций и построения графиков с помощью производной.*

Контрольные вопросы.Определение точки минимума и точки максимума.

1. Определение критической точки.
2. Необходимое условие, чтобы точка x_0 была точкой экстремума.
3. Алгоритм нахождения критических точек функции.
4. Определение стационарных точек.
5. Теорема Ферма (необходимое условие экстремума функции).
6. Достаточные условия существования экстремума функции .
7. Достаточный признак возрастания, убывания функции.
8. Алгоритм нахождения экстремумов функции.
9. Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.
10. Выпуклость функции. Точки перегиба.

Примеры и последовательность выполнения заданий.

СХЕМА ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ИНТЕРВАЛОВ МОНОТОННОСТИ И ЭКСТРЕМУМОВ

Этапы	**Пример** для функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$
Найти область определения функции	Обл. определения:R

и интервалы, на которых функция непрерывна.

Функция непрерывна во всей обл. определения

Найти производную $f'(x)$.

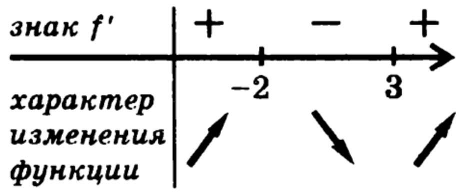
$f'(x)=6x^2-6x-36$

Найти критические точки, т.е. точки, в которых производная функции равна нулю или не существует.

$f'(x)=0,\ 6x^2-6x-36=0,$

$x_1=-2,\ x_2=3$

В каждом из интервалов, на которые область определения разбивается критическими точками, определить знак производной и характер изменения функции (с помощью достаточных условий монотонности).



Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.

$x=-2$ -точка максимума ($x_{max}=-2$)

$x=3$-точка минимума ($x_{min}=3$)

Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

$f(x)$ возрастает при $x \in(-\infty;\ -2)$ и при $x\in (3;\infty)$;

$f(x)$ убывает при $x\in (-2;\ 3)$;

$x_{max}=-2, y_{max}= f(-2) = 49$;

$x_{min}=3, y_{min}= f(3)= -76$

Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке

Функция, непрерывная на отрезке, достигает своего наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке либо в критических точках, принадлежащих отрезку, либо на его концах.

Примеры:

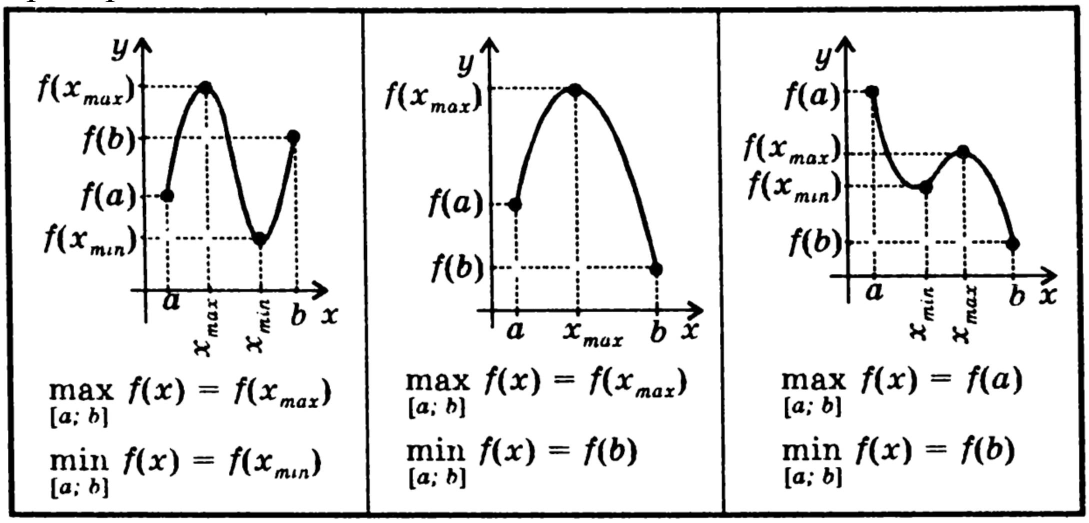


Схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке

Этапы	**Пример**
	для функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$ на отрезке [0; 4]
Найти производную $f'(x)$.	$f'(x)=6x^2-6x-36$
Найти на данном отрезке критические точки, т.е. точки, в которых $f'(x) = 0$ или не существует.	$f'(x) = 0$ при $x = -2$ и при $x = 3$. Отрезку [0; 4] принадлежит только одна критическая точка: $x = 3$.
Вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка.	$f(0)=5$ $f(3)=-76$ $f(4)=-59$
Из вычисленных значений выбрать наименьшее и наибольшее.	$\max_{[0;4]} f(x) = f(0) = 5$ $\min_{[0;4]} f(x) = f(3) = -76$

<u>ЗАДАНИЕ.</u> **Исследовать функцию** $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$ **и построить ее график.**

Решение.

1) **Область определения** – множество действительных чисел.
2) **Точки пересечения с осями координат**:

если x = 0, то y = 0 – точка *A (0,0);*

если y = 0, то решим уравнение $\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2=0$.

$$\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2=0 \Rightarrow x^2\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x}{3}-1\right)=0 \Rightarrow x^2=0 \text{ и } \quad \frac{x^2}{4}-\frac{x}{3}-1=0 \,\Big|\cdot 12$$

$x_1=0$ $3x^2-4x-12=0$

$$x_{2,3}=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot3\cdot(-12)}}{6}=\frac{4\pm4\sqrt{10}}{6}=\frac{2\pm2\sqrt{10}}{3}$$

$x_2=\frac{2+2\sqrt{10}}{3}\approx 2{,}8$ и $x_3=\frac{2-2\sqrt{10}}{3}\approx -1{,}4$

Получили еще две точки B ($\frac{2+2\sqrt{10}}{3}$; 0) и C ($\frac{2-2\sqrt{10}}{3}$; 0).

3) **Четность, нечетность**: $y(-x)=\frac{(-x)^4}{4}-\frac{(-x)^3}{3}-(-x)^2=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2$ - функция не является ни четной, ни нечетной.

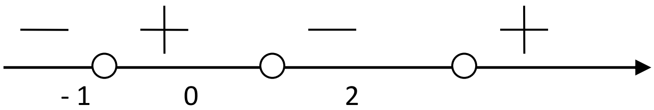
4) **Находим производную**.

$$y'=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\right)'=4\cdot\frac{x^3}{4}-3\cdot\frac{x^2}{3}-2x=x^3-x^2-2x=x(x^2-x-2)=x(x+1)(x-2)$$

.

5) **Стационарные точки.** Приравняем производную к нулю: $x(x+1)(x-2)=0$, получимх = -1, x = 0, x= 2 – стационарные точки.

6) **Промежутки возрастания и убывания.** Найденные точки разбивают



числовую прямую на четыре промежутка, определим знак производной на этих промежутках.

7) **Точки экстремума.**x = -1, x = 2 – точки минимума; x = 0 – точка максимума.

8) **Выпуклость и точки перегиба.**

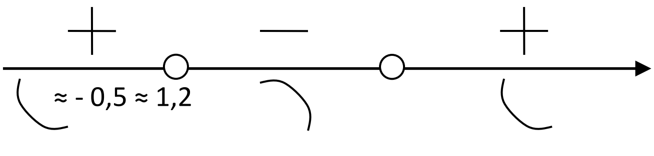
Найдем вторую производную: $y''=(x^3-x^2-2x)'=3x^2-2x-2$.

Найдем точки перегиба: $y''=0$;

$$3x^2-2x-2=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$$

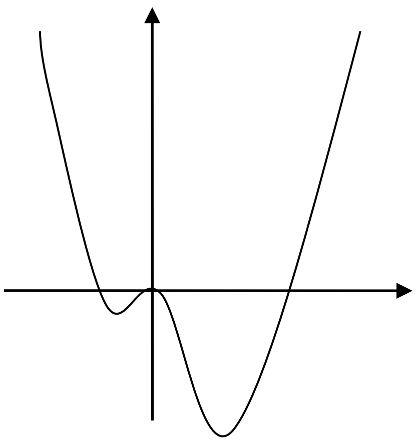
$x_1=\frac{1+\sqrt{7}}{3}\approx 1{,}2$ и $x_2=\frac{1-\sqrt{7}}{3}\approx -0{,}5$ - точки перегиба

Определим знак второй производной на интервалах:



9) **Составим таблицу.**

x	x < -1	- 1	– 1 <x< 0	0	0 <x< 2	2	x >2	3
f ‘(x)	-	0	+	0	-	0	+	
f(x)	↘	-5/12 min	↗	0 max	↘	-8/3 min	↗	9/4



Выполните следующие задания:

<u>1 ВАРИАНТ</u>

1. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $f(x)=x^3-3x^2-9x-4$.

2. Найти наименьшее и наибольшее значение функции на указанном промежутке

$f(x)=2x^3-9x^2-3$ на отрезке [–1; 4].

3.Исследовать функцию $y= -x^3+4x^2-4x$ **и построить ее график.**

<u>2 ВАРИАНТ</u>

1.Найти интервалы монотонности и экстремумы функции

$f(x)=x^3+7x^2-5x+2$.

2. Найти наименьшее и наибольшее значение функции на указанном промежутке

$f(x)=2x^3+3x^2+2$ на отрезке [–2; 1].

3. Исследовать функцию $y= x^3+6x^2+9x$ **и построить ее график.**

Практическое занятие № 21,22,23,24,25

Первообразная и её основное свойство. Таблица первообразных. Правила нахождения первообразных.

Нахождение первообразных функций.

Вычисление определённого интеграла

Площадь криволинейной трапеции

Нахождение площади криволинейной трапеции с помощью определённого интеграла.

Цель занятия: *Обобщение и систематизация знаний, полученных при изучении темы: «Первообразная. Определённый интеграл». Расширить представления о практическом значении данной темы.*

Контрольные вопросы.

1. Дайте определение первообразной.
2. Сформулируйте основное свойство первообразных.
3. В чем заключается геометрический смысл основного свойства первообразной?
4. Сформулируйте три правила нахождения первообразных.
5. Какую фигуру называют криволинейной трапецией?
6. Запишите формулу для вычисления площади криволинейной трапеции.
7. Объясните, что такое интеграл?
8. В чем заключается геометрий смысл интеграла?
9. Запишите формулу Ньютона- Лейбница.
10. Назовите несколько примеров применения определенного интеграла в геометрии и физике.
11. Какая связь существует между операциями дифференцирования и интегрирования?

Примеры и последовательность выполнения заданий.

Задание №1

Доказать, что функции $\frac{x^3}{3}$, $\frac{x^3}{3}+1$, $\frac{x^3}{3}-4$ являются первообразными функции $f(x) = x^2$.

▶ 1) Обозначим $F_1(x) = \frac{x^3}{3}$, тогда $F_1'(x) = 3 \cdot \frac{x^2}{3} = x^2 = f(x)$.

2) $F_2(x) = \frac{x^3}{3}+1$, $F_2'(x) = \left(\frac{x^3}{3}+1\right)' = x^2 = f(x)$.

3) $F_3(x) = \frac{x^3}{3}-4$, $F_3'(x) = \left(\frac{x^3}{3}-4\right)' = x^2 = f(x)$. ◁

Задание №2

Для функции $f(x) = x$ найти такую первообразную, график которой проходит через точку (2; 5).

▶ Все первообразные функции $f(x) = x$ находятся по формуле $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$, так как $F'(x) = x$. Найдем число C, такое, чтобы график функции $y = \frac{x^2}{2} + C$ проходил через точку (2; 5). Подставляя $x = 2$, $y = 5$, получаем $5 = \frac{2^2}{2} + C$, откуда $C = 3$. Следовательно, $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3$. ◁

Задание № 3 Вычислите определенный интеграл:

$$\int_1^4 (3\sqrt{x} + \frac{1}{x^3} - 4)dx$$

Решение:

$$\int_1^4 \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{x^3} - 4\right)dx = 3\int_1^4 \sqrt{x}dx + \int_1^4 x^{-3}dx - 4\int_1^4 dx = 3\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_1^4 + \left.\frac{x^{-2}}{-2}\right|_1^4 - 4x\Big|_1^4 =$$

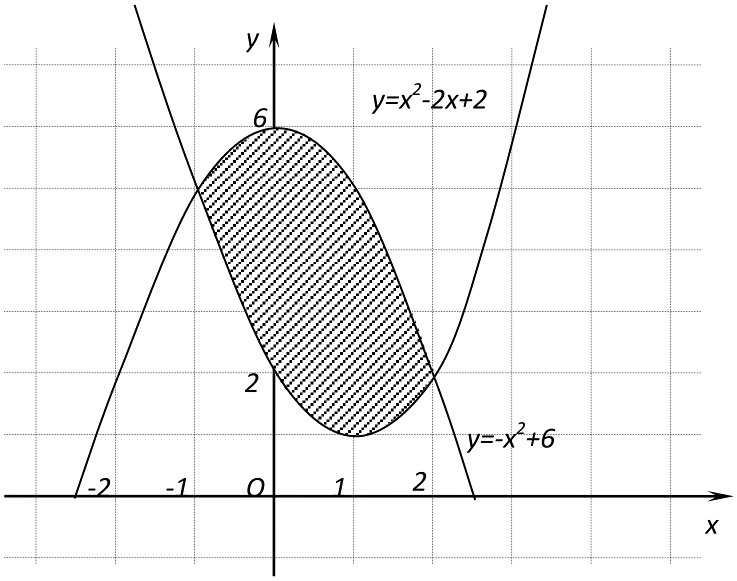
$$= 2\sqrt{x^3}\Big|_1^4 - \left.\frac{1}{2x^2}\right|_1^4 - 4x\Big|_1^4 = 2\left(\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3}\right) - \left(\frac{1}{2\cdot 4^2} - \frac{1}{2\cdot 1^2}\right) - 4(4-1) =$$

$$= 2(8-1) - \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{2}\right) - 4\cdot 3 = 14 + \frac{15}{32} - 12 = 2\frac{15}{32}.$$

Ответ: $2\frac{15}{32}$.

Задание №4Найдите площадь фигуры ограниченной параболами $y=x^2-2x+2$ и $y=-x^2+6$

Решение:



$$S = S_1 - S_2 = \int_{-1}^{2}(x^2+6)\,dx - \int_{-1}^{2}(x^2-2x+2)\,dx = \int_{-1}^{2}((-x^2+6)-(x^2-2x+2))dx =$$

$$\int_{-1}^{2}((-x^2+2)-(x^2-2x-2))\,dx = \int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)\,dx = \left(-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right)\Big|_{-1}^{2} =$$

$$-\frac{16}{3}+4+8-\left(\frac{2}{3}+1-4\right)=9\text{(кв. ед.)}$$

Ответ: 9 (кв.ед.)

Выполните следующие задания:

Вариант 1

1. Докажите, что ***F(x)*** – первообразная для функции ***f(x)*** на указанном промежутке, если:

а) $F(x)=\frac{x^2}{2}$, $f(x)=x$, $x \in (-\infty;+\infty)$;

б) $F(x)=x^{-2}-\frac{1}{3}$, $f(x)=-2x^{-8}$, $x \in (0;+\infty)$;

в) $F(x)=3\sqrt[4]{x^3}+\sqrt{2}$, $f(x)=\frac{9}{4\sqrt[4]{x}}$, $x \in (0;+\infty)$;

2. Для функции $\boldsymbol{f(x)=x^2}$ найдите первообразную,график которой проходит проходит через точку ***M (-1;2)***

3. Вычислите определенный интеграл:

а) $\int_0^1 (x+1)^5 dx$;б)$\int_\pi^{2\pi} \cos\frac{x}{6} dx$;в)$\int_0^1 \frac{4}{3x+2} dx$;г)$\int_{-3}^2 (2x-3)dx$;
д)$\int_{-3\pi}^0 \cos 3x\, dx$;е) $\int_1^3 3\sin(3x-6)\, dx$;ж) $\int_1^2 (x^2-6x+8)\, dx$.

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а)$y=x^2$, $x=1$, $x=3$, $y=0$;

б)параболой $y=(x+1)^2$,прямой $y=1-x$ и осью Ox;

в)параболой $y=x^2+1$ и прямой $y=3-x$

Вариант 2

1. Докажите, что ***F(x)*** – первообразная для ***f(x)*** на указанном промежутке, если:

а)$F(x)=\frac{x^7}{7}$, $f(x)=x^6$, $x \in (-\infty;+\infty)$;
б) $F(x)=2x^{-1}+\sqrt{5}$, $f(x)=-2x^{-2}$,$x \in (0;+\infty)$;
в)$F(x)=3\sqrt[4]{x}-\frac{1}{5}$, $f(x)=\frac{3}{4\sqrt[4]{x^3}}$, $x \in (0;+\infty)$;

2. Для функции $f(x)=x^3$ найдите первообразную,график которой проходит проходит через точку ***M (1;-1).***

3.Вычислите определенный интеграл:

а) $\int_2^3 (1-x)^4 dx$;б)$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})dx$;в)$\int_1^2 \frac{3}{2x-1} dx$;г)$\int_2^{-1} (5-4x)dx$;
д)$\int_{-2\pi}^{\pi} \sin 2x\, dx$;е) $\int_0^3 8\cos(4x-12)\, dx$;ж) $\int_2^1 (x^2+2x+3)\, dx$.

4.Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а)$y=x^3$, $x=1$, $x=3$, $y=0$;

б)параболой $y=4-x^2$,прямой $y=x+2$ и осью Ox;

в)параболой $y=(x+2)^2$ и прямой $y=x+2$

Практическое занятие № 28.
Событие и его виды. Вероятность события.

Цель: *научиться решать задачи на определение вероятности события.*

Оснащение занятия: учебник, конспект, справочник.

Порядок выполнения работы:

Задание 1. Закончите фразу:

1. Опыт, эксперимент, наблюдение явления называется ______________________.
2. Результат, исход испытания, называется__________________________________.
3. Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется____.
4. Событие, которое должно непременно произойти называется________________.
5. Событие, которое заведомо не может произойти называется_________________.

В каждом случае приведите пример.

Задание 2.

1. Запишите формулу классического определения вероятности и укажите смысл входящих в нее букв.
2. Назовите свойства вероятности события.
3. Рассмотрите решение задач 29 и 30 стр.260 (Н. В. Богомолов).
4. Выполните № 33, № 34.

Задание 3.

1. Какие события называются несовместными? совместными? противоположными?
2. Рассмотрите решение задач 31 и 32 стр. 261.
3. Выполните № 35, № 37 стр.262.

Контроль знаний студентов:

– проверить практическую работу;

– индивидуальные вопросы по работе.

Литература: Богомолов Н. В. Практические занятия по математике.

Практическое занятие № 29.
Сложение и умножение вероятностей.

Цели:

– *научиться применять теорему сложения вероятностей при решении задач;*

– *научиться применять теорему умножения вероятностей при решении задач;*
– *научиться применять формулу Бернулли.*

Оснащение занятия: учебник, конспект, справочник.

Порядок выполнения работы

Задание 1.

1. Запишите теорему сложения вероятностей несовместных событий.
2. Как обозначают событие, противоположное событию А?
3. Рассмотрите решение задачи 38 стр.263.
4. Выполните № 40 стр. 263.

Задание 2.

1. Запишите теорему сложения вероятностей совместных событий.
2. Рассмотрите решение задачи 39 стр.263.
3. Выполните № 42 стр.264.

Задание 3.

1. Запишите теоремы умножения вероятностей независимых и зависимых событий.
2. Рассмотрите решение задач 43 и 44 стр. 264.
3. Выполните № 46.

Задание 4.

1. Какие испытания называются независимыми относительно события А?
2. Запишите формулу Бернулли. Где она применяется?
3. Рассмотрите решение задачи 54 стр.267.
4. Выполните № 55, № 56 стр.267.

Контроль знаний студентов:

– проверить практическую работу.
– индивидуальные вопросы по работе.

Список рекомендуемой литературы

Основная литература по всем разделам:

1. Колмогоров А.Н., Абрамов А.М. «Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс.», М., « Просвещение», 2015
2. Погорелов «Геометрия 10-11 класс», М., « Просвещение», 2015

Дополнительная литература:

1. Богомолов Н.В., Самойленко П.И. «Математика», М: Дрофа, 2014 г.,
2. Башмаков М.И. «Математика», учебник для 10 кл. (базовый уровень). М: Издательский центр «Академия»», 2014 г.
3. Башмаков М.И. «Математика», учебник для 11 кл. (базовый уровень). М: Издательский центр «Академия»», 2014 г.
4. Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений нач. и сред.проф. образования. – М.: Издательский центр «Академия», 2015

5. Яковлев Г.Н. «Алгебра и начала анализа», часть 1. М: Наука, 2014 г.
6. Атанасян Л.С. «Геометрия», учебник для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений. М: Просвещение, 2015 г..
7. Колягин Ю.М. и др. «Алгебра и начала математического анализа», учебник для 10 кл. общеобразовательных учреждений. М: Просвещение, 2014 г.
8. Колягин Ю.М. и др. «Алгебра и начала математического анализа», учебник для 11 кл. общеобразовательных учреждений. М: Просвещение, 2014 г.

9. Калинина В.Н., Панкин В.Ф. «Математическая статистика». М: Высшая школа, 2015 г.
10. Афанасьева О.Н., Бродский Я.С., Гуткин Н.И., Павлов А.Л. Сборник задач по математике для техникумов на базе средней школы. М: Наука, 2014 г.
11. Афанасьева О.Н., Бродский Я.С Дидактические материалы по математике. М: Высшая школа, 2014 г.
12. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. М: Высшая школа, 2014 г.
13. Валуце Н.И., Дилигул Т.Д. Математика для техникумов на базе средней школы. М: Наука, 2014 г.
14. Омельченко В.П., Курбатова Э.В. «Математика» Ростов н/Д: Феникс, 2015 г.