

**Департамент образования Вологодской области  
бюджетное профессиональное образовательное учреждение  
Вологодской области  
«ВОЛОГОДСКИЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**  
к практическим работам  
по дисциплине ОП.02. Техническая механика

Специальность 08.02.01 «Строительство и эксплуатация зданий и сооружений»

2017 г.

Рассмотрено на заседании предметной цикловой комиссии общепрофессиональных, специальных дисциплин и дипломного проектирования по специальностям 08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений, 08.02.07 Монтаж и эксплуатация внутренних сантехнических устройств, кондиционирования воздуха и вентиляции, 43.02.08 Сервис домашнего и коммунального хозяйства.

Данные методические указания предназначены для студентов специальности 08.02.01.Строительство и эксплуатация зданий и сооружений (базовая подготовка) БПОУ ВО «Вологодский строительный колледж» при выполнении практических работ.

В методических указаниях рассмотрены особенности организации практических работ; задания для практических работ по разделам

Раздел 1. Теоретическая механика

Раздел 2 Основы сопротивления материалов

Раздел 3 Статика сооружений

Объем практических работ по дисциплине составляет **70** часов.

Перечень практических работ соответствует содержанию программы дисциплины ОП.02. Техническая механика. Практическая работа студентов позволяет закрепить теоретические знания, сформировать навыки, повышает интеллектуальный уровень обучающихся, формирует умение самостоятельно находить нужную информацию, систематизировать, обобщать, что необходимо для профессиональной подготовки будущего специалиста. Навыки практической работы помогут студентам на старших курсах при выполнении и оформлении курсовых и дипломных проектов.

Методические указания могут быть рекомендованы к использованию студентами и преподавателями БПОУ ВО «Вологодский строительный колледж».

Автор: Калинина ЕЛ, преподаватель БПОУ ВО «Вологодский строительный колледж»

## СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
ВВЕДЕНИЕ	4
КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ВЫПОЛНЕНИЯ СТУДЕНТОМ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ	5
ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ОБУЧАЮЩИХСЯ	7
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	11
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ	12
ПРИЛОЖЕНИЯ	104

## **ВВЕДЕНИЕ**

Методические указания по организации и выполнению практических работ по дисциплине ОП.02. Техническая механика для студентов специальности 08.02.01.Строительство и эксплуатация зданий и сооружений (базовая подготовка) по оказанию методической помощи при подготовке и оформлении практических работ.

В данных методических указаниях приведена методика по организации и выполнению практических работ, а также основные теоретические положения и формулы с примерами решения задач по темам, рекомендуемая литература.

В приложениях содержится необходимый справочный материал.

## КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ВЫПОЛНЕНИЯ СТУДЕНТОМ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

№	Оцениваемые умения	Метод оценки	Граничные критерии оценки	
			отлично	неудовлетворительно
1	2	3	4	5
1.	Отношение к работе.	Наблюдение руководителя, просмотр материалов.	Все материалы представлены в указанный срок, не требуют дополнительного времени на завершение.	В отведенное для работы время не уложился.
2.	Способность выполнять вычисления и построения эюр.	Просмотр материалов.	Четко выполняет вычисления и построения эюр.	Не способен использовать даже простейшие арифметические действия для получения конкретного результата.
3.	Использование всего доступного оборудования.	Просмотр материалов, технологический контроль.	Грамотно работает с приборами, соблюдает все правила и приемы работы, техники безопасности.	Не способен без помощи преподавателя выполнять основные операции с приборами. Нет твердых знаний основных частей и правил работы.

4.	Умение использовать полученные ранее знания и навыки для решения конкретных задач.	Наблюдения, руководителем, просмотр материалов .	Без дополнительных пояснений и указаний использует навыки и умения, полученные при изучении дисциплин: «Математика» и «Инженерная графика».	Не способен использовать знания из одного раздела при решении задач разделов смежных дисциплин.
5.	Оформление работы.	Просмотр материалов .	Все материалы, расчеты, построения оформлены согласно требованиям и на высоком уровне.	Работа оформлена в высшей степени небрежно. Демонстрируемые вычисления и построения приводят к ошибкам.
6.	Умение отвечать на вопросы, пользоваться профессиональной лексикой .	Собеседование.	Грамотно отвечает на вопросы обосновывает свою точку зрения по проблеме. Четко видит цель.	Показывает незнание предмета при ответе на вопросы.

## ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ОБУЧАЮЩИХСЯ

№ п/п	Тема программы	Форма задания	Кол-во часов
1	<b>Тема 1.2.</b> Плоская система сходящихся сил	Практическая работа №1 «Определение усилий в стержнях кронштейна аналитическим способом».	2
2		Практическая работа №2» Определение усилий в стержнях кронштейна графическим способом».	2
3	<b>Тема 1.3.</b> Момент силы относительно точки. Пара сил	Практическая работа №3» Определение суммы моментов сил относительно точки»	2
4	<b>Тема 1.4.</b> Плоская система произвольно расположенных сил	Практическая работа №4 «Определение опорных реакций простой балки на двух опорах»	2
5		Практическая работа №5 «Определение опорных реакций консольной балки на двух опорах»	2
6		Практическая работа №6 «Определение опорных реакций простой статически определимой рамы»	2
7	<b>Тема 1.5.</b> Центр тяжести тела. Центр тяжести плоских фигур	Практическая работа №7 «Определение центра тяжести сечения, составленного из простых геометрических фигур»	2
8		Практическая работа №8» Определение центра тяжести сечения, составленного из стандартных прокатных профилей».	2
9		Практическая работа № 9 «Решение задач на определение центра тяжести сложных сечений»	2

10	<b>Тема 2.2.</b> Растяжение и сжатие	Практическая работа №10 «Построение эпюр продольных сил и нормальных напряжений стального ступенчатого бруса, защемленного одним концом».	2
11		Практическая работа №11 «Определение абсолютного удлинения стального ступенчатого бруса, защемленного одним концом».	2
12		Практическая работа №12 «Подбор сечения шарнирно-стержневой конструкции из условия прочности по предельному состоянию».	2
13	<b>Тема 2.4.</b> Геометрические характеристики плоских сечений	Практическая работа №13 «Определение главных центральных моментов инерции сечения, состоящего из простых геометрических фигур».	2
14		Практическая работа №14 «Определение главных центральных моментов инерции сечения, состоящего из стандартных прокатных профилей».	2
15	<b>Тема 2.5.</b> Поперечный изгиб прямого бруса	Практическая работа №15 «Построение эпюр поперечных сил по длине балки».	2
16		Практическая работа №16 «Построение эпюр поперечных сил по длине балки».	2
17		Практическая работа №17 «Построение эпюр изгибающих моментов по длине балки».	2
18		Практическая работа №18 «Построение эпюр изгибающих	2



		моментов по длине балки».	
19		Практическая работа №19 «Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов по длине балки».	2
20		Практическая работа №20 «Подбор сечения балки из условия прочности по нормальным и касательным напряжениям».	2
21		Практическая работа №21 «Подбор сечения стальной двутавровой балки из условий прочности и жесткости».	2
22	<b>Тема 2.7</b> Устойчивость центрально сжатых стержней	Практическая работа №18 «Подбор сечения центрально сжатой стальной стойки с использованием коэффициента продольного изгиба».	2
23	<b>Тема 3.3.</b> Многопролетные статически определимые (шарнирные) балки	Практическая работа №23 «Расчет шарнирной балки с построением схемы взаимодействия элементов».	2
24		Практическая работа №24 «Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов в многопролётной статически определимой (шарнирной) балке».	2
25	<b>Тема 3.4.</b> Статически определимые плоские рамы	Практическая работа №25 «Построение эпюр поперечных сил и продольных сил для простой статически определимой рамы».	2
26		Практическая работа №26 «Построение эпюр изгибающих моментов для простой статически определимой рамы».	2
27	<b>Тема 3.5.</b> Статически	Практическая работа №27 «Определение усилий в стержнях	2

	определимые плоские фермы	фермы аналитическим способом»	
28		Практическая работа №28 «Определение усилий в стержнях фермы путём построения диаграммы Максвелла- Кремоны».	2
29	<b>Тема 3.7.</b> Основы расчёта статически неопределимых систем методом сил	Практическая работа №29 «Применение метода сил к расчёту один раз статически неопределимой рамы».	2
30		Практическая работа №30 «Построение эпюр Q, M, N для один раз статически неопределимой рамы».	2
31	<b>Тема 3.8.</b> Неразрезные балки	Практическая работа №31 «Применение уравнения трех моментов к расчету неразрезных балок».	2
32		Практическая работа №32 «Построение эпюр изгибающих моментов, поперечных сил в характерных точках и определение опорных реакций для неразрезной балки».	2
33-35	Контрольная работа №1-№3		6
<b>Итого:</b>			<b>70</b>

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лукьянов А.М. Техническая механика [Электронный ресурс]: учебник/ Лукьянов А.М., Лукьянов М.А.— Электрон. текстовые данные.— М.: Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте, 2014.— 712 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/45321.html>.— ЭБС «IPRbooks»
2. Сетков В.И. Техническая механика для строительных специальностей Академия, 2015
3. Евтушенко С.И. Техническая механика Академия, 2013
4. Ганджунцев М.И. Техническая механика. Часть 1. Сопротивление материалов [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Ганджунцев М.И., Петраков А.А., Портаев Л.П.— Электрон. текстовые данные.— М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2014.— 200 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/30364.html>.— ЭБС «IPRbooks»
5. Завьялова О.Б. Техническая механика [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие для выполнения контрольных работ для студентов заочного обучения всех специальностей/ Завьялова О.Б., Синельщикова О.Н.— Электрон. текстовые данные.— Астрахань: Астраханский инженерно-строительный институт, ЭБС АСВ, 2014.— 61 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/60801.html>.— ЭБС «IPRbooks»
6. Кривошапко С.Н. Техническая механика [Электронный ресурс]: конспект лекций/ Кривошапко С.Н.— Электрон. текстовые данные.— М.: Российский университет дружбы народов, 2013.— 64 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/22222.html>.— ЭБС «IPRbooks»
7. Техническая механика. Сопротивление материалов. (Теория и практика) [Электронный ресурс]: учебное пособие/ А.М. Бахолдин [и др.].— Электрон. текстовые данные.— Воронеж: Воронежский государственный университет инженерных технологий, 2013.— 173 с.— Режим

доступа: <http://www.iprbookshop.ru/47458.html>.— ЭБС «IPRbooks»

8. Кальмова М.А. Техническая механика [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие/ Кальмова М.А., Муморцев А.Н., Ахмедов А.Д.— Электрон. текстовые данные.— Самара: Самарский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2016.— 144 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/58836.html>.— ЭБС «IPRbooks»
9. Лукьянов А.М. Сборник задач по сопротивлению материалов. Книга 1 [Электронный ресурс]/ Лукьянов А.М., Лукьянов М.А.— Электрон. текстовые данные.— М.: Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте, 2016.— 260 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/58007.html>.— ЭБС «IPRbooks»
10. Васильчикова З.Ф. Техническая механика [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие/ Васильчикова З.Ф., Кальмова М.А., Муморцев А.Н.— Электрон. текстовые данные.— Самара: Самарский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2015.— 178 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/49896.html>.— ЭБС «IPRbooks»

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ**

Методические указания для студентов специальности 08.02.01 Строительство и эксплуатация зданий и сооружений (базовая подготовка) предназначены, по оказанию методической помощи студентам при подготовке и оформлении практических работ.

Рекомендации к оформлению:

1. Практическая работа и номер практической работы;
2. Название практической работы;
3. Условие задачи;
4. Исходные данные;
5. Расчетная схема с соблюдением размеров (масштаб задается студентом), на расчетной схеме все буквенные обозначения имеют численные значения и единицы измерения;
6. Решение задачи с пояснениями;
7. Ответ.

**При выполнении практической работы необходимо  
придерживаться следующего алгоритма:**

1. Проработайте теоретический материал по данной теме.
2. Выберите примеры решения задачи, соответствующие вашей теме.
3. Проработайте данный материал.
4. Решите задачу, опираясь на примеры.
5. Оформите и сдайте преподавателю для проверки.

## Практическая работа №1 по теме «Плоская система сходящихся сил»

### Определение усилий в стержнях кронштейна аналитическим способом»

**Цель работы:** научиться определять усилия в стержнях кронштейна аналитическим способом.

#### Методические указания:

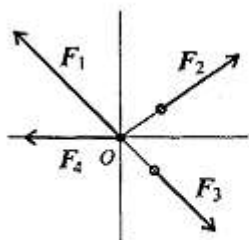


Рис. 1

Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется *сходящейся* (рис. 1).

Необходимо определить равнодействующую системы сходящихся сил ( $F_1; F_2; F_3; \dots; F_n$ ),  $n$  — число сил, входящих в систему.

По следствию из аксиом статики, все силы системы можно переместить вдоль линии действия, и все силы окажутся приложенными в одной точке.

#### Проекция силы на координатные оси

Величина проекции силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между вектором силы и положительным направлением оси. Таким образом, проекция имеет знак: *положительный* при одинаковом направлении вектора силы и оси и *отрицательный* при направлении в сторону отрицательной полуоси (рис. 2).

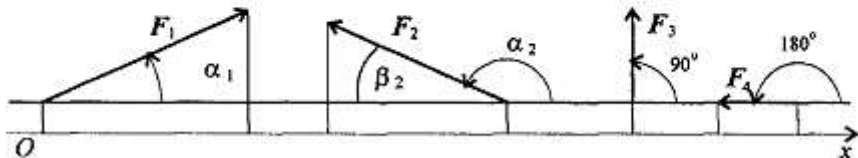


Рис. 2

$$F_{1x} = F_1 \cos \alpha_1 > 0; \quad F_{2x} = F_2 \cos \alpha_2 = -F_2 \cos \beta_2;$$

$$\cos \alpha_2 = \cos(180^\circ - \beta_2) = -\cos \beta_2$$

$$F_{3x} = F_3 \cos 90^\circ = 0; \quad F_{4x} = F_4 \cos 180^\circ = -F_4.$$

Проекция силы на две взаимно перпендикулярные оси (рис. 3).

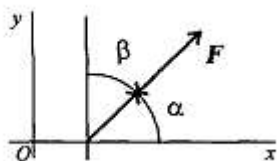


Рис. 3

$$F_x = F \cos \alpha > 0;$$

$$F_y = F \cos \beta = F \sin \alpha > 0.$$

### Условия равновесия плоской системы сходящихся сил в аналитической форме

Исходя из того, что равнодействующая равна нулю, получим:

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2} \Rightarrow \begin{cases} F_{\Sigma x} = \sum F_{kx} = 0; \\ F_{\Sigma y} = \sum F_{ky} = 0. \end{cases}$$

$$F_{\Sigma} = 0.$$

Условия равновесия в аналитической форме можно сформулировать следующим образом:

*Плоская система сходящихся сил находится в равновесии, если алгебраическая сумма проекций всех сил системы на любую ось равна нулю.*

Система уравнений равновесия плоской сходящейся системы сил:

$$\begin{cases} \sum_0^n F_{kx} = 0; \\ \sum_0^n F_{ky} = 0. \end{cases}$$

В задачах координатные оси выбирают так, чтобы решение было наиболее простым. Желательно, чтобы хотя бы одна неизвестная сила совпадала с осью координат.

**Пример 1.** Определить величину и направление реакций связей для схемы, приведенной на рис. 1, а под действием груза  $G = 30$  кН. Проверить правильность определения реакций.

**Решение.** 1. В задаче рассматривается равновесие тела, опирающегося на плоскость и подвешенного на нити. *Заменим тело точкой  $O$ , совпадающей с центром тяжести.*

2. *Приложим к точке  $O$  активную силу, которой является собственный вес тела  $G$ .* Направим ее вниз (рис. 1, б).

3. *Мысленно отбросим связи — плоскость и нить.* Заменим их действие на точку  $O$  реакциями связей. Реакция плоскости (обозначим ее  $R$ ) проходит по нормали к плоскости в точке  $A$ , а реакция или усилие в нити (обозначим ее  $S$ ) — по нити от точки. Обе реакции и вес тела или линии их действия должны пересекаться в точке  $O$ .

Изобразим действующие силы в виде системы трех сходящихся сил на отдельном чертеже (рис. 1, в).

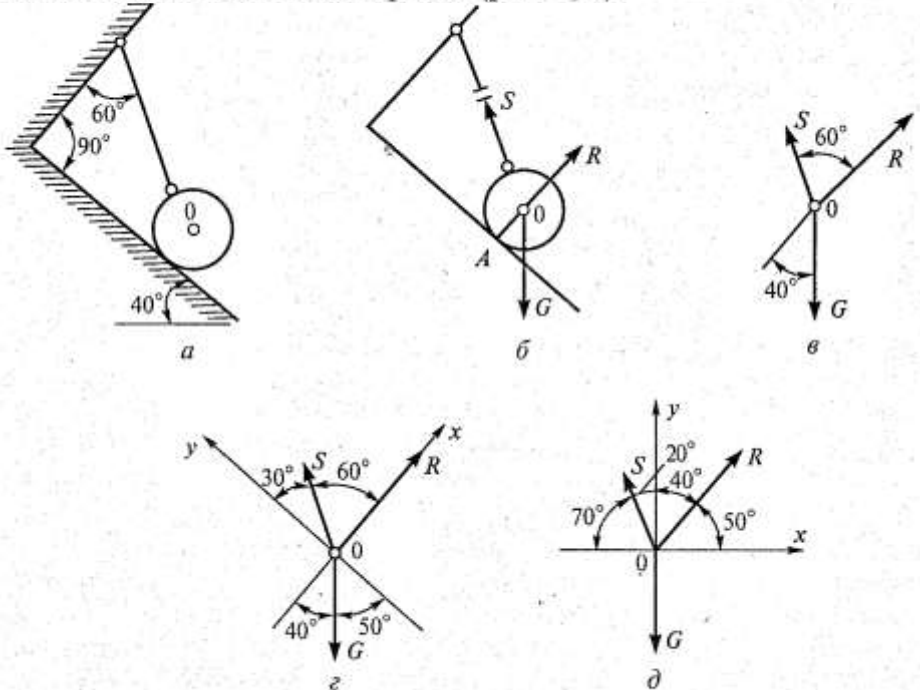


Рис. 1



4. *Выберем положение системы координат.* Начало координат совмещаем с точкой 0. Ось  $x$  совмещаем с направлением линии действия реакции  $R$ , а ось  $y$  направим перпендикулярно оси  $x$  (рис. 1,  $\varepsilon$ ). Определим углы между осями координат и реакциями  $R$  и  $S$ . Обычно рис. 1,  $b$  и 1,  $\nu$  не выполняют отдельно, а сразу от рис. 1,  $a$  переходят к рис. 1,  $\varepsilon$ . Можно было ось  $y$  совместить с усилием  $S$ , и ось  $x$  направить по углом  $90^\circ$ , тогда решение было бы другим.

5. *Составим сумму проекций всех сил на оси координат:*

$$1) \sum X = R + S \cos 60^\circ - G \cos 40^\circ = 0;$$

$$2) \sum Y = S \cos 30^\circ - G \cos 50^\circ = 0.$$

Решим систему уравнений. Из второго уравнения находим

$$S = \frac{G \cos 50^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{30 \cdot 0,643}{0,866} = 22,27 \text{ кН.}$$

Из первого уравнения находим

$$R = G \cos 40^\circ - S \cos 60^\circ = 30 \cdot 0,766 - 22,27 \cdot 0,5 = 11,84 \text{ кН.}$$

6. *Проверим решение*, для чего расположим оси координат, как показано на рис. 1,  $\delta$ . Составим уравнения равновесия для вновь принятых осей:

$$1) \sum X = R \cos 50^\circ - S \cos 70^\circ = 0;$$

$$2) \sum Y = R \cos 40^\circ + S \cos 20^\circ - G = 0.$$

Решим систему уравнений способом подстановки.

Из первого уравнения найдем  $R$ :

$$R = S \frac{\cos 70^\circ}{\cos 50^\circ}.$$

Подставим это выражение во второе уравнение:

$$S \frac{\cos 70^\circ}{\cos 50^\circ} \cos 40^\circ + S \cos 20^\circ - G = 0,$$

откуда

$$S = \frac{G}{\frac{\cos 70^\circ}{\cos 50^\circ} \cos 40^\circ + \cos 20^\circ} = \frac{30}{\frac{0,342}{0,643} \cdot 0,766 + 0,94} = 22,27 \text{ кН.}$$

Теперь найдем  $R$ :

$$R = 22,27 \frac{0,342}{0,643} = 11,84 \text{ кН.}$$

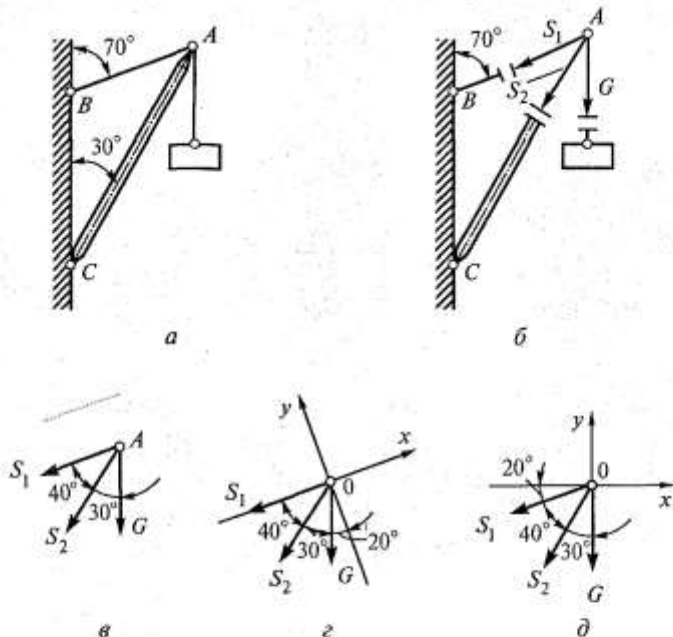


Рис. 2

Очевидно, что при расположении осей, как показано на рис. 1, д, вычисления оказались более сложными.

Ответ:  $R = 11,84$  кН;  $S = 22,27$  кН.

**Пример 2.** Определить усилия в нити и стержне кронштейна, показанного на рис. 2, а, если  $G = 20$  кН.

**Решение.** 1. Рассмотрим равновесие точки  $A$  (или узла  $A$ ), в которой сходятся все стержни и нити.

2. Активной силой является вес груза  $G$ , направленный вниз (рис. 2, б).

3. Отбросим связи: стержень и нить. Усилие в нити обозначим  $S_1$  и направим от точки  $A$ , так как нить может испытывать только растяжение. Усилие в стержне обозначим  $S_2$  и тоже направим от точки  $A$ , предполагая что стержень  $AC$  растянут (рис. 2, б).

Выполним на отдельном чертеже схему действия сил в точке  $A$  (рис. 2, в).

4. Выберем положение системы координат. Начало координат совмещаем с точкой  $A$  (рис. 2, г). Ось  $x$  совмещаем с линией действия усилия  $S_1$ , а ось  $y$  располагаем перпендикулярно оси  $x$ . Укажем углы между осями координат и усилиями  $S_1$  и  $S_2$ .

5. Составим уравнения равновесия:

$$1) \sum X = -S_1 - S_2 \cos 40^\circ - G \cos 70^\circ = 0;$$

$$2) \sum Y = -S_2 \cos 50^\circ - G \cos 20^\circ = 0.$$

Из второго уравнения находим

$$S_2 = -G \frac{\cos 20^\circ}{\cos 50^\circ} = -\frac{20 \cdot 0,94}{0,643} = -29,24 \text{ кН}.$$

Из первого уравнения находим

$$\begin{aligned} S_1 &= -S_2 \cos 40^\circ - G \cos 70^\circ = \\ &= 29,24 \cdot 0,766 - 20 \cdot 0,342 = 15,56 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Знак «минус» перед  $S_2$  свидетельствует о том, что стержень  $AC$  не растянут, как предполагалось, а сжат.

6. Проверку решения предлагаем выполнить самостоятельно, расположив оси координат так, как показано на рис. 2, *д*.

*Ответ:*  $S_1 = 15,56$  кН,  $S_2 = -29,24$  кН (при принятом на чертеже направлении усилий).

Величина усилий зависит от углов наклона стержня и нити. Например, если на рис. 2, *а* угол  $70^\circ$  заменить на  $60^\circ$ , сохранив угол  $30^\circ$ , то усилия будут равны:  $S_1 = 20$  кН,  $S_2 = -34,64$  кН. А при угле  $50^\circ$   $S_1 = 29,26$  кН,  $S_2 = -44,8$  кН. Оба усилия растут и становятся больше веса груза.

**Пример 3.** Как изменятся усилия в стержне и нити, если груз будет перекинут через блок, как показано на рис. 3, *а*?

Остальные данные — в примере 2.

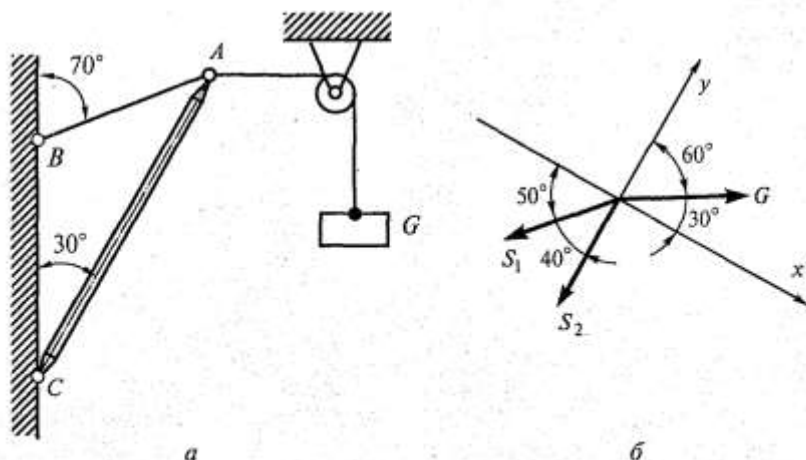


Рис. 3

- Решение.** 1. Рассматриваемой точкой остается точка  $A$ .  
 2. Активная сила (вес груза  $G$ ) действует на точку горизонтально слева направо, так как груз перекинут через блок.  
 3. Усилия  $S_1$  и  $S_2$  прикладываем к точке  $A$ , как в примере 2.  
 4. Выбираем систему координат, как показано на рис. 3, б.  
 5. Составляем и решаем уравнения равновесия:

$$1) \sum X = G \cos 30^\circ - S_1 \cos 50^\circ = 0;$$

$$2) \sum Y = G \cos 60^\circ - S_2 - S_1 \cos 40^\circ = 0.$$

Из первого уравнения находим

$$S_1 = G \frac{\cos 30^\circ}{\cos 50^\circ} = 20 \frac{0,866}{0,643} = 26,94 \text{ кН.}$$

Из второго уравнения находим

$$S_2 = G \cos 60^\circ - S_1 \cos 40^\circ = 20 \cdot 0,5 - 26,94 \cdot 0,766 = -10,64 \text{ кН.}$$

**Ответ:**  $S_1 = 26,94$  кН;  $S_2 = -10,64$  кН при принятом направлении усилий на чертеже. Усилие  $S_1$  увеличилось,  $S_2$  — уменьшилось, а знаки не изменились.

## Практическая работа №2

по теме «Плоская система сходящихся сил»

**Определение усилий в стержнях кронштейна графическим способом»**

**Цель работы:** научиться определять усилия в стержнях кронштейна графическим способом.

**Методические указания:**

## Определение равнодействующей системы сил аналитическим способом

Величина равнодействующей равна векторной (геометрической) сумме векторов системы сил. Определяем равнодействующую геометрическим способом. Выберем систему координат, определим проекции всех заданных векторов на эти оси (рис. 4а). Складываем проекции всех векторов на оси  $x$  и  $y$  (рис. 4б).

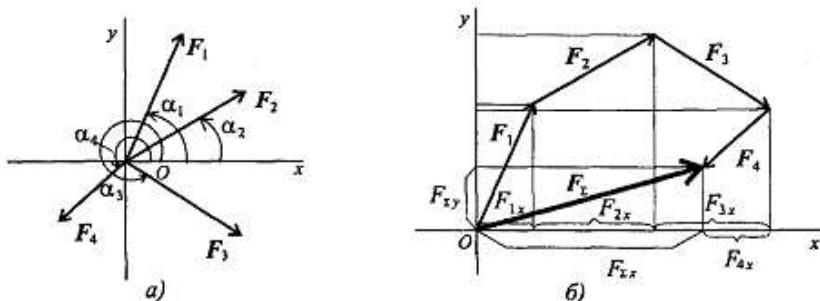


Рис. 4

$$F_{\Sigma x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}; \quad F_{\Sigma y} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y};$$

$$F_{\Sigma x} = \sum_0^n F_{kx}; \quad F_{\Sigma y} = \sum_0^n F_{ky}.$$

Модуль (величину) равнодействующей можно найти по известным проекциям:

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2}.$$

Направление вектора равнодействующей можно определить по величинам и знакам косинусов углов, образуемых равнодействующей с осями координат (рис. 5).

$$\cos \alpha_x = \frac{F_{\Sigma x}}{F_{\Sigma}};$$

$$\cos \alpha_y = \frac{F_{\Sigma y}}{F_{\Sigma}}.$$

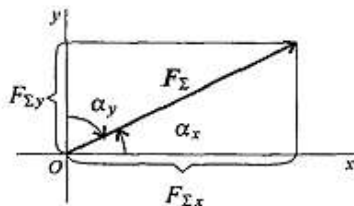


Рис. 5

## Условия равновесия плоской системы сходящихся сил в аналитической форме

Исходя из того, что равнодействующая равна нулю, получим:

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_{\Sigma x}^2 + F_{\Sigma y}^2} \Rightarrow \begin{cases} F_{\Sigma x} = \sum F_{kx} = 0; \\ F_{\Sigma y} = \sum F_{ky} = 0. \end{cases}$$
$$F_{\Sigma} = 0.$$

Условия равновесия в аналитической форме можно сформулировать следующим образом:

*Плоская система сходящихся сил находится в равновесии, если алгебраическая сумма проекций всех сил системы на любую ось равна нулю.*

Система уравнений равновесия плоской сходящейся системы сил:

$$\begin{cases} \sum_0^n F_{kx} = 0; \\ \sum_0^n F_{ky} = 0. \end{cases}$$

В задачах координатные оси выбирают так, чтобы решение было наиболее простым. Желательно, чтобы хотя бы одна неизвестная сила совпадала с осью координат.

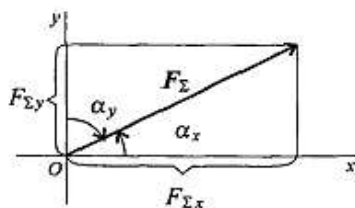


Рис. 6

### Практическая работа №3

по теме «Момент силы относительно точки на плоскости.

Пара сил»

**Определение суммы моментов сил относительно точки**

**Цель работы:** научиться решать задачи на определение суммы моментов сил и пар сил.

## Методические указания:

*Парой сил* называется система двух сил, равных по модулю, параллельных и направленных в разные стороны.

Рассмотрим систему сил  $(F; F')$ , образующих пару.

Пара сил вызывает вращение тела и ее действие на тело оценивается моментом. Силы, входящие в пару, не уравниваются, т. к.

они приложены к двум точкам (рис. 6).

Их действие на тело может быть заменено одной силой (равнодействующей).

Момент пары сил численно равен произведению модуля силы на расстояние между линиями действия сил (*плечо пары*).

Момент считают положительным, если па-

ра вращает тело по часовой стрелке

$$M(\vec{F}; \vec{F}') = Fa; \quad M > 0.$$

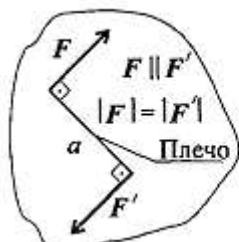


Рис. 7  
щ

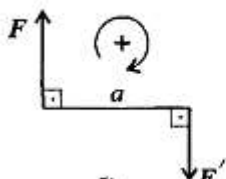


Рис. 8

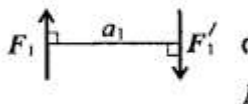


Рис. 9

Плоскость, проходящая через линии действия сил пары, называется *плоскостью действия пары*.

*Свойства пар* (без доказательств):

1. Пару сил можно перемещать в плоскости ее действия.
2. Эквивалентность пар. Две пары, моменты которых равны, (рис. 10) эквивалентны (действие их на тело аналогично).
3. Сложение пар сил. Систему пар сил можно заменить равнодействующей парой.

Момент равнодействующей пары равен алгебраической сумме моментов пар, составляющих систему (рис. 11):

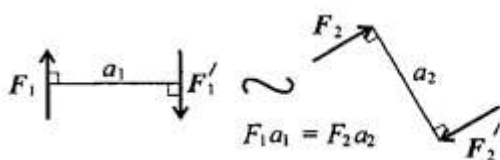


Рис.10

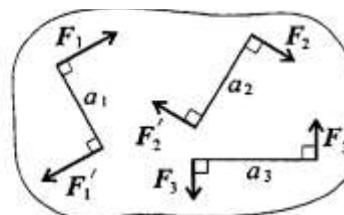


Рис.11

**Пример 1.** Дана пара сил  $|F_1| = |F'_1| = 42 \text{ кН}$ ; плечо 2 м. Заменить заданную пару сил эквивалентной парой с плечом 0,7 м (рис.12 ).

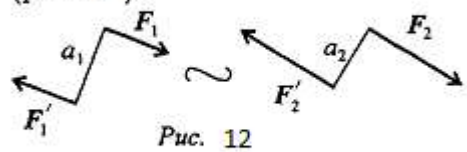


Рис. 12

**Решение**

Пары сил эквивалентны, если моменты этих пар численно равны:

$$m_1 = F_1 a_1; m_1 = 42 \cdot 2 = 84 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad m_2 = F_2 a_2; m_1 = m_2.$$

$$\text{Откуда } F_2 = \frac{84}{0,7} = 120 \text{ кН}.$$

**Пример 2.** Дана система пар сил (рис. 13 ). Определить момент результирующей пары.

**Решение**

Момент результирующей пары равен алгебраической сумме моментов пар системы:

$$M_{\Sigma} = \sum_0^n m_k.$$

Подставив численные значения, получим:

$$m_1 = 10 \cdot 0,2 = 2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$m_2 = -12 \cdot 0,3 = -3,6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$m_3 = 6 \cdot 1,2 = 7,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{\Sigma} = 2 + (-3,6) + 7,2 = 5,6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

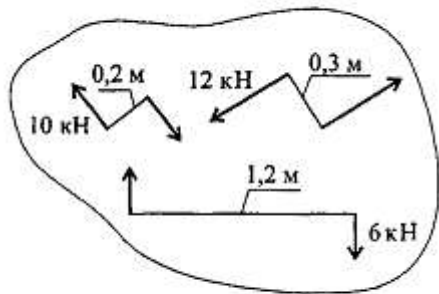


Рис. 13



**Пример 3.** Рассчитать сумму моментов сил относительно точки  $O$  (рис. 14).

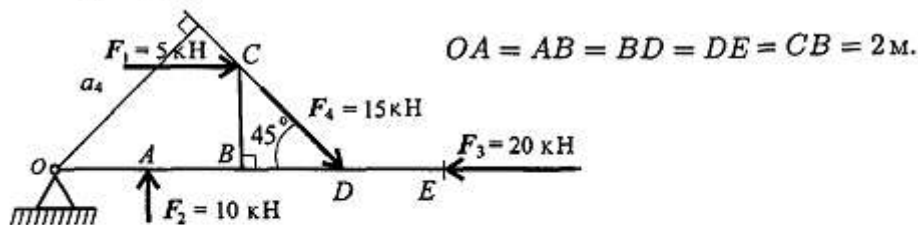


Рис. 14

### Решение

1. Момент силы относительно точки численно равен произведению модуля силы на плечо силы.

2. Момент силы равен нулю, если линия действия силы проходит через точку.

$$\begin{aligned}
 m_{O1} &= F_1 a_1; & m_{O1} &= 5 \cdot 2 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
 m_{O2} &= F_2 a_2; & m_{O2} &= -10 \cdot 2 = -20 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
 m_{O3} &= F_3 a_3; & m_{O3} &= 0; \\
 m_{O4} &= F_4 a_4; & m_{O4} &= 15 \cdot 6 \cdot 0,707 = 69,3 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\
 m_{O\Sigma} &= 10 - 20 + 69,3 = 59,3 \text{ кН}\cdot\text{м}.
 \end{aligned}$$

## Практическая работа №4, Практическая работа №5

### по теме «Плоская система произвольно расположенных сил» Определение опорных реакций простой балки на двух опорах, Определение опорных реакций консольной балки на двух опорах

**Цель работы:** научиться определять опорные реакции балок аналитическим способом.

#### Методические указания:

Линии действия произвольной системы сил не пересекаются в одной точке, поэтому для оценки состояния тела такую систему следует упростить. Для этого все силы системы переносят в одну произвольно выбранную точку — точку приведения. Применяют теорему Пуансо. При любом переносе силы в точку, не лежащую на линии ее действия, добавляют пару сил.

Появившиеся при переносе пары называют *присоединенными* парами.

Дана плоская система произвольно расположенных сил (рис. 15).

Переносим все силы в точку  $O$ . Получим пучок сил в точке  $O$ , который можно заменить одной силой — *главным вектором системы*. Образующуюся систему пар сил можно заменить одной эквивалентной парой — *главным моментом системы*.

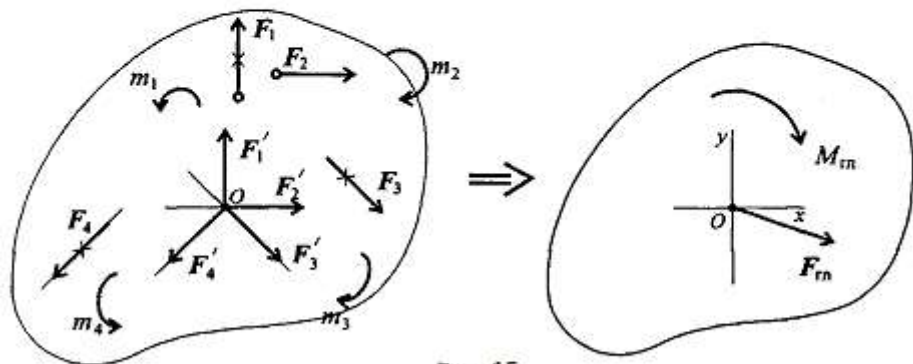


Рис. 15

$$F_{rn} = \sum_0^n F_k.$$

Главный вектор равен геометрической сумме векторов произвольной плоской системы сил. Проецируем все силы системы на оси координат и, сложив соответствующие проекции на оси, получим проекции главного вектора.

$$F_{\text{гл}x} = \sum_0^n F_{kx}; \quad F_{\text{гл}y} = \sum_0^n F_{ky}.$$

По величине проекций главного вектора на оси координат находим модуль главного вектора:

$$F_{\text{гл}} = \sqrt{F_{\text{гл}x}^2 + F_{\text{гл}y}^2}.$$

## Виды нагрузок и разновидности опор

### Виды нагрузок

По способу приложения нагрузки делятся на сосредоточенные и распределенные. Если реально передача нагрузки происходит на пренебрежимо малой площадке (в точке), нагрузку называют *сосредоточенной*.

Часто нагрузка распределена по значительной площадке или линии (давление воды на плотину, давление снега на крышу и т. п.), тогда нагрузку считают *распределенной*.

В задачах статики для абсолютно твердых тел распределенную нагрузку можно заменить равнодействующей сосредоточенной силой (рис. 16).

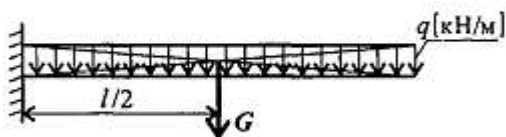


Рис. 16

$q$  — интенсивность нагрузки;  $l$  — длина стержня;

$G = ql$  — равнодействующая распределенной нагрузки.

### Разновидности опор балочных систем (см. лекцию 1)

Балка — конструктивная деталь в виде прямого бруса, закрепленная на опорах и изгибаемая приложенными к ней силами.

Высота сечения балки незначительна по сравнению с длиной.

*Жесткая заделка (защемление)* (рис. 17)

Опора не допускает перемещений и поворотов. Заделку заменяют двумя составляющими силы  $R_{Ax}$  и  $R_{Ay}$  и парой с моментом  $M_R$ .

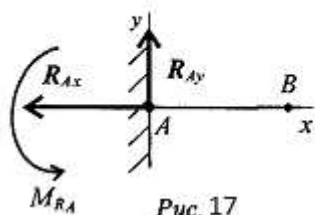


Рис. 17

Для определения этих неизвестных удобно использовать систему уравнений в виде

$$\sum_0^n F_{kx} = 0; \quad \sum_0^n F_{ky} = 0; \quad \sum_0^n m_{kA} = 0$$

Для контроля правильности решений используют дополнительное уравнение моментов относительно любой точки на балке, например B:

$$\sum_0^n m_{kB} = 0.$$

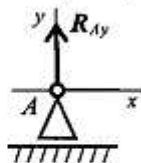


Рис. 18

*Шарнирно-подвижная опора* (рис. 18 )

Опора допускает поворот вокруг шарнира и перемещение вдоль опорной поверхности. Реакция направлена перпендикулярно опорной поверхности.

*Шарнирно-неподвижная опора* (рис. 19 )

Опора допускает поворот вокруг шарнира и может быть заменена двумя составляющими силы вдоль осей координат.

*Балка на двух шарнирных опорах* (рис. 20 )

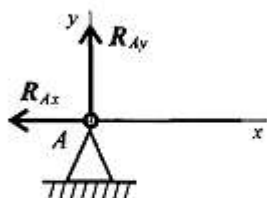


Рис. 19

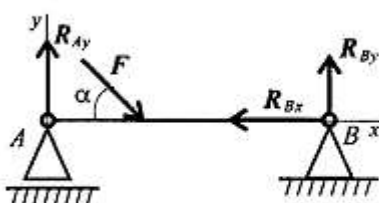


Рис. 20

Не известны три силы, две из них — вертикальные, следовательно, удобнее для определения неизвестных использовать систему

уравнений во второй форме

$$\sum_0^n m_{kA} = 0; \quad \sum_0^n m_{kB} = 0; \quad \sum_0^n F_{kx} = 0.$$

Составляются уравнения моментов относительно точек крепления балки. Поскольку момент силы, проходящей через точку крепления, равен 0, в уравнении останется одна неизвестная сила.

Для контроля правильности решения используется дополнительное уравнение

$$\sum_0^n F_{ky} = 0.$$

**Пример 1.** Определить опорные реакции балки на рисунке 21.

**Решение.** 1. *Заменяем распределенную нагрузку равнодействующей.* На балку действуют нагрузки разной интенсивности, поэтому для каждой из них найдем равнодействующую:

$$F_{q_1} = q_1 l_1 = 20 \cdot 4,5 = 90 \text{ кН}; \quad F_{q_2} = q_2 l_2 = 15 \cdot 3 = 45 \text{ кН},$$

где  $l_1 = a + b = 1 + 3,5 = 4,5 \text{ м}$ ;  $l_2 = d + d = 1,5 + 1,5 = 3 \text{ м}$ .

Укажем расстояния от этих сил до каждой из опор (рис. 6, б).

2. *Обозначим опоры А и В.*

3. *Укажем опорные реакции  $V_A$  и  $V_B$ .* Обычно рис. 6, а и б совмещают в одном.

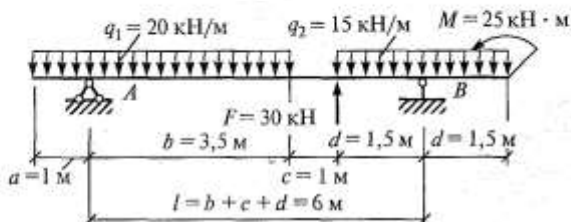


Рис. 21

4. *Составляем уравнения равновесия.* Первое уравнение для нашей задачи примет вид

$$F_{q_1} (l_1/2 - a) - F(b + c) + F_{q_2} l - V_B l - M = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} V_B &= [F_{q_1} (l_1/2 - a) - F(b + c) + F_{q_2} l - M]/l = \\ &= \frac{90(4,5/2 - 1) - 30(3,5 + 1) + 45 \cdot 6 - 25}{6} = 37,1 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Второе уравнение примет вид

$$\begin{aligned}V_A l - F_{q_1} (d + c + l_1/2) + Fd - M &= 0, \\V_A &= [F_{q_1} (d + c + l_1/2) - Fd + M]/l = \\&= \frac{90(1,5 + 1 + 4,5/2) - 30 \cdot 1,5 + 25}{6} = 67,9 \text{ кН}.\end{aligned}$$

5. Выполним проверку, используя уравнение  $\sum Y = 0$ , которое примет вид

$$\begin{aligned}V_A - F_{q_1} + F + V_B - F_{q_2} &= 0 \\67,9 - 90 + 30 + 37,1 - 45 &= 0, \text{ откуда } 135 - 135 = 0.\end{aligned}$$

Реакции определены правильно.

Ответ:  $V_A = 67,9$  кН;  $V_B = 37,1$  кН.

**Практическая работа №6**  
**по теме «Плоская система произвольно расположенных сил»**  
**Определение опорных реакций простой статически**  
**определимой рамы**

**Цель работы:** научиться определять опорные реакции простой статически определимой рамы аналитическим способом.

**Пример 1.** Определить опорные реакции простой статически определимой рамы, изображенной на рис. 22.

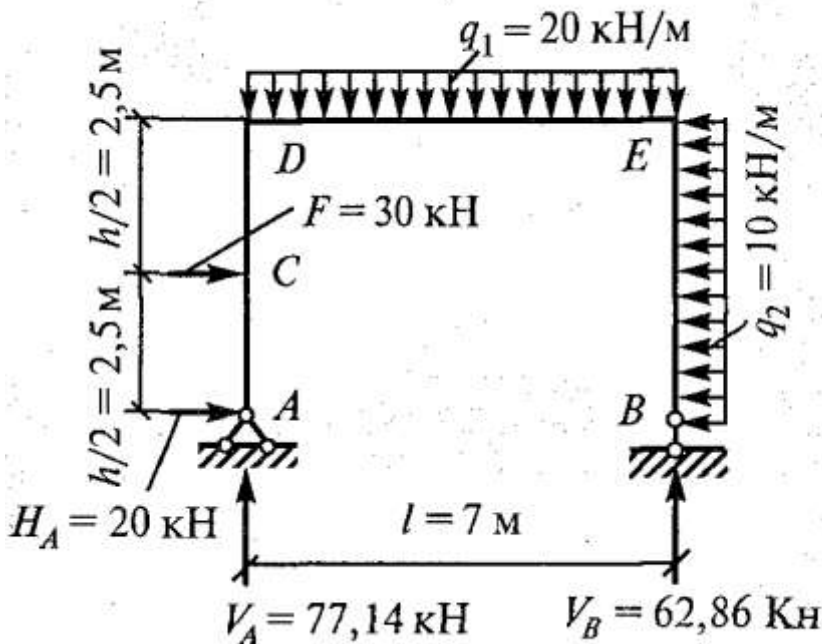


Рис.22

**Решение.** 1. *Определим опорные реакции.* Рама не имеет промежуточных шарниров, поэтому используем уравнения равновесия вида I.

Из первого уравнения определим  $V_B$ :

$$Fh/2 + q_1 ll/2 - q_2 hh/2 - V_B l = 0$$

или

$$20 \cdot 7 \cdot 3,5 + 30 \cdot 2,5 - 10 \cdot 5 \cdot 2,5 - V_B \cdot 7 = 0,$$

откуда  $V_B = (20 \cdot 7 \cdot 3,5 + 30 \cdot 2,5 - 10 \cdot 5 \cdot 2,5)/7 = 62,86$  кН.

Из второго уравнения определим  $V_A$ :

$$V_A l + Fh/2 - q_1 ll/2 - q_2 hh/2 = 0$$

или  $V_A \cdot 7 + 30 \cdot 2,5 - 20 \cdot 7 \cdot 3,5 - 10 \cdot 5 \cdot 2,5 = 0,$

откуда  $V_A = (-30 \cdot 2,5 + 20 \cdot 7 \cdot 3,5 + 10 \cdot 5 \cdot 2,5)/7 = 77,14$  кН.

Из третьего уравнения найдем

$$H_A + F - q_2 h = 0,$$

откуда  $H_A = q_2 h - F = 10 \cdot 5 - 30 = 20$  кН.

Проверим правильность определения вертикальных реакций:

$$\sum Y = V_A + V_B - q_1 l$$

или

$$62,86 + 77,14 - 20 \cdot 7 = 0, \text{ откуда } 140 - 140 = 0.$$



### Практическая работа №7

по теме: «Центр тяжести тела. Центр тяжести плоских фигур»  
**Определение центра тяжести сечения, составленного из  
простых геометрических фигур**

### Практическая работа №8

по теме: «Центр тяжести тела. Центр тяжести плоских фигур»  
**Определение центра тяжести сечения, составленного из  
стандартных прокатных профилей**

### Практическая работа № 9

по теме: «Центр тяжести тела. Центр тяжести плоских фигур»  
**Решение задач на определение центра тяжести сложных  
сечений**

**Цель работы:** научиться определять координаты центра тяжести сечений, составленных из простых геометрических фигур, и сечений, составленных из стандартных прокатных профилей

**Методические указания:**

#### Центр тяжести однородных плоских тел (плоских фигур)

Очень часто приходится определять центр тяжести различных плоских тел и геометрических плоских фигур сложной формы. Для плоских тел можно записать:  $V = Ah$ , где  $A$  — площадь фигуры,  $h$  — ее высота.

Тогда после подстановки в записанные выше формулы получим:

$$x_C = \frac{\sum_0^n A_k h x_k}{Ah} = \frac{\sum_0^n A_k x_k}{A}; \quad y_C = \frac{\sum_0^n A_k h y_k}{Ah} = \frac{\sum_0^n A_k y_k}{A}; \quad z_C = \frac{h}{2},$$

где  $A_k$  — площадь части сечения;  $x_k, y_k$  — координаты ЦТ частей сечения.

Выражение  $\sum_0^n A_k x_k$  называют *статическим моментом площади* ( $S_y$ ).

Координаты центра тяжести сечения можно выразить через статический момент:

$$\sum_0^n A_k x_k = S_y; \quad x_C = \frac{S_y}{A}; \quad \sum_0^n A_k y_k = S_x; \quad y_C = \frac{S_x}{A}.$$

Оси, проходящие через центр тяжести, называются *центральными осями*. Статический момент относительно центральной оси равен нулю.

**Примечание.** Центр тяжести симметричной фигуры находится на оси симметрии.

Центр тяжести стержня находится на середине высоты. Положения центров тяжести простых геометрических фигур могут быть рассчитаны по известным формулам (рис. 23: а) — круг; б) — квадрат, прямоугольник; в) — треугольник; г) — полукруг).

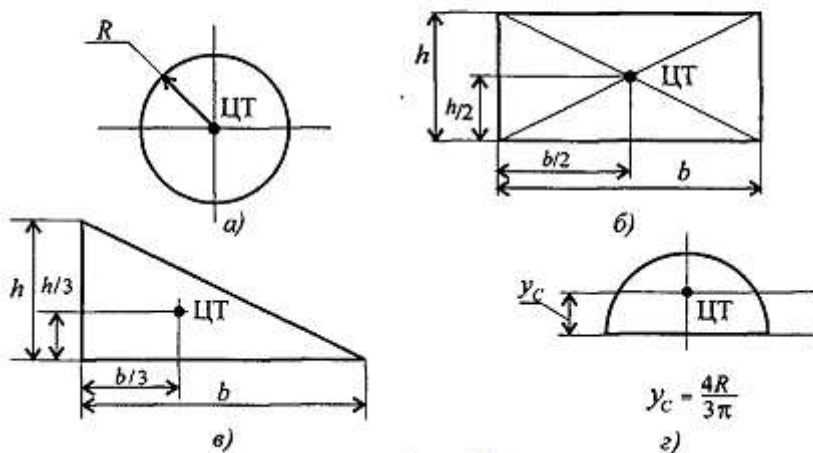


Рис. 23

**Пример 1.** Определить положение центра тяжести сечения, состоящего из простых геометрических фигур (рис. 24)

**Решение.** 1. Разобьем сечение на пять фигур: два прямоугольника I и II, два треугольника III и IV и круг V.

2. Укажем центры тяжести простых фигур  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$

3. Выберем систему координат. Ось  $x$  проведем через центр тяжести  $C_2$  прямоугольника, а ось  $y$  совместим с осью симметрии сечения.

4. Определим координаты центра тяжести сечения:

$x_C = 0$ , так как ось  $y$  совпадает с осью симметрии;

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + 2A_3 y_3 - A_5 y_5}{A_1 + A_2 + 2A_3 - A_5}$$

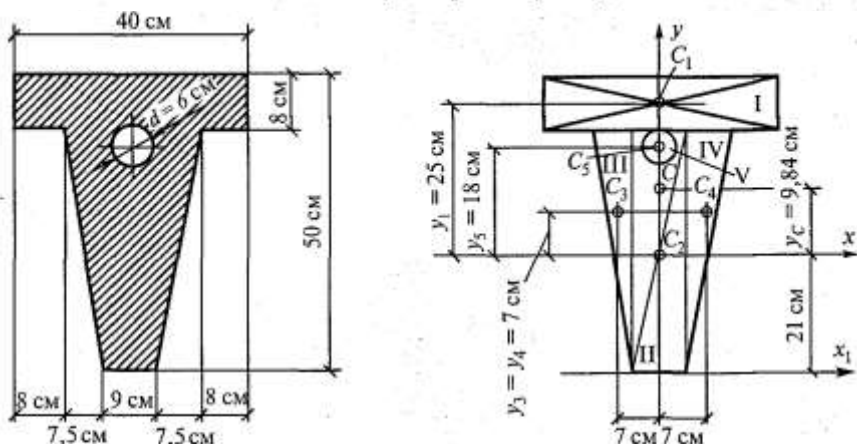


Рис. 24

Используя прил. II, определим площади фигур и координаты центров тяжести:

$$A_1 = 40 \cdot 8 = 320 \text{ см}^2; \quad y_1 = \frac{42}{2} + \frac{8}{2} = 25 \text{ см};$$

$$A_2 = 9 \cdot 42 = 378 \text{ см}^2; \quad y_2 = 0;$$

$$A_3 = A_4 = \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 42 = 157,5 \text{ см}^2; \quad y_3 = y_4 = 2/3 \cdot 42 - \frac{1}{2} \cdot 42 = \\ = 28 - 21 = 7 \text{ см};$$

$$A_5 = \frac{3,14 \cdot 6^2}{4} = 28,3 \text{ см}^2; \quad y_5 = 21 - 3 = 18 \text{ см}.$$

Подставим числовые значения в формулу

$$y_C = \frac{320 \cdot 25 + 378 \cdot 0 + 2 \cdot 157,5 \cdot 7 - 28,3 \cdot 18}{320 + 378 + 2 \cdot 157,5 - 28,3} = \\ = \frac{9696 \text{ см}^3}{984 \text{ см}^2} = 9,84 \text{ см}.$$

Для проверки решения ось  $x_1$  можно провести по нижней грани сечения. В этом случае  $y_C = 30,84 \text{ см}$ . Поскольку  $30,84 - 21 = 9,84 \text{ см}$ , то решение верно.

*Ответ:*  $y_C = 9,84 \text{ см}$ , если ось  $x$  проходит через центр тяжести  $C_2$ .

**Пример 2.** Определить положение центра тяжести сечения, состоящего из стандартных прокатных профилей (рис. 25)

Сечение состоит из двутавровой балки № 33, швеллера № 27, двух уголков  $90 \times 56 \times 6$  мм и листа сечением  $12 \times 180$  мм.

**Решение.** 1. Разобьем сечение в соответствии с профилями проката и обозначим их 1, 2, 3, 4, 5.

2. Пользуясь табл. 2, 3 и 4 прил. I, укажем центры тяжести каждого профиля и обозначим их  $C_1, C_2, C_3, C_4$  и  $C_5$ .

3. Выберем систему осей координат. Ось  $y$  совместим с осью симметрии, а ось  $x$  направим перпендикулярно оси  $y$  и проведем через центр тяжести двутавровой балки.

4. Выпишем формулы для определения координат центра тяжести сечения:

$y_C = 0$ , так как ось  $y$  совпадает с осью симметрии;

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + A_4 y_4 + A_5 y_5}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5}.$$

Учитывая, что  $A_2 = A_3$ , а также, что  $y_2 = y_3$ , получим:

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + 2A_2 y_2 + A_4 y_4 + A_5 y_5}{A_1 + 2A_2 + A_4 + A_5}.$$

Определим площади и координаты центров тяжести отдельных профилей проката, используя сечение и табл. 2, 3 и 4 прил. I:

$$A_1 = 35,2 \text{ см}^2; \quad A_2 = A_3 = 8,54 \text{ см}^2; \quad A_4 = 53,8 \text{ см}^2;$$

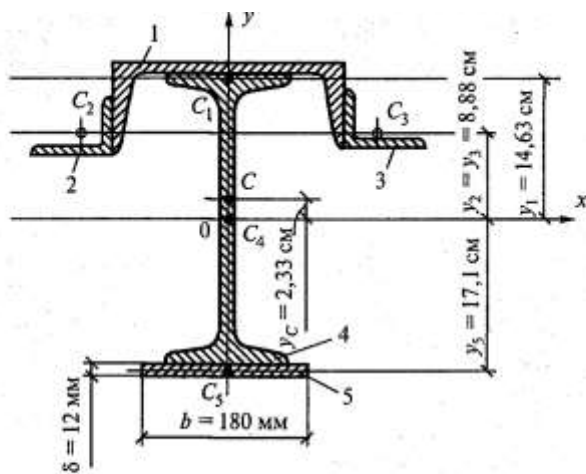
$$A_5 = 1,2 \cdot 180 = 21,6 \text{ см}^2;$$

$$y_1 = h_{\text{дв}}/2 + d_{\text{шв}} - z_{0(\text{шв})} = \frac{33}{2} + 0,6 - 2,47 = 14,63 \text{ см};$$

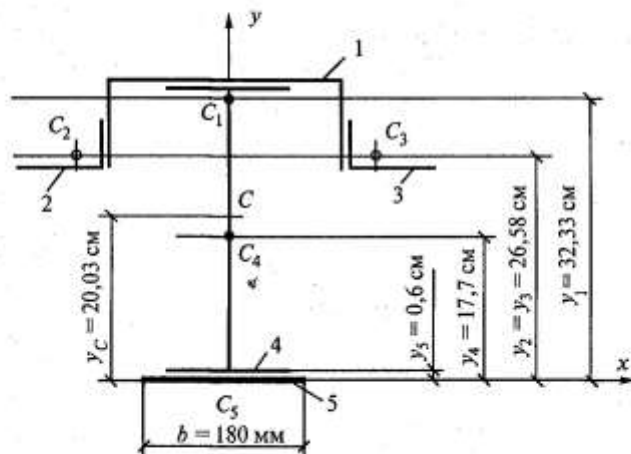
$$y_2 = y_3 = h_{\text{дв}}/2 + d_{\text{шв}} - b_{\text{шв}} + x_{0(\text{уг})} = \frac{33}{2} + 0,6 - 9,5 + 1,28 = 8,88 \text{ см};$$

$y_4 = 0$ , так как ось  $x$  проходит через центр тяжести двутавра;

$$y_5 = -(h_{\text{дв}}/2 + \delta_{\text{листа}}/2) = -\left(\frac{33}{2} + \frac{1,2}{2}\right) = -17,1 \text{ см}.$$



a



b

Рис. 25

Подставим полученные значения в формулу для определения  $y_C$ :

$$y_C = \frac{35,2 \cdot 14,63 + 2 \cdot 8,54 \cdot 8,88 + 53,8 \cdot 0 + 21,6(-17,1)}{35,2 + 2 \cdot 8,54 + 53,8 + 21,6} =$$

$$= \frac{297,3}{127,7} = 2,33 \text{ см.}$$

5. *Проверка решения.* Проведем ось  $x$  по нижней грани листа (рис. 36, б). Площади профилей останутся теми же, а координаты центров тяжести изменятся:

$$y_1 = \delta_{\text{листа}} + h_{\text{дв}} + d_{\text{шв}} - z_{(\alpha_{\text{шв}})} = 1,2 + 33 + 0,6 - 2,47 = 32,33 \text{ см;}$$

$$y_2 = \delta_{\text{листа}} + h_{\text{дв}} + d_{\text{шв}} - b_{\text{шв}} - x_{(\alpha_{\text{ур}})} = 1,2 + 33 + 0,6 -$$

$$- 9,5 + 1,28 = 26,58 \text{ см;}$$

$$y_2 = y_3 = 26,58 \text{ см;}$$

$$y_4 = \delta_{\text{листа}} + h_{\text{дв}} / 2 = 1,2 + \frac{33}{2} = 1,2 + 16,5 = 17,7 \text{ см;}$$

$$y_5 = \delta_{\text{листа}} / 2 = \frac{1,2}{2} = 0,6 \text{ см.}$$

Определим положение центра тяжести в новой системе координат

$$y_C = \frac{3,25 \cdot 32,33 + 2 \cdot 8,54 \cdot 26,58 + 53,8 \cdot 17,7 + 21,6 \cdot 0,6}{35,2 + 2 \cdot 8,54 + 53,8 + 21,6} =$$

$$= \frac{2557}{127,7} = 20,03 \text{ см.}$$

Разность между координатами центра тяжести должна быть равна расстоянию между осями  $x$  в первом и во втором решении:

$$20,3 - 2,33 = \frac{33}{2} + 1,2,$$

откуда  $17,7 \text{ см} = 17,7 \text{ см.}$

*Ответ:*  $y_C = 2,33 \text{ см}$ , если ось  $x$  проходит через  $C_4$ , и  $y_C = 20,03 \text{ см}$ , если ось  $x$  проходит по нижней грани.

## Практическая работа №10

по теме: «Растяжение и сжатие».

**Построение эпюр продольных сил и нормальных напряжений стального ступенчатого бруса, заземленного одним концом**

## Практическая работа №11

**Определение абсолютного удлинения стального ступенчатого бруса, заземленного одним концом**

**Цель работы:** научиться определять в поперечных сечениях элемента продольные силы, нормальные напряжения и деформации и строить их эпюры.

### Методические указания:

Элементы конструкции при работе испытывают внешнее воздействие, которое оценивается величиной внешней силы. К внешним силам относят активные силы и реакции опор.

Под действием внешних сил в детали возникают внутренние силы упругости, стремящиеся вернуть телу первоначальную форму и размеры.

Внешние силы должны быть определены методами теоретической механики, а внутренние определяются основным методом сопротивления материалов — методом сечений.

В сопротивлении материалов тела рассматриваются в равновесии. Для решения задач используют уравнения равновесия, полученные в теоретической механике для тела в пространстве.

Используется система координат, связанная с телом. Чаще продольную ось детали обозначают  $z$ , начало координат совмещают с левым краем и размещают в центре тяжести сечения.

*Метод сечений заключается в мысленном рассечении тела плоскостью и рассмотрении равновесия любой из отсеченных частей.*

Если все тело находится в равновесии, то и каждая его часть находится в равновесии под действием внешних и внутренних сил. *Внутренние силы определяются из уравнений равновесия, составленных для рассматриваемой части тела.*

Разложив главный вектор  $R_0$  по осям, получим три составляющие:

$$R_0 = N_z + Q_y + Q_x;$$

где  $N_z$  — продольная сила;

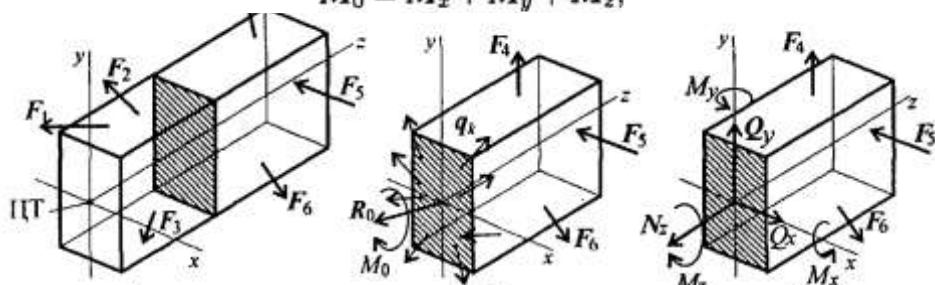
$Q_x$  — поперечная сила по оси  $x$ ;

$Q_y$  — поперечная сила по оси  $y$ .



Главный момент тоже принято представлять в виде моментов пар сил в трех плоскостях проекции:

$$M_0 = M_x + M_y + M_z,$$



$M_x$  — момент сил относительно  $Ox$ ;  $M_y$  — момент сил относительно  $Oy$ ;  $M_z$  — момент сил относительно  $Oz$ .

Полученные составляющие сил упругости носят название *внутренних силовых факторов*. Каждый из внутренних силовых факторов вызывает определенную деформацию детали. Внутренние силовые факторы уравнивают приложенные к этому элементу детали внешние силы. Используя шесть уравнений равновесия, можно получить величину внутренних силовых факторов:

$$N_z = \sum_0^n F_{kz}; \quad M_z = \sum_0^n m_z(F_k);$$

$$Q_x = \sum_0^n F_{kx}; \quad M_x = \sum_0^n m_x(F_k);$$

$$Q_y = \sum_0^n F_{ky}; \quad M_y = \sum_0^n m_y(F_k).$$

Из приведенных уравнений следует, что:

$N_z$  — *продольная сила*, равная алгебраической сумме проекций на ось  $Oz$  внешних сил, действующих на отсеченную часть бруса; вызывает растяжение или сжатие;

$Q_x$  — *поперечная сила*, равная алгебраической сумме проекций на ось  $Ox$  внешних сил, действующих на отсеченную часть;

$Q_y$  — *поперечная сила*, равная алгебраической сумме проекций на ось  $Oy$  внешних сил, действующих на отсеченную часть;

силы  $Q_x$  и  $Q_y$  вызывают сдвиг сечения;

$M_z$  — *крутящийся момент*, равный алгебраической сумме моментов внешних сил относительно продольной оси  $Oz$ ; вызывает скручивание бруса;

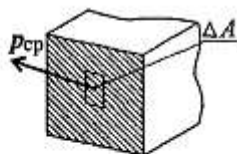
$M_x$  — *изгибающий момент*, равный алгебраической сумме моментов внешних сил относительно оси  $Ox$ ;

$M_y$  — *изгибающий момент*, равный алгебраической сумме моментов внешних сил относительно оси  $Oy$ ;

Величину интенсивности внутренних сил в точке поперечного сечения называют *механическим напряжением*. Напряжение характеризует величину внутренней силы, приходящейся на единицу площади поперечного сечения.

Направление напряжения  $p_{ср}$  совпадает с направлением внутренней силы в этом сечении.

Вектор  $p_{ср}$  называют *полным напряжением*. Его принято раскладывать на два вектора (рис. 58):  $\tau$  — лежащий в площадке сечения и  $\sigma$  — направленный перпендикулярно площадке.



$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}.$$

Если вектор  $p$  — пространственный, то его раскладывают на три составляющие:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau_x^2 + \tau_y^2}.$$

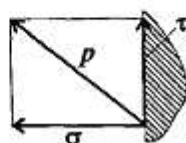


Рис. 26

Нормальное напряжение характеризует сопротивление сечения растяжению или сжатию.

Касательное напряжение характеризует сопротивление сечения сдвигу.

Сила  $N$  (продольная) вызывает появление нормального напряжения  $\sigma$ . Силы  $Q_x$  и  $Q_y$  вызывают появление касательных напряжений  $\tau$ . Моменты изгибающие  $M_x$  и  $M_y$  вызывают появление нормальных напряжений  $\sigma$ , переменных по сечению.

Крутящий момент  $M_z$  вызывает сдвиг сечения вокруг продольной оси, поэтому появляются касательные напряжения  $\tau$ .

*Растяжением* или *сжатием* называют вид нагружения, при котором в поперечном сечении бруса возникает только один внутренний силовой фактор — продольная сила.

Продольные силы меняются по длине бруса. При расчетах после определения величин продольных сил по сечениям строится график — эпюра продольных сил.

Условно назначают знак продольной силы.

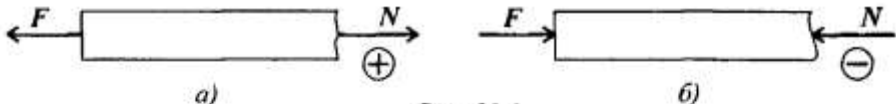


Рис. 27

При растяжении и сжатии в сечении действует только нормальное напряжение.

Напряжения в поперечных сечениях могут рассматриваться как силы, приходящиеся на единицу площади.

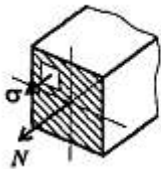


Рис. 28

Исходя из гипотезы плоских сечений, можно предположить, что напряжения при растяжении и сжатии в пределах каждого сечения не меняются. Поэтому напряжение можно рассчитать по формуле

$$\sigma = \frac{N_z}{A},$$

где  $N_z$  — продольная сила в сечении;  $A$  — площадь поперечного сечения.

*Величина напряжения прямо пропорциональна продольной силе и обратно пропорциональна площади поперечного сечения.*

Размерность (единица измерения) напряжений — Н/м<sup>2</sup> (Па), однако это слишком малая единица, и практически напряжения рассчитывают в Н/мм<sup>2</sup> (МПа):  $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ Н/мм}^2$ .

### Деформации при растяжении (сжатии)

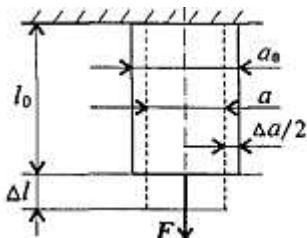


Рис. 29

Брус удлиняется на величину  $\Delta l$ ;  $\Delta l$  — абсолютное удлинение. При растяжении поперечные размеры уменьшаются,  $\Delta a$  — абсолютное сужение;  $\Delta l > 0$ ;  $\Delta a < 0$ .

При сжатии выполняется соотношение  $\Delta l < 0$ ;  $\Delta a > 0$ .

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}; \quad \varepsilon \text{ — относительное удлинение;}$$

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a_0}; \quad \varepsilon' \text{ — относительное сужение.}$$

Между продольной и поперечной деформациями существует зависимость

$$\varepsilon' = \mu \varepsilon,$$

где  $\mu$  — коэффициент поперечной деформации, или коэффициент Пуассона, — характеристика пластичности материала.

### Формулы для расчета перемещений поперечных сечений бруса при растяжении и сжатии

Используем известные формулы.

Закон Гука  $\sigma = E\varepsilon$ .

Откуда  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ .

Относительное удлинение  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ .

В результате получим зависимость между нагрузкой, размерами бруса и возникающей деформацией:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}; \quad \sigma = \frac{N}{A};$$

$$\Delta l = \frac{\sigma l}{E} \quad \text{или} \quad \Delta l = \frac{Nl}{AE},$$

где  $\Delta l$  — абсолютное удлинение, мм;

$\sigma$  — нормальное напряжение, МПа;

$l$  — начальная длина, мм;

$E$  — модуль упругости материала, МПа;

$N$  — продольная сила, Н;

$A$  — площадь поперечного сечения, мм<sup>2</sup>;

Произведение  $AE$  называют *жесткостью сечения*.

**Пример 1.** Построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений и определить абсолютное удлинение ступенчатого бруса.

Дана схема нагружения и размеры бруса до деформации (рис.30). Брус защемлен, определить перемещение свободного конца.

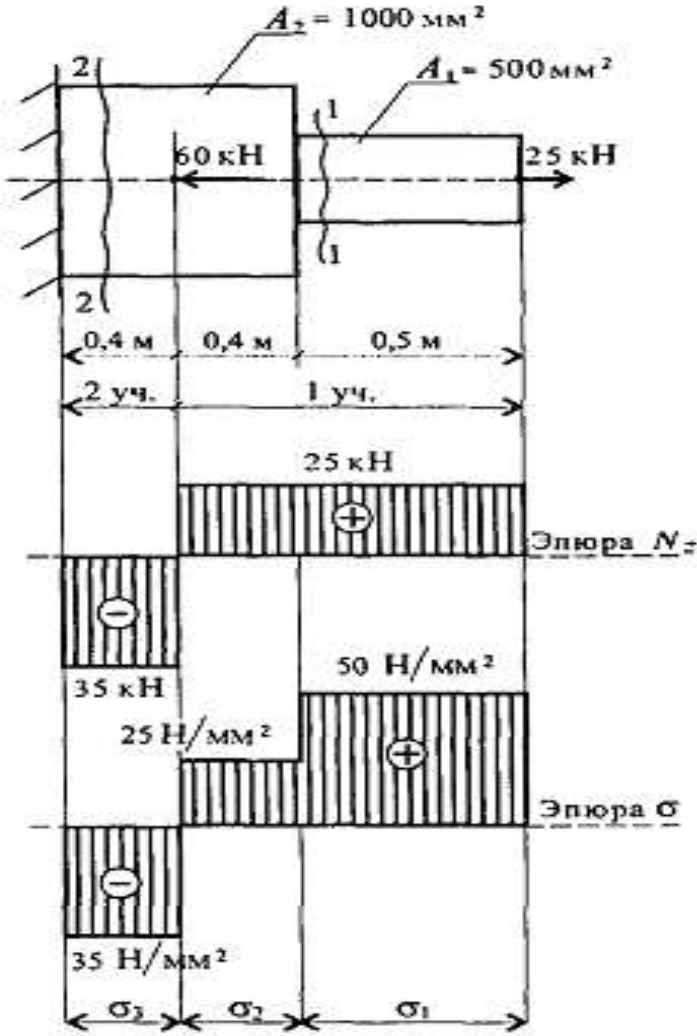


Рис. 30

### Решение:

1. Делим брус на участки, границами которых будут: начало и конец бруса, точки приложения сил, изменение размеров поперечного сечения.

2. На каждом участке проводим сечение, в каждом из которых определяем величины продольных сил и нормальных напряжений и строим их эпюры, начиная от свободного конца.

3. Определяем абсолютное удлинение бруса.

1. Два участка нагружения:

участок 1:  $N_1 = +25$  кН;

растянут;

участок 2:  $25 - 60 + N_2 = 0$ ;  $N_2 = -35$  кН; сжат.

2. Три участка по напряжениям:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1}; \quad \sigma_1 = \frac{25 \cdot 10^3}{500} = 50 \text{ Н/мм}^2;$$

$$\sigma_2 = \frac{N_1}{A_2}; \quad \sigma_2 = \frac{25 \cdot 10^3}{1000} = 25 \text{ Н/мм}^2;$$

$$\sigma_3 = \frac{N_2}{A_2}; \quad \sigma_3 = \frac{-35 \cdot 10^3}{1000} = -35 \text{ Н/мм}^2.$$

3. Удлинения участков (материал — сталь  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа):

$$\Delta l_1 = \frac{\sigma_1 l_1}{E}; \quad \Delta l_1 = \frac{50 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5} = 0,125 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2 l_2}{E}; \quad \Delta l_2 = \frac{25 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5} = 0,05 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{\sigma_3 l_3}{E}; \quad \Delta l_3 = \frac{-35 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5} = -0,07 \text{ мм}.$$

4. Суммарное удлинение бруса (перемещение свободного конца).

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3; \quad \Delta l = 0,125 + 0,05 - 0,07 = 0,105 \text{ мм}.$$

## Практическая работа №12

### «Подбор сечения шарнирно-стержневой конструкции из условия прочности по предельному состоянию».

**Цель работы:** Научиться выполнять расчет на прочность

**Методические указания:**

#### Метод предельных состояний

В строительных нормах предельные состояния разделены на две группы: первая — по несущей способности, т.е. непригодности к эксплуатации (вследствие разрушения); вторая — по непригодности к нормальной эксплуатации (вследствие недопустимых перемещений, колебаний, трещин). Расчет по предельным состояниям должен гарантировать, что ни одно из предельных состояний не наступит.

Для обеспечения надежности конструкции введено расчетное сопротивление материала:

$$R = \frac{R_H}{\gamma_m},$$

Где  $R_H$  - нормативное сопротивление, устанавливаемое по ГОСТ,  $\gamma_m$  - коэффициент надежности по материалу.

Условие прочности при растяжении (сжатии):

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq R_y \gamma_c \gamma_k,$$

где  $N_{\max}$  — наибольшее расчетное усилие, возникающее в элементах конструкции;  $A$  — площадь поперечного сечения;  $R_y$  — расчетное сопротивление материала;  $\gamma_c$  — коэффициент условий работы, учитывающий условия эксплуатации, агрессивность среды, концентрацию напряжений,  $\gamma_k$  — коэффициент надежности, учитывающий степень ответственности и капитальности сооружений.

**Пример.1** Подобрать сечение стержней шарнирно – стержневой конструкции из условия прочности по предельному состоянию (рис. 31). Материал для стержня круглого сечения – арматурная сталь, расчетное сопротивление  $R_{и}=270$  МПа, для прокатных профилей –  $R_y=210$  МПа.

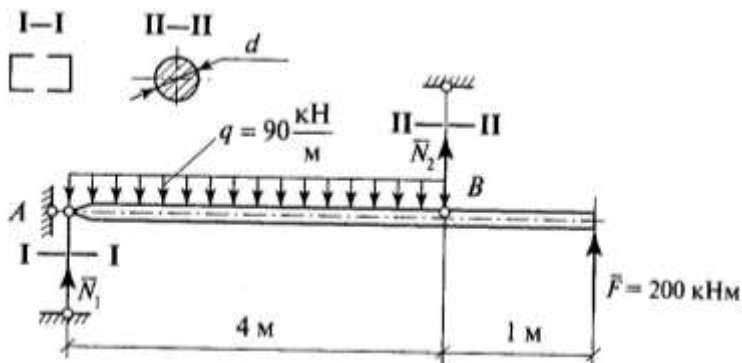


Рис. 31

**Решение:**

1. Мысленно освободимся от связей и заменим их действие реакциями связей или усилиями в стержнях  $N_1$  и  $N_2$ .

2. Определим равнодействующую равномерно распределенной нагрузки  $F_q = q \cdot 4 = 90 \cdot 4 = 360$  кН. Составляем уравнения равновесия, из которых определяем неизвестные усилия:  $\sum M_A = 0$ ,  $\sum M_A = F_q \cdot 2 - N_2 \cdot 4 - F \cdot 5 = 0$ ;  $N_2 = \frac{F_q \cdot 2 - F \cdot 5}{4} = \frac{360 \cdot 2 - 200 \cdot 5}{4} = -70$  кН. Знак (-) означает, что  $N_2$  направлена в противоположную сторону.  $\sum M_B = 0$ ,  $\sum M_B = N_1 \cdot 4 - F_q \cdot 2 - F \cdot 1 = 0$ ;  $N_1 = \frac{F_q \cdot 2 - F \cdot 5}{4} = \frac{360 \cdot 2 - 200 \cdot 1}{4} = 230$  кН.

Проверка:  $\sum F_y = 0$ ;  $N_1 - F_q + N_2 + F = 230 - 360 - 70 + 200 = 0$ .

3. Найдем требуемую площадь поперечного сечения для каждого стержня.

Стержень 1:  $A \geq \frac{N_2}{R_y} \geq \frac{230 \cdot 10^4}{210 \cdot 10^3} \geq 10,9$  см<sup>2</sup>, по таблице прил. 7 принимаем два швеллера № 5 с площадью  $6,16$  см<sup>2</sup> · 2 = 12,32 см<sup>2</sup>.



Стержень 2:  $A \geq \frac{N_2}{R_r} \geq \frac{|70| \cdot 10^4}{270 \cdot 10^3} \geq 2,59 \text{ см}^2$ , требуемый диаметр

стержня  $D \geq \sqrt{\frac{4A}{\pi}} \geq 1,816 \text{ см}$ , округлим до 2 см, и тогда  $A_2 = \frac{\pi D^2}{4} =$   
 $= \frac{\pi \cdot 2^2}{4} = 3,14 \text{ см}^2$ .

4. Проверка прочности принятых стержней.

Стержень 1:  $\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{230}{12,32} = 18,66 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 186,6 \text{ МПа} \leq 210 \text{ МПа}$ ;

Стержень 2:  $\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{|70|}{3,14} = 22,29 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 223 \text{ МПа} \leq 270 \text{ МПа}$ .

Прочность стержней 1 и 2 обеспечена.

## Практическая работа №13

по теме «Геометрические характеристики плоских сечений»

**Определение главных центральных моментов инерции сечения, состоящего из простых геометрических фигур**

## Практическая работа №14

по теме «Геометрические характеристики плоских сечений»

**Определение главных центральных моментов инерции сечения, состоящего из стандартных прокатных профилей**

**Цель работы:** Научиться определять главные центральные моменты инерции сечений

**Методические указания:**

### Центробежный момент инерции

*Центробежным моментом инерции* сечения называется взятая по всей площади сумма произведений элементарных площадок на обе координаты:

$$J_{xy} = \int_A xy \, dA.$$

Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и равным нулю. Центробежный момент инерции относительно осей, проходящих через центр тяжести сечения, равен нулю.

Оси, относительно которых центробежный момент равен нулю, называются главными. Главные оси, проходящие через центр тяжести, называют *главными центральными осями сечения*.

### Осевые моменты инерции

*Осевым моментом инерции* сечения относительно некоторой оси, лежащей в этой же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений элементарных площадок на квадрат их расстояния до этой оси:

1) осевой момент инерции сечения относительно оси  $Ox$

$$J_x = \int_A y^2 \, dA;$$

2) осевой момент инерции сечения относительно оси  $Oy$

$$J_y = \int_A x^2 \, dA.$$

## Полярный момент инерции сечения

Полярным моментом инерции сечения относительно некоторой точки (полюса) называется взятая по всей площади сумма произведений элементарных площадок на квадрат их расстояния до этой точки:

$$J_p = \int_A \rho^2 dA,$$

где  $\rho$  — расстояние до полюса (центра поворота) (рис. 25.1).

Поскольку  $\rho^2 = x^2 + y^2$ , получим: полярный момент инерции сечения равен сумме осевых:

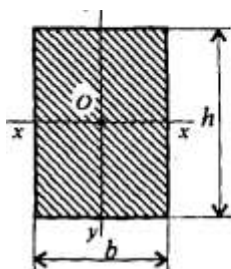
$$J_p = J_x + J_y.$$

Осевые моменты инерции характеризуют сопротивление сечения повороту относительно соответствующей оси.

Полярный момент инерции характеризует сопротивление сечения повороту вокруг полюса (начала координат). Единицы измерения моментов инерции:  $\text{м}^4$ ;  $\text{см}^4$ ;  $\text{мм}^4$ .

## Моменты инерции простых сечений

### Прямоугольник



Осевые:

$$J_x \text{ — относительно оси } xx \quad J_x = \frac{bh^3}{12};$$

$$J_y \text{ — относительно оси } yy \quad J_y = \frac{hb^3}{12}.$$

$$\text{Полярный } J_p = J_x + J_y.$$

Рис.32

## Круг и кольцо

Осевые:  $J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64}$  — круг;

$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64}(1 - c^4)$  — кольцо.

Полярный:  $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$  — круг;

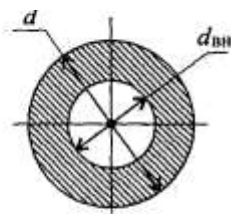


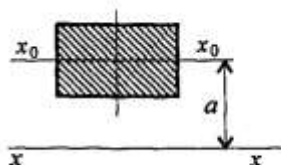
Рис. 33

$J_p = \frac{\pi d^4}{32}(1 - c^4)$  — кольцо,

где  $d$  — диаметр круга и наружный диаметр кольца;  $d_{\text{вн}}$  — внутренний диаметр кольца;  $c = d_{\text{вн}}/d$ .

### Моменты инерции относительно параллельных осей

$$J_x = J_{x_0} + a^2 A,$$



где  $J_x$  — момент инерции относительно оси  $xx$ ;

$J_{x_0}$  — момент инерции относительно оси  $x_0x_0$ ;  $A$  — площадь сечения;  $a$  — расстояние между осями.

Рис. 34

1. Момент инерции сложной фигуры является суммой моментов инерции частей, на которые ее разбивают. Разбить заданную фигуру на простейшие части, для каждой определить главные центральные моменты инерции по известным формулам.

2. Моменты инерции вырезов и отверстий можно представить отрицательными величинами.

3. Заданные сечения симметричны, главные центральные оси совпадают с осями симметрии составного сечения.

4. Моменты инерции частей, чьи главные центральные оси не совпадают с главными центральными осями сечения в целом, пересчитывают с помощью формулы для моментов инерции относительно параллельных осей. Расстояние между параллельными осями определить по чертежу.

5. При выполнении задания 2 главные центральные моменты инерции отдельных стандартных профилей определить по таблицам ГОСТ (Приложение 1).

**Пример 1.** Определить моменты инерции сечения, составленного из простых геометрических фигур, относительно главных центральных осей инерции по условию примера 6.

**Решение.** 1. Положение центра тяжести определено:  $y_C = 9,84$  см.

2. Для каждой фигуры проводим центральные оси  $x_1, x_2, x_3, x_4$  и  $x_5$ , причем оси  $x_3$  и  $x_4$  совпали

3. Проводим главные центральные оси. Вертикальную ось  $v$  совместим с осью симметрии, а горизонтальную ось  $u$  проведем через центр тяжести сечения  $C$  перпендикулярно оси  $v$ .

4. Момент инерции сечения относительно оси  $u$

$$J_u = J_u^I + J_u^{II} + J_u^{III} - J_u^{IV} - J_u^V.$$

Определим значение каждого слагаемого. Момент инерции первого прямоугольника

$$J_u^I = J_{x_1} + a_1^2 A = \frac{b_1 h_1^3}{12} + a_1 A_1 = \frac{40 \cdot 8^3}{12} + 15,16^2 \cdot 400 = 93\,636 \text{ см}^4.$$

Момент инерции второго прямоугольника

$$J_u^{II} = J_{x_2} + a_2 A_2 = \frac{b_2 h_2^3}{12} + a_2^2 A_2 = \frac{9 \cdot 42^3}{12} + 9,84^2 \cdot 378 = 92\,166 \text{ см}^4.$$

Момент инерции треугольника

$$J_u^{III} = J_{x_3} + a_3 A_3 = \frac{b_3 h_3^2}{36} + a_3^2 A_3 = \frac{7,5 \cdot 42^3}{36} + (-3,84^2 \cdot 157,5) = 17758 \text{ см}^4.$$

Момент инерции круга

$$J_y^{IV} = J_{x_5} + a_5^2 A_5 = \frac{\pi d^4}{64} + a_5^2 A_5 = \frac{3,14 \cdot 6^4}{64} + 7,16^2 \cdot 28,3 = 1515 \text{ см}^4.$$

Подставим числовые значения в формулу:

$$J_u = 93\,636 + 92\,166 + 2 \cdot 17758 - 1515 = 219\,803 \text{ см}^4.$$

5. Определим момент инерции сечения относительно оси  $v$ :

$$J_v = J_v^I + J_v^{II} + 2J_v^{III} - J_v^V,$$

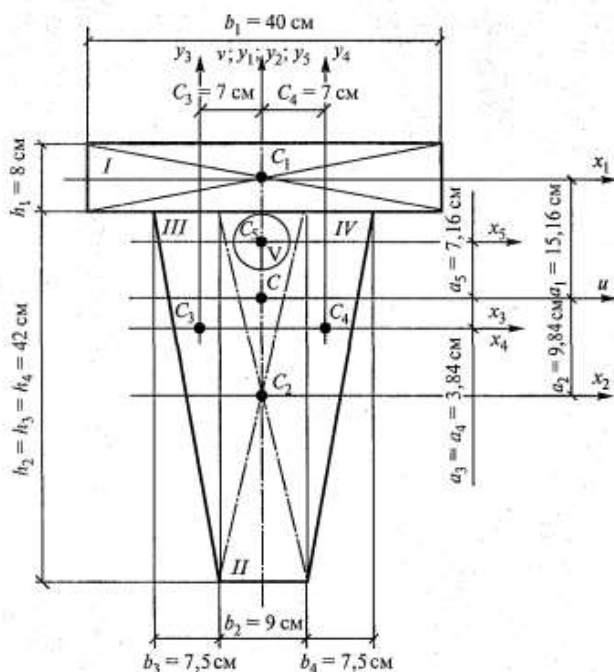


Рис. 35

где  $J_v^I = \frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{8 \cdot 40^3}{12} = 42\,667 \text{ см}^4$ ;

$$J_v^{II} = \frac{h_2 b_2^3}{12} = \frac{42 \cdot 9^3}{12} = 2552 \text{ см}^4$$

$$J_v^{III} = \frac{b_3 h_3^3}{36} + c_3^2 A_3 = \frac{42 \cdot 7.5^3}{36} + 7^2 \cdot 157.5 = 8210 \text{ см}^4;$$

$$J_v^V = J_v^V = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3.14 \cdot 6^4}{64} = 64 \text{ см}^4.$$

Подставим числовые значения в формулу для определения  $I_v$ :

$$J_v = 42\,667 + 2552 + 2 \cdot 8210 - 64 = 61\,575 \text{ см}^4.$$

Ответ:  $J_u = 219\,803 \text{ см}^4$ ;  $J_v = 61\,575 \text{ см}^4$ .

**Пример 2.** Определить моменты инерции сечения, составленного из прокатных профилей, относительно главных центральных осей инерции по условию примера 7. Сечение состоит из двутавра №33, швеллера №27, двух уголков 9/5,6 и листа 12\*180 мм.

**Решение.** 1. Положение центра тяжести определено в примере 25:  $y_C = 2,33$  см, если ось проходит через центр тяжести двутавра.

2. Проводим центральные оси для каждого профиля проката  $x_1, x_2, x_3, x_4$  и  $x_5$ .

3. Проводим главные центральные оси. Вертикальную ось  $v$  совмещаем с осью симметрии, а горизонтальную  $u$  проводим через центр тяжести сечения  $S$  перпендикулярно оси  $v$ .

4. Определим момент инерции сечения относительно оси  $u$ :

$$J_u = J_u^{\text{шв}} + J_u^{\text{уг}} + J_u^{\text{уг}} + J_u^{\text{дв}} + J_u^{\text{листа}}.$$

Учитывая, что уголки одинаковые и расположены на одинаковом расстоянии от оси  $u$ , получим:

$$J_u = J_u^{\text{шв}} + 2J_u^{\text{уг}} + J_u^{\text{шв}} + J_u^{\text{листа}}.$$

Определим величину каждого слагаемого. Момент инерции швеллера № 27 относительно оси  $u$

$$J_u^{\text{шв}} = J_{x_1}^{\text{шв}} + a_1^2 A_{\text{шв}} = 262 + 12,3^2 \cdot 35,2 = 5587 \text{ см}^4,$$

где  $J_{x_1}^{\text{шв}} = J_{y_{\text{табл}}}^{\text{шв}} = 262 \text{ см}^4$ ; момент инерции швеллера № 27 относительно центральной оси  $x_1$ , совпадающей с осью  $y$  (см. табл. 4 прил. I);  $a_1 = y_1 - y_C = 14,63 - 2,33 = 12,3$  см — расстояние между осями  $x_1$  и  $u$ ;  $A_{\text{шв}} = 35,2 \text{ см}^2$ .

Момент инерции уголка  $90 \times 56 \times 6$  относительно оси  $u$ :

$$J_u^{\text{уг}} = J_{x_2}^{\text{уг}} + a_2^2 A_{\text{уг}} = 21,2 + 6,55^2 \cdot 8,54 = 388 \text{ см}^4,$$

где  $J_{x_2}^{\text{уг}} = J_{y_{\text{табл}}}^{\text{уг}} = 21,2 \text{ см}^4$  — момент инерции уголка  $90 \times 56 \times 6$  относительно центральной оси, совпадающей с осью  $y$  (см. табл. 2 прил. I);  $a_2 = y_2 - y_C = 8,88 - 2,33 = 6,55$  см — расстояние между осями  $x_2$  и  $u$ ;  $A_{\text{уг}} = 8,54 \text{ см}^2$ .

Момент инерции двутавра № 33 относительно оси  $u$ :

$$J_u^{\text{дв}} = J_{x_4}^{\text{дв}} + a_4^2 A_{\text{дв}} = 9840 + 2,33^2 \cdot 53,8 = 10132 \text{ см}^4,$$

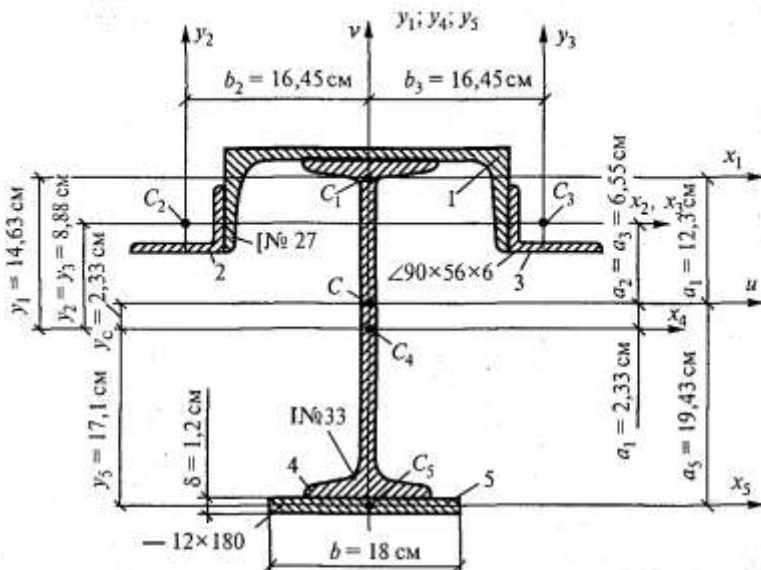


Рис. 36

где  $J_{x_4}^{дв} = J_{x_{табл}}^{дв} = 9840 \text{ см}^4$  — момент инерции двутавра № 33 относительно центральной оси  $x_4$ , которая совпадает с осью  $x$  (см. табл. 1 прил. I);  $a_4 = y_C = 2,33 \text{ см}$  — расстояние между осями  $x_4$  и  $u$ ;  $A_{дв} = 53,8 \text{ см}^2$ .

Момент инерции листа  $12 \times 180 \text{ мм}$  относительно оси  $u$ :

$$J_u^{\text{листа}} = J_{x_5}^{\text{листа}} + a_5^2 A_{\text{лист}} = 2,59 + 19,43^2 \cdot 21,6 = 8157 \text{ см}^4,$$

где  $J_{x_5}^{\text{листа}} = \frac{bd^3}{12} = \frac{18 \cdot 1,2^3}{12} = 2,59 \text{ см}^4$  — момент инерции листа относительно оси  $x_5$  (см. прил. II);  $a_5 = y_5 + y_C = 17,1 + 2,33 = 19,43 \text{ см}$  — расстояние между осями  $x_5$  и  $u$ ;  $A_{\text{лист}} = 18 \cdot 1,2 = 21,6 \text{ см}^2$ .

Подставим полученное значение в формулу (а):

$$J_u = 5587 + 2 \cdot 388 + 10132 + 8157 = 24652 \text{ см}^4.$$

5. Определим момент инерции сечения относительно оси  $v$ :

$$J_v = J_v^{\text{шв}} + 2J_v^{\text{уг}} + J_v^{\text{дв}} + J_v^{\text{листа}},$$

Момент инерции швеллера № 27 относительно оси  $v$ :

$$J_v^{\text{шв}} = J_{y_1}^{\text{шв}} = J_{x_{табл}}^{\text{шв}} = 4160 \text{ см}^4 \text{ (см. табл. 4 прил. I).}$$



Момент инерции уголка  $90 \times 56 \times 6$  относительно оси  $v$ :

$$J_v^{уг} = J_{y_2}^{уг} + b_2^2 A_{уг} = 70,6 + 16,45^2 \cdot 8,54 = 2382 \text{ см}^4,$$

где  $J_{y_2}^{уг} = J_{x \text{ табл}}^{уг} = 70,6 \text{ см}^4$  — момент инерции уголка относительно центральной оси  $y_2$ , которая совпадает с осью  $x$  (табл. 2 прил. I);  $b_2 = \frac{h_{шв}}{2} - y_{0(уг)} = \frac{27}{2} + 2,95 = 16,45 \text{ см}$  — расстояние между осью  $y_2$  и осью  $v$ ;  $A_{уг} = 8,54 \text{ см}^2$ .

Момент инерции двутавра № 30 относительно оси  $v$ :

$$J_v^{дв} = J_{y_4}^{дв} = J_{y \text{ табл}}^{дв} = 419 \text{ см}^4 \text{ (см. табл. 3 прил. I)}$$

Момент инерции листа  $12 \times 180$  мм относительно оси  $v$ :

$$J_v^{\text{листа}} = J_{y_5}^{\text{листа}} = \frac{\delta b^3}{12} = \frac{12 \cdot 18^3}{12} = 584 \text{ см}^4 \text{ (см. прил. II).}$$

Подставим полученные значения в выражение (б):

$$J_v = 4160 + 2 \cdot 2382 + 419 + 583 = 9926 \text{ см}^4.$$

Ответ:  $J_u = 24\,652 \text{ см}^4$ ;  $J_v = 9926 \text{ см}^4$ .

### **Практическая работа №15, 16**

по теме «Поперечный изгиб прямого бруса»

**Построение эпюр поперечных сил по длине балки**

### **Практическая работа №17, 18**

по теме «Поперечный изгиб прямого бруса»

**Построение эпюр изгибающих моментов по длине балки**

### **Практическая работа №19**

по теме «Поперечный изгиб прямого бруса»

**Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов по длине балки**

**Цель работы:** научиться строить эпюры  $Q$  и  $M$ .

## Методические указания:

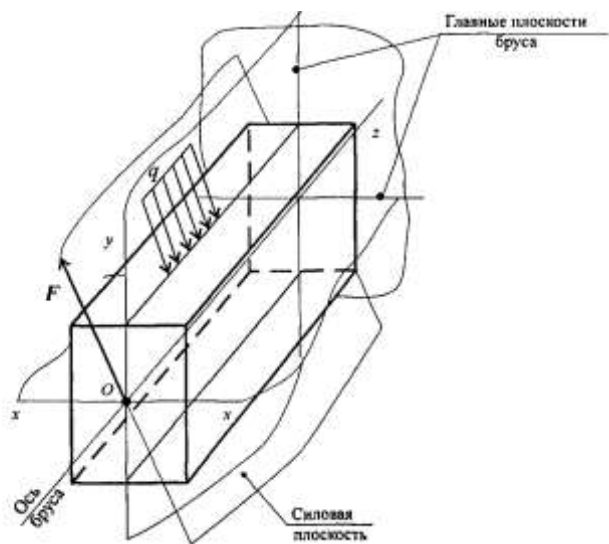


Рис. 37

*Знаки поперечных сил*

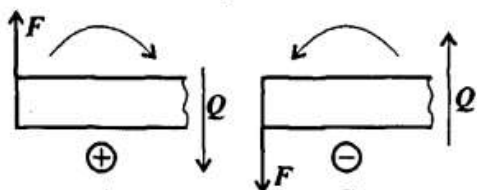


Рис. 38

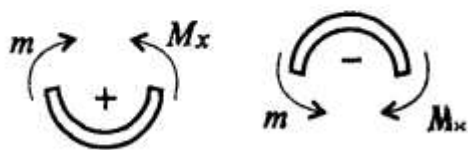


Рис. 39

## **Выводы**

*При чистом изгибе в поперечном сечении балки возникает только изгибающий момент, постоянный по величине.*

*При поперечном изгибе в сечении возникает изгибающий момент и поперечная сила.*

*Изгибающий момент в произвольном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, приложенных к отсеченной части, относительно рассматриваемого сечения.*

*Поперечная сила в произвольном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, действующих на отсеченной части на соответствующую ось.*

*При действии распределенной нагрузки возникает поперечная сила, линейно зависящая от координаты сечения.*

*Изгибающий момент на участке с распределенной нагрузкой меняется в зависимости от координаты сечения по параболическому закону.*

## **Дифференциальные зависимости при прямом поперечном изгибе**

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов существенно упрощается при использовании дифференциальных зависимостей между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью равномерно распределенной нагрузки (теорема Журавского):

*Поперечная сила равна производной от изгибающего момента по длине балки:*

$$\frac{dM_x}{dz} = Q.$$

*Интенсивность равномерно распределенной нагрузки равна производной от поперечной силы по длине балки:*

$$\frac{dQ}{dz} = q.$$

Из выше указанного следует:

если  $M_x = \text{const}$ , то  $Q = 0$ ;      если  $Q = \text{const}$ ; то  $q = 0$ .

**Пример 1.** Построить эпюры  $Q$  и  $M$  для балки, изображенной на рис. 40.

**Решение.** 1. *Определим опорные реакции балки.* Составим уравнения:

$$1) \sum M_A = 0; \quad 2) \sum M_B = 0.$$

Из первого уравнения найдем  $V_B$ :

$$-F(a+b) + q(b+c)\left(\frac{b+c}{2} - b\right) - V_B(c+d) - M = 0$$

или

$$-15 \cdot 2 + 20 \cdot 6 \cdot 2 - V_B \cdot 7 - 25 = 0,$$

$$\text{откуда } V_B = \frac{-15 \cdot 2 + 20 \cdot 6 \cdot 2 - 25}{7} = 26,4 \text{ кН.}$$

Из второго уравнения найдем  $V_A$ :

$$-F(a+b+c+d) + V_A(c+d) - q(b+c)\left(\frac{b+c}{2} + d\right) - M = 0$$

или

$$-15 \cdot 9 + V_A \cdot 7 - 20 \cdot 6 \cdot 5 - 25 = 0,$$

$$\text{откуда } V_A = \frac{15 \cdot 9 + 20 \cdot 6 \cdot 5 + 25}{7} = 108,6 \text{ кН.}$$

Выполним проверку:

$$\sum Y = V_A + V_B - F - q(b+c) = 0$$

или

$$108,6 + 26,4 - 15 - 20 \cdot 6 = 0, \quad \text{откуда } 135 - 135 = 0.$$

2. *Обозначим характерные сечения балки C, D, A, E, B, K.*

3. *Строим эпюру  $Q_x$ .* Определим значения поперечных сил в характерных сечениях:

$$Q_C = -F = -15 \text{ кН}; \quad Q_D = -F = -15 \text{ кН};$$

$$Q_A^{\text{лев}} = -F - qb = -15 - 20 \cdot 1 = -35 \text{ кН};$$

$$Q_A^{\text{прав}} = -F - qb + V_A = -15 - 20 \cdot 1 + 108,6 = 73,6 \text{ кН};$$

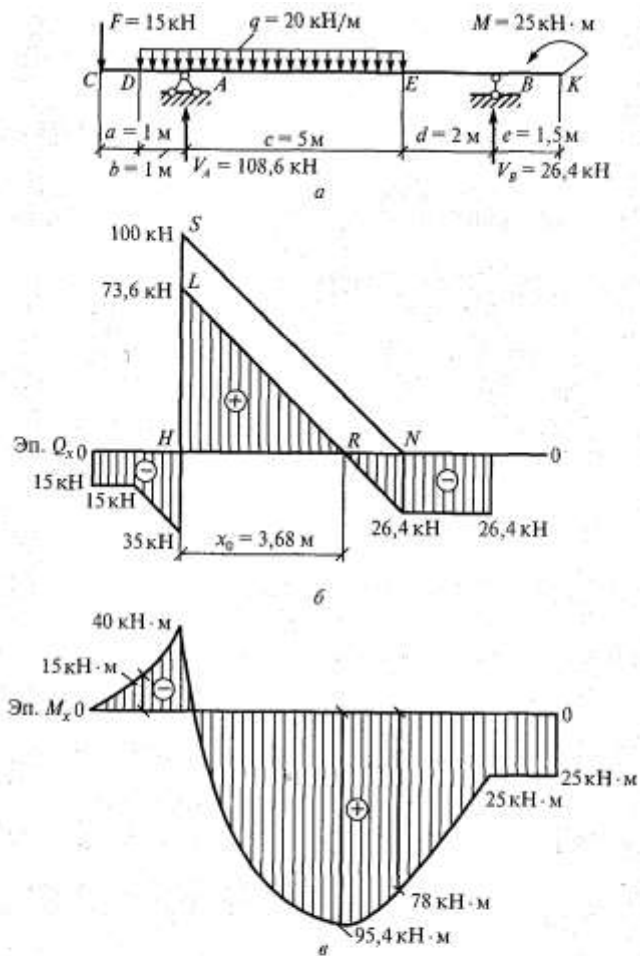


Рис. 40

$$Q_E = -F - q(b+c) + V_A = -15 - 20 \cdot 6 + 108,6 = -26,4 \text{ кН};$$

$$Q_B^{\text{лев}} = Q_E = -26,4 \text{ кН};$$

$$Q_B^{\text{прав}} = Q_B^{\text{лев}} + V_B = -26,4 + 26,4 = 0; \quad Q_K = 0.$$

Соединим полученные значения прямыми линиями (рис. 15, б) и получим эпюру  $Q_x$ . Эпюра  $Q_x$  на участке  $AE$  пересекает нулевую линию. Определим положение точки, в которой эпюра  $Q_x$  пересекает нулевую линию. Рассмотрим подобие треугольников  $HRL$  и  $HNS$  (см. рис. 15, б), откуда  $HR/HN = HL/HS$ , или  $x_0/5 = 73,6/100$ , откуда

$$x_0 = \frac{73,6 \cdot 5}{100} = 3,68 \text{ м}.$$

Это сечение считается также характерным для эпюры  $Q_x$  и  $M_x$ .

4. Строим эпюру  $M_x$ . Определим изгибающие моменты в характерных точках:

$$M_C = 0; \quad M_D = -Fa = -15 \cdot 1 = -15 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_A = -F(a+b) - (qb)(b/2) = -15 \cdot 2 - 20 \cdot 1 \cdot 0,5 = -40 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_E = -F(a+b+c) + V_A c - q(b+c)(b+c)/2 = \\ = -15 \cdot 7 + 108,6 \cdot 5 - 20 \cdot 6 \cdot 3 = 78 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x_0} = 3,68 = -F(a+b+x_0) - q(b+x_0)(b+x_0)/2 + V_A x_0 = \\ = -15 \cdot 5,68 - 20 \cdot 4,68 \cdot 2,34 + 108,6 \cdot 3,68 = 95,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_B = M = 25 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ (рассмотрена правая часть балки BK);}$$

$$M_K = M = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5. Строим эпюру  $M_x$  на участках между характерными точками:

а) на участке  $CD$  нагрузки нет, поэтому эпюра  $M_x$  — прямая линия, соединяющая значения  $M_C = 0$  и  $M_D = -15 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;

б) на участке  $DA$  действует распределенная нагрузка, поэтому эпюра  $M_x$  — парабола. Так как эпюра  $Q_x$  на этом участке не пересекает нулевую линию, то парабола не имеет экстремального значения, поэтому величины изгибающих моментов в сечениях  $D$  и  $A$  соединим кривой, значения которой находятся в интервале  $-15 \text{ кН} \cdot \text{м} \dots -40 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;

в) на участке  $AE$  действует распределенная нагрузка, поэтому эпюра  $M_x$  — парабола. Так как эпюра  $Q_x$  на этом участке пересекает нулевую линию, то парабола имеет экстремальное значение (вершину), поэтому эпюру  $M_x$  строим по трем значениям:

$$M_D = -40 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{x_0} = 95,4 \text{ кН} \cdot \text{м} \text{ и } M_E = 78 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

г) на участке  $EB$  нет нагрузки, поэтому эпюра  $M_x$  — прямая, соединяющая значения  $M_E = 78 \text{ кН} \cdot \text{м}$  и  $M_B = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;

д) на участке  $BK$  нет нагрузки, поэтому эпюра  $M_x$  — прямая линия, соединяющая значения  $M_B = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}$  и  $M_K = 25 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Эпюра  $M_x$  построена (рис. 15, в).

В качестве проверки возьмем сумму моментов всех сил относительно точки, расположенной на расстоянии  $x_0$  от левой опоры, но рассмотрим правую часть балки:

$$\begin{aligned} M_{x_0} &= q(c - x_0)(c - x_0)/2 + V_B(c - x_0 + d) + M = \\ &= -20 \cdot 1,32 \cdot 0,66 + 26,4 \cdot 3,32 + 25 = 95,3 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Разница в значениях  $M_x$  при рассмотрении левых и правых сил возможна из-за округления величин опорных реакций и расстояния  $x_0$ .

### Практическая работа №20

по теме «Поперечный изгиб прямого бруса»

**Подбор сечения балки из условия прочности по нормальным и касательным напряжениям**

### Практическая работа №21

по теме «Поперечный изгиб прямого бруса»

**Подбор сечения стальной двутавровой балки из условий прочности и жесткости**

**Пример 1.** По условию примера ПР№18,19 подобрать сечение стальной двутавровой балки. Проверить прочность принятого сечения по нормальным и касательным напряжениям и построить их эпюры. Материал – сталь марки С-235.

**Решение.** Строим эпюры  $Q$  и  $M$  (смотри пример). Наибольшее значение поперечной силы  $Q_{\max} = 73,6 \text{ кН}$ , изгибающего момента  $M_{\max} = 95,4 \text{ кНм}$ .

2. Подберем сечение стальной двутавровой балки по наибольшему изгибающему моменту

$$W_x^{\text{тр}} = \frac{M_{\text{max}}}{R} = \frac{95,4 \cdot 10^3}{230} = 415 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 415 \text{ см}^3,$$

где  $R = 230$  МПа — расчетное сопротивление стали марки С-235 (прил. VIII).

По табл. 3 прил. I принимаем двутавровую балку № 30 с  $W_x = 472 \text{ см}^3$ , что больше, чем  $W_x^{\text{тр}} = 415 \text{ см}^3$ .

3. Проверим прочность принятого сечения:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = \frac{95,4 \cdot 10^{-3}}{10^{-6}} = 202,1 \text{ МПа} < R = 230 \text{ МПа}.$$

Прочность сечения по нормальным напряжениям обеспечена.

4. Строим эпюру нормальных напряжений. Отложим от нулевой линии 0—0

значение  $\sigma_{\text{max}} = 202,1$  МПа и  $\sigma_{\text{min}} = 202,1$  МПа.

$= 202,1$  МПа и соединим полученные точки. Верхняя часть испытывает сжатие, нижняя — растяжение, так как по эпюре  $M_x$  видно, что балка прогибается (обращена выпуклостью) вниз.

5. Проверим прочность балки по касательным напряжениям. Заменяем действительное сечение упрощенным (рис. 46, в). Размеры  $d = 6,5$  мм;  $t = 10,2$  мм;  $b = 135$  мм приняты по табл. 3 прил. I.

Определим наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{1-1} = \tau_{\text{max}} = \frac{Q_{\text{max}} S_x}{J_x b},$$

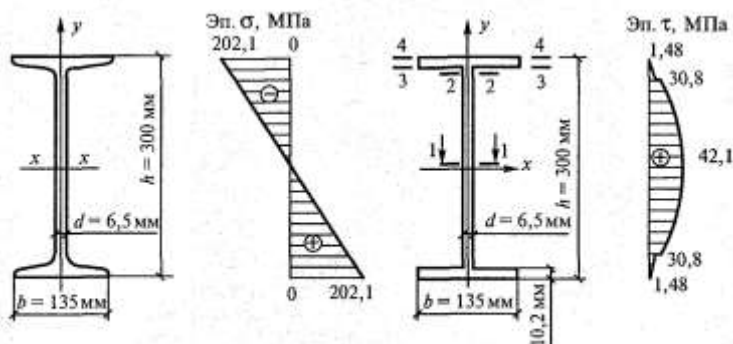


Рис. 41



$$\begin{aligned} \text{где } Q_{\max} &= 73,6 \text{ кН}; S_x = tb(h/2 - t/2) + d(h/2 - t) \left( \frac{h/2 - t}{2} \right) = \\ &= 1,02 \cdot 13,5 \left( \frac{30}{2} - \frac{1,02}{2} \right) + 0,65 \left( \frac{30}{2} - 1,02 \right) \left( \frac{15 - 1,02}{2} \right) = \\ &= 263 \text{ см}^3; \end{aligned}$$

$$J_x = 7080 \text{ см}^4; d = 0,65 \text{ см.}$$

Подставим числовые значения в формулу для  $\tau_{\max}$  (сечение 1—1):

$$\tau_{\max} = \frac{73,6 \cdot 263}{7080 \cdot 0,65} = 4,21 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 42,1 \text{ МПа.}$$

Проверим прочность сечения по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = 42,1 \text{ МПа} < R_s = 130 \text{ МПа,}$$

т. е. прочность обеспечена.

В прокатных балках, которые не несут больших сосредоточенных сил в приопорных участках, это условие обычно соблюдается с большим запасом.

6. Построим эпюру  $\tau$ . Напряжение в сечении 2—2

$$\tau_{2-2} = \frac{73,6 \cdot 192,5}{7080 \cdot 0,65} = 3,08 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 30,8 \text{ МПа,}$$

$$\text{где } S_x = tb(h/2 - t/2) = 1,02 \cdot 13,5 (30/2 - 1,02/2) = 192,5 \text{ см.}$$

## Практическая работа №18

по теме « Устойчивость центрально- сжатых стержней»

**Подбор сечения центрально сжатой стальной стойки с использованием коэффициента продольного изгиба.**

**Цель работы:** научиться подбирать и проверять сечение стойки из условия устойчивости.

## Методические указания:



Рис.42

Равновесие считают устойчивым, если за счет сил упругости после снятия внешней отклоняющей силы стержень восстановит первоначальную форму (рис 78 ).

Если упругое тело после отклонения от равновесного положения не возвращается к исходному состоянию, то говорят, что произошла потеря устойчивости, а равновесие было неустойчивым.

Потерю устойчивости под действием центрально приложенной продольной сжимающей силы называют *продольным изгибом*.

Наибольшее значение сжимающей силы, при которой прямолинейная форма стержня сохраняет устойчивость, называют *критической силой*. Даже при небольшом превышении критического значения силы стержень недопустимо деформируется и разрушается.

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu l)^2}$$

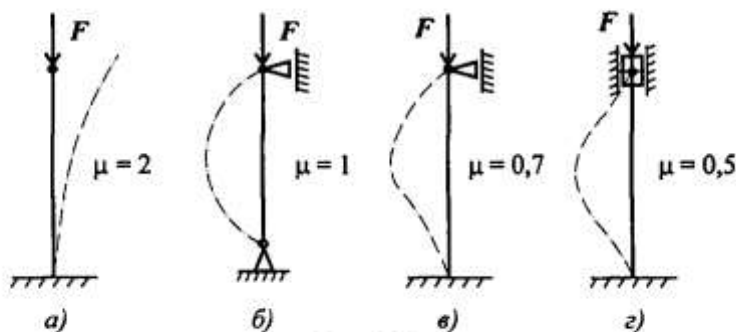


Рис. 43

где  $E$  — модуль упругости;

$J_{\min}$  — минимальный осевой момент инерции стержня;

$l$  — длина стержня.

Потеря устойчивости происходит в плоскости наименьшей жесткости, поэтому в формулу входит минимальный из осевых моментов инерции сечения ( $J_x$  или  $J_y$ ).

Длина стержня заменяется ее приведенным значением, учитывающим форму потери устойчивости в каждом случае:  $l_{\text{прив}} = \mu l$ , где  $\mu$  — коэффициент приведения длины, зависящий от способа закрепления стержня (рис. 43)

### Порядок выполнения расчета на устойчивость

1. Получение сведений о материале стержня для определения предельной гибкости стержня расчетным путем или по таблице:

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}}$$

2. Получение сведений о геометрических размерах поперечного сечения, длине и способах закрепления концов для определения категории стержня в зависимости от гибкости:

$$i_{\text{min}} = \sqrt{\frac{J_{\text{min}}}{A}},$$

где  $A$  — площадь сечения;  $J_{\text{min}}$  — минимальный момент инерции (из осевых);

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\text{min}}},$$

$\mu$  — коэффициент приведенной длины.

3. Выбор расчетных формул для определения критической силы и критического напряжения.

При  $\lambda_0 < \lambda < \lambda_{\text{пред}}$  — расчет по эмпирическим формулам.

При  $\lambda > \lambda_{\text{пред}}$  — расчет по формуле Эйлера.

4. Проверка и обеспечение устойчивости.

При расчете по формуле Эйлера условие устойчивости:

$$F \leq \frac{F_{\text{кр}}}{[s_y]}, \quad F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_{\text{min}}}{(\mu l)^2},$$

$F$  — действующая сжимающая сила;  $[s_y]$  — допускаемый коэффициент запаса устойчивости.

**Пример 1.** Подобрать сечение центрально-сжатой стальной стойки, показанной на рисунке 44. Сталь С - 245

**Решение.** 1. Задаемся величиной  $\varphi = 0,7$ .

2. Определим требуемую площадь сечения

$$A_{\text{тр}} = \frac{F}{\varphi R} = \frac{0,85 \text{ МН}}{0,7 \cdot 240 \text{ МПа}} = 0,00506 \text{ м}^2 = 50,6 \text{ см}^2,$$

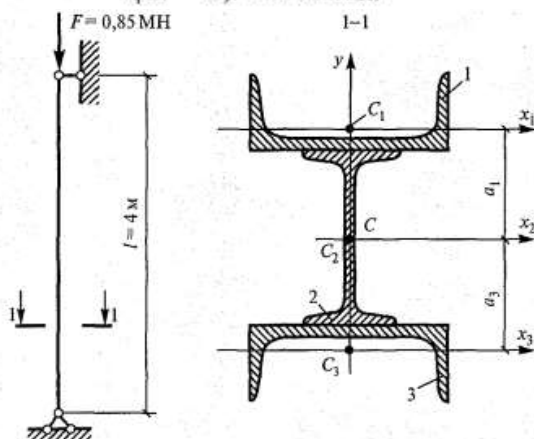


Рис. 44

где  $R = 240 \text{ МПа}$  — расчетное сопротивление стали С-245 (прил. VIII).

Принимаем все профили одинаковыми по площади. На один профиль требуется площадь  $50,6 : 3 = 16,8 \text{ см}^2$ . Принимаем два швеллера № 14а площадью  $A_1 = 2 \cdot 17 = 34 \text{ см}^2$  и двутавровую балку № 14 площадью  $A_2 = 17,4 \text{ см}^2$ . Общая площадь сечения

$$A = 34 + 17,4 = 51,4 \text{ см}^2$$

3. Проверим устойчивость принятого сечения стержня в следующем порядке:

а) определим расчетную длину стержня

$$l_0 = \mu l = 1 \cdot 4 = 4 \text{ м},$$

где  $\mu = 1$  для стержня с шарнирным закреплением концов (прил. III);

б) определим момент инерции сечения относительно оси  $x$ :

$$\begin{aligned} J_x &= J_x^{\text{дв}} + 2J_x^{\text{шв}} = J_{x \text{ табл}}^{\text{дв}} + 2(J_{y \text{ табл}}^{\text{шв}} + a_1^2 A_{\text{шв}}) = \\ &= 572 + 2(57,5 + 8,87^2 \cdot 176) = 3353 \text{ см}^4, \end{aligned}$$

$$\text{где } a_1 = \frac{h_{\text{дв}}}{2} + z_{0(\text{шв})} = \frac{14}{2} + 1,87 = 8,87 \text{ см}.$$

Определим момент инерции сечения относительно оси  $y$ :

$$J_y = J_y^{\text{шв}} + 2J_y^{\text{шб}} = J_{y \text{ табл}}^{\text{шв}} + 2J_{x \text{ табл}}^{\text{шб}} = 41,9 + 2 \cdot 545 = 1132 \text{ см}^4;$$

в) определим радиусы инерции сечения

$$i_x = \sqrt{J_x/A} = \sqrt{3353/51,4} = 8,08 \text{ см};$$

$$i_y = \sqrt{J_y/A} = \sqrt{1132/51,4} = 4,7 \text{ см};$$

г) определим гибкость стержня относительно осей  $x$  и  $y$ :

$$\lambda_x = l_0/i_x = 400/8,08 = 49,5;$$

$$\lambda_y = l_0/i_y = 400/4,7 = 85,1;$$

д) для наибольшего значения гибкости  $\lambda_y = 85,1$  определим коэффициент  $\varphi$  (см. прил. IV) по интерполяции между значениями

$$\lambda = 80 (\varphi = 0,686) \text{ и } \lambda = 90 (\varphi = 0,612);$$

$$\varphi = 0,686 - \frac{0,686 - 0,612}{10} (85,1 - 80) = 0,648;$$

е) определим расчетное напряжение в сечении

$$\sigma = \frac{F}{\varphi A} = \frac{0,85}{0,648 \cdot 51,4 \cdot 10^{-4}} = 255,2 \text{ МПа} > R = 240 \text{ МПа}.$$

Это недопустимо, поэтому необходим перерасчет.

1. Принимаем во втором приближении среднее значение между тем, которым задались, и тем, что получили:

$$\varphi = \frac{0,648 + 0,7}{2} = 0,687.$$

2. Требуемая площадь сечения

$$A_{\text{тр}} = \frac{0,85}{0,687 \cdot 240} = 51,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 51,6 \text{ см}^2.$$

На один профиль требуется  $51,6 : 3 = 17,2 \text{ см}^2$ . Принимаем два швеллера № 16 с  $A_1 = 2 \cdot 18,1 = 36,2 \text{ см}^2$  и двутавровую балку № 14 с  $A_2 = 17,4 \text{ см}^2$ . Полная площадь сечения

$$A = 2 \cdot 18,1 + 17,4 + 53,6 \text{ см}^2.$$

3. Проверим устойчивость стойки:

а)  $l_0 = 4 \text{ м}$ , осталось прежним;

б) поскольку  $J_x > J_y$ , определим наименьший момент инерции, который дает наибольшую гибкость:

$$J_y = J_y^{\text{дв}} + 2J_y^{\text{шв}} = J_{y \text{ табл}}^{\text{дв}} + 2J_{x \text{ табл}}^{\text{шв}} = 41,9 + 2 \cdot 747 = 1536 \text{ см}^4;$$

в) радиус инерции

$$i_y = \sqrt{J_y/A} = \sqrt{1536/53,6} = 5,35 \text{ см};$$

г) гибкость стержня

$$\lambda_y = l_0/i_y = 400/5,35 = 74,8;$$

д) коэффициент продольного изгиба получим интерполяцией между

$$\lambda = 70 (\varphi = 0,754) \text{ и } \lambda = 80 (\varphi = 0,686);$$

$$\varphi = 0,754 - \frac{0,754 - 0,686}{10} (74,8 - 70) = 0,721;$$

е) расчетное напряжение

$$\sigma = \frac{0,85}{0,721 \cdot 53,6 \cdot 10^{-4}} = 219,9 \text{ МПа} < R = 240 \text{ МПа},$$

ж) недонапряжение равно

$$\frac{240 - 219,9}{240} 100\% = 8,37 > 5\%,$$

что допустимо, но нежелательно.

Выполним перерасчет, уменьшив номера профилей и, как правило, площадь поперечного сечения.

Возможны такие варианты сечения: двутавровая балка № 16 и два швеллера № 14 ( $A = 51,4 \text{ см}^2$ ); двутавровая балка № 16 и два швеллера № 14 а ( $A = 54,2 \text{ см}^2$ ). В первом случае напряжение  $\sigma = 268,4 \text{ МПа}$ , во втором  $\sigma = 243,5 \text{ МПа}$ . Решение необходимо провести самостоятельно по приведенной ранее схеме. В обоих случаях напряжения получились больше расчетного сопротивления  $R = 240 \text{ МПа}$ , что недопустимо.

Нам не удалось добиться того, чтобы недонапряжение стало меньше 5 %, поэтому оставляем сечение из двутавровой балки № 14 и двух швеллеров № 16 ( $A = 53,6 \text{ см}^2$  и  $R = 219,9 \text{ МПа}$ ).

Интересно отметить, что при площади сечения  $A = 53,6 \text{ см}^2$  стойка недонапряжена на 8,37 %, а при площади сечения  $A = 54,2 \text{ см}^2$  перенапряжена на 1,4 %, т.е. при меньшей площади сечения стойка обладает большей устойчивостью (жесткостью). Такое явление происходит потому, что кроме площади сечения на устойчивость стойки влияют другие геометрические характеристики.

*Ответ:* принято сечение стойки из двух швеллеров № 16 и двутавровой балки № 14.

## Практическая работа №23

по теме «Многопролетные статически определимые балки»

### Расчет шарнирной балки с построением схемы взаимодействия элементов

## Практическая работа №24

по теме «Многопролетные статически определимые балки»

### Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов в многопролётной статически определимой (шарнирной) балке

**Цель работы:** научиться строить эпюры  $Q$  и  $M$  для шарнирных балок.

#### Методические указания:

Многопролетные (разрезные) статически определимые балки представляют собой систему простых балок. При этом различают основные и вспомогательные балки.

**Основные балки** – геометрически неизменяемые системы, прикрепленные к основанию при помощи двух шарнирных опор или заделки.

**Вспомогательной балкой** называется балка, которую можно выбросить из многопролетной балки и она останется геометрически неизменяемой.

Внутренние усилия в вспомогательной балке можно определять независимо от оставшейся части, причем опорные реакции в шарнире, с помощью которого вспомогательная балка присоединяется к многопролетной, будут служить внешними силами для оставшейся части.

В зависимости от расположения опор и шарниров многопролетные балки могут быть разными:

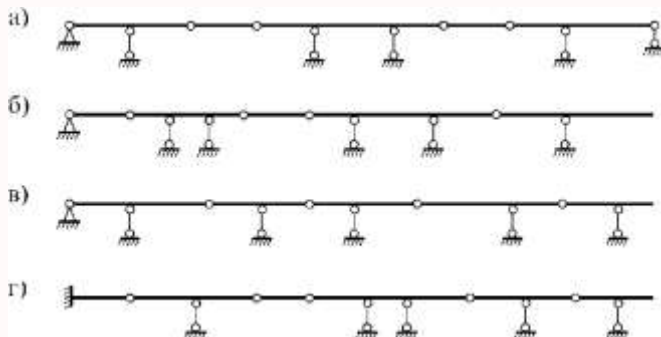


Рис. 45

Для геометрической неизменяемости и статической определимости многопролетных балок должно выполняться условие:

$$n_{ш} = n_{C_0} - 3$$

где  $n_{ш}$  – количество шарниров;

$n_{C_0}$  – количество реакций, которые теоретически могут возникать во всех опорах балки.

Правила для установки шарниров для многопролетных балок:

- 1) в каждом пролете (участок между опорами) может быть установлено не более двух шарниров;
- 2) пролеты с двумя шарнирами не могут следовать друг за другом и должны идти за пролетами без шарниров (кроме балок с заделками);
- 3) пролеты с одним шарниром должны располагаться друг за другом (начиная со второго пролета).

Взаимодействие частей многопролетной балки исследуется путем составления их поэтажных схем. Все основные балки изображаются в самом низу. Те части балки, которые примыкают к основным балкам и могут нести нагрузку только при опирании на основные балки, изображаются этажом выше. Например, рассмотренные на рисунке выше многопролетные балки можно представить в виде следующих этажных схем:

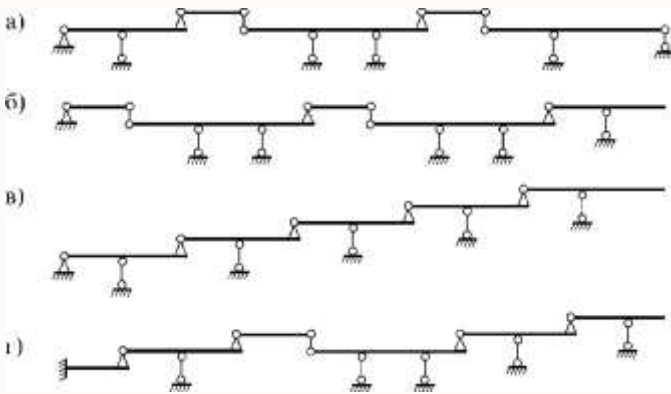


Рис. 46



**Расчет многопролетных балок** начинается с самого верхнего этажа. Вначале от приложенной к ней нагрузки определяются опорные реакции и внутренние усилия ( $M, Q, N$ ) для этой части балки. Далее определение внутренних усилий выполняют для балки лежащей ниже. Для балки, лежащей ниже, необходимо кроме внешней нагрузки, расположенной на ней, приложить и давление от вышележащей балки (которое равно реакции в шарнире в вышележащем этаже, но направлено в противоположную сторону). Затем определяются реакции и внутренние усилия на рассматриваемом этаже. Далее расчет продолжается до самого нижнего этажа.

**Пример 1.** Построить эпюры внутренних усилий для многопролетной балки.

Строим поэтажную схему для многопролетной балки

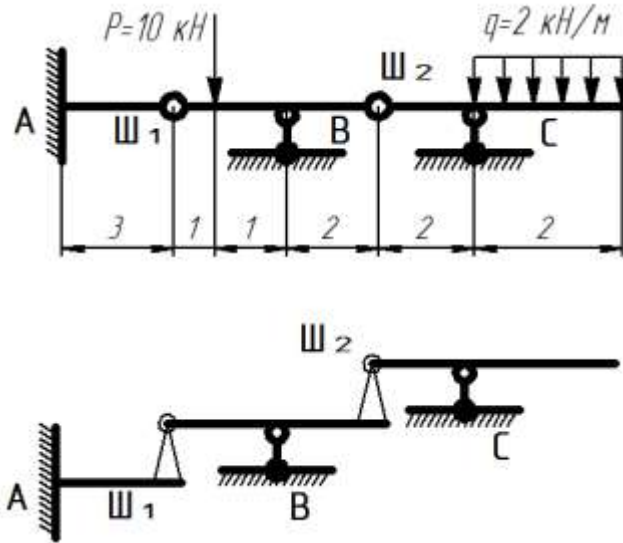


рис. 47

Рассчитываем балку Ш<sub>2</sub>С:

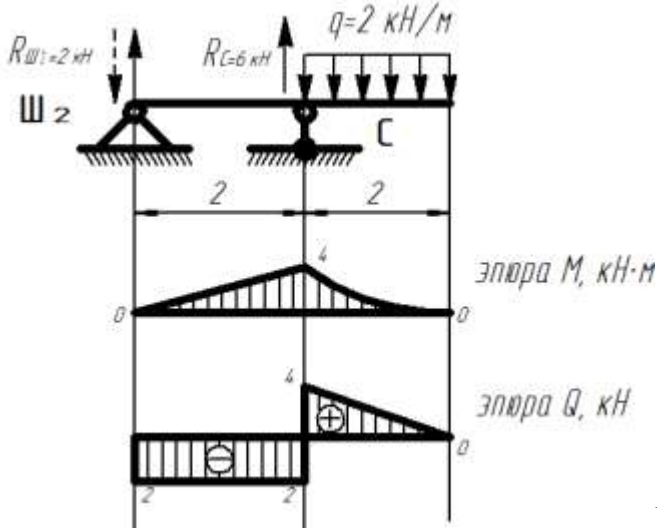


Рис. 48

Определяем реакции в опорах:

$$\begin{aligned} \sum M_{Ш_2} &= 0 \\ q \cdot 2 \cdot \left(\frac{2}{2} + 2\right) - R_C \cdot 2 &= 0 \\ R_C &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2} = 6 \text{ кН} \\ \sum M_C &= 0 \\ R_{Ш_2} \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} &= 0 \\ R_{Ш_2} &= -\frac{2 \cdot 2 \cdot 1}{2} = -2 \text{ кН} \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} \sum Y &= 0 \\ -R_{Ш_2} + R_C - q \cdot 2 &= 0 \\ -2 + 6 - 2 \cdot 2 &= 0 \end{aligned}$$

Построение эпюр выполняется как для простой однопролетной балки.

Рассчитываем балку Ш<sub>1</sub>Ш<sub>2</sub>:

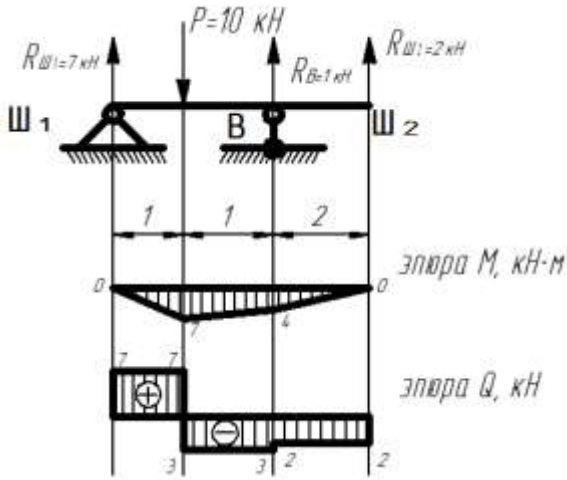


Рис. 49

Определяем реакции в опорах:

$$\sum M_{Ш_1} = 0$$

$$P \cdot 1 - R_B \cdot 2 - R_{Ш_2} \cdot 4 = 0$$

$$R_B = \frac{10 \cdot 1 - 2 \cdot 4}{2} = 1 \text{ кН}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$R_{Ш_1} \cdot 2 - P \cdot 1 - R_{Ш_2} \cdot 2 = 0$$

$$R_{Ш_1} = \frac{10 \cdot 1 + 2 \cdot 2}{2} = 7 \text{ кН}$$

Проверка:

$$\sum Y = 0$$

$$R_{Ш_1} - P + R_B + R_{Ш_2} = 0$$

$$7 - 10 + 1 + 2 = 0$$

Рассчитываем балку АШ<sub>1</sub>:

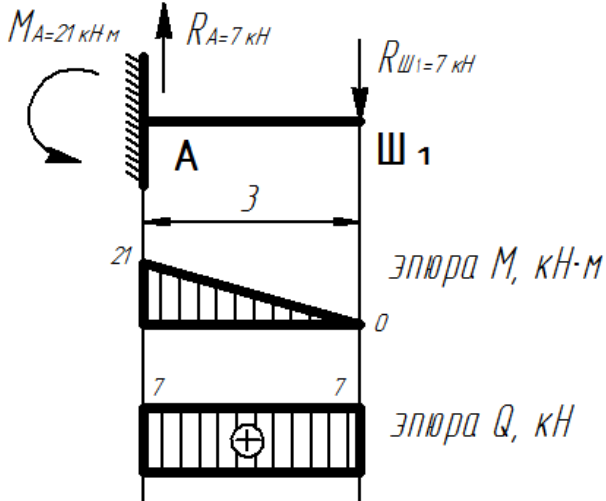


Рис. 50

Определяем реакции в опорах:

$$\sum M_A = 0$$

$$-M_A + R_{Ш1} \cdot 3 = 0$$

$$M_A = 7 \cdot 3 = 21 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

$$\sum Y = 0$$

$$R_A - R_{Ш1} = 0$$

$$R_A = 7 \text{ кН}$$

**Пример 2.** Для шарнирно – консольной балки построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (Рисунок 51).

*Решение.* Выполним кинематический анализ. В данной балке  $D = 3$ ;  $Ш = 2$ ;  $C_{оп} = 5$ .

Степень свободы  $n = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0$ .

Балка геометрически неизменяема, имеет необходимое число связей. Основные балки  $ABC$  и  $DKE$ . Подвесной балкой является балка  $CD$ . Строим поэтажную схему. Переходим к аналитическому расчету. Расчет начинаем с подвесной балки  $CD$ , которая представляет однопролетную балку с шарнирными опорами, нагруженную силой  $F$  посередине. Опорные реакции  $V_C = V_D = F/2 = 5$  кН. Строим эпюру поперечных сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_x$  для этой балки.

Сечение  $C$ :  $Q_y = 5$ ;  $M_x = 0$ .

Сечение в середине пролета:  $Q_y^{лев} = 5$  кН;  $Q_y^{прав} = V_C - F = 5 - 10 = -5$  кН.

$M_{хсп} = V_C \cdot 1 = 5 \cdot 1 = 5$  кН.

Сечение  $D$ :  $M_x = 0$ .

Подвесная балка передает давление на две консольные балки  $ABC$  и  $DKE$ . Находим реакции в основных балках:

$$\sum M_A = 0;$$

$$\sum M_A = F \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 1 = 2V_B; \quad V_B = (5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \cdot 1)/2 = 11,5 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0; \quad 5 \cdot 1 - 8 \cdot 1 + V_A \cdot 2 = 0; \quad V_A = 1,5 \text{ кН;}$$

$$\sum M_K = 0; \quad -5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - V_E \cdot 2 = 0; \quad V_E = 0,5 \text{ кН;}$$

$$\sum M_E = 0; \quad -5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 1 + V_K \cdot 2 = 0; \quad V_K = 10,5 \text{ кН.}$$

Эпюра поперечных сил  $Q_y$  для балки  $ABC$ .

Сечение  $A$ :  $Q_y = 1,5$  кН;

сечение  $B$ :  $Q_y^{лев} = 1,5 - q \cdot 2 = -6,5$  кН;  $Q_y^{пр} = 1,5 - q \cdot 2 + V_B = 1,5 - 8 + 11,5 = 5$  кН. Определяем, на каком расстоянии от точки  $A$   $Q_y = 0$ :  $V_A - qz_0 = 0$ ,  $z_0 = V_A/q = 0,375$  м.

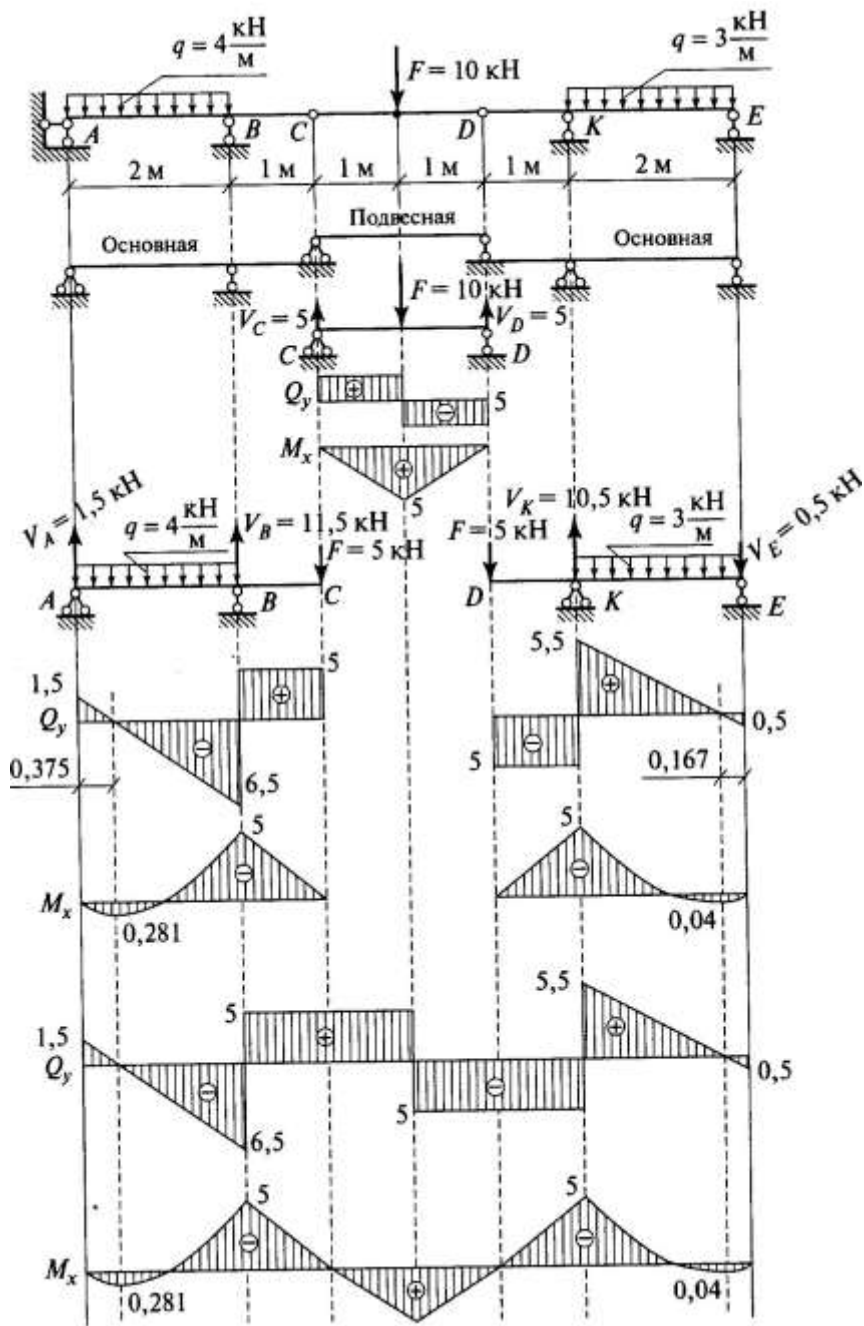


Рис. 51

Эпюра изгибающих моментов  $M_x$ .

Сечение  $A$ :  $M_x = 0$ .

$M_x$  на расстоянии 0,375 м от точки  $A$ :

$$M_x = V_A \cdot 0,375 - q \cdot 0,375(0,375/2) = 0,281 \text{ кНм};$$

сечение  $B$ :  $M_x = V_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = -5 \text{ кНм};$

сечение  $C$ :  $M_x = 0$ .

По этим данным строим эпюры  $Q_y$  и  $M_x$ .

Для балки  $DKE$ .

Эпюра поперечных сил  $Q_y$ .

Сечение  $D$ :  $Q_y = -F = -5 \text{ кН};$

сечение  $K$ :  $Q_y^{\text{лев}} = -5 \text{ кН}; Q_y^{\text{прав}} = -5 + V_K = -5 + 10,5 = 5,5 \text{ кН}.$

Сечение  $E$ :  $Q_y = 5,5 - q \cdot 2 = -0,5 \text{ кН}.$

Расстояние, где  $Q_y = 0$ :  $z_0 = V_E/q = 1,167 \text{ м}.$

Эпюра изгибающих моментов  $M_x$ .

Сечение  $D$ :  $M_x = 0;$

сечение  $K$ :  $M_x = -F \cdot 1 = -5 \text{ кНм};$

сечение  $E$ :  $M_x = 0$ .

$M_x$  на расстоянии 0,167 м от точки  $E$ :

$$M_x = V_A \cdot 0,167 - q \cdot 0,167 \cdot (0,167/2) = 0,04 \text{ кНм}.$$

По полученным данным строим эпюры  $Q_y$  и  $M_x$ .

Окончательные эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  в заданной многопролетной шарнирной балке строятся путем объединения соответствующих эпюр, построенных для каждой балки.

### Практическая работа №25

по теме «Статически определимые плоские рамы»

**Построение эпюр поперечных сил и продольных сил для простой статически определимой рамы**

### Практическая работа №26

по теме «Статически определимые плоские рамы»

**Построение эпюр изгибающих моментов для простой статически определимой рамы**

**Цель работы:** научиться строить эпюры  $Q$ ,  $N$  и  $M$

## Методические указания:

1. *Определяют опорные реакции рамы.* Для рам, не имеющих промежуточных шарниров, опорные реакции могут быть определены из трех уравнений равновесия вида:

$$\text{I. } 1) \sum M_A = 0; \quad 2) \sum M_B = 0; \quad 3) \sum X = 0.$$

Для рам, имеющих промежуточный шарнир, необходимо иметь четыре уравнения для определения неизвестных реакций (точнее, составляющих реакций), например:

$$\text{II. } 1) \sum M_C^{\text{лев}} = 0; \quad 2) \sum X = 0; \quad 3) \sum M_A = 0; \quad 4) \sum M_B = 0.$$

где  $C$  — промежуточный шарнир;  $A, B$  — опоры рамы.

При составлении уравнений нужно стремиться к тому, чтобы каждое из них содержало по одному неизвестному. Этого можно достичь, выбирая для каждой рамы свой порядок составления уравнений. Правильность определения вертикальных реакций можно проверить, используя уравнение  $\sum Y = 0$ .

2. *Обозначают характерные сечения рамы.* Эти сечения соответствуют точкам приложения сил, точкам опор, узлов, шарниров. Обозначают стойки и ригель рамы.

3. *Определяют значения поперечных сил* в характерных сечениях. При этом, если раму обходить изнутри, правила определения поперечных сил остаются такими же, как для балок (см. порядок решения задачи самостоятельной работы 6). По найденным значениям строят эпюру  $Q_x$ . Положительные значения поперечных сил откладывают на чертеже снаружи рамы, а отрицательные — изнутри.

4. *Определяют значения изгибающих моментов* в характерных сечениях. Правила определения их остаются такими же, как для балок. По найденным значениям строят эпюру  $M_x$ . Ординаты моментов откладывают со стороны растянутого волокна, и знак на эпюре при этом не ставят. Это правило совпадает с правилом, принятым в сопротивлении материалов.

5. *Определяют значения продольных сил* в элементах рамы: стойках и ригеле. Продольная сила в сечении равна сумме проекций всех сил, расположенных по одну сторону от этого сечения (только слева или только справа) на ось элемента. Если сила вызывает сжатие, ее считают отрицательной (со знаком «минус»), если растяжение — положительной (со знаком «плюс»). Значения  $N_x$  принято откладывать по обе стороны от оси элемента.



**Пример 1.** Для простой статически определимой рамы построить эпюры поперечных сил, продольных сил и изгибающих моментов (рисунок 52).

**Решение. 1.** *Определим опорные реакции.* Рама не имеет промежуточных шарниров, поэтому используем уравнения равновесия вида I.

Из первого уравнения определим  $V_B$ :

$$Fh/2 + q_1 ll/2 - q_2 hh/2 - V_B l = 0$$

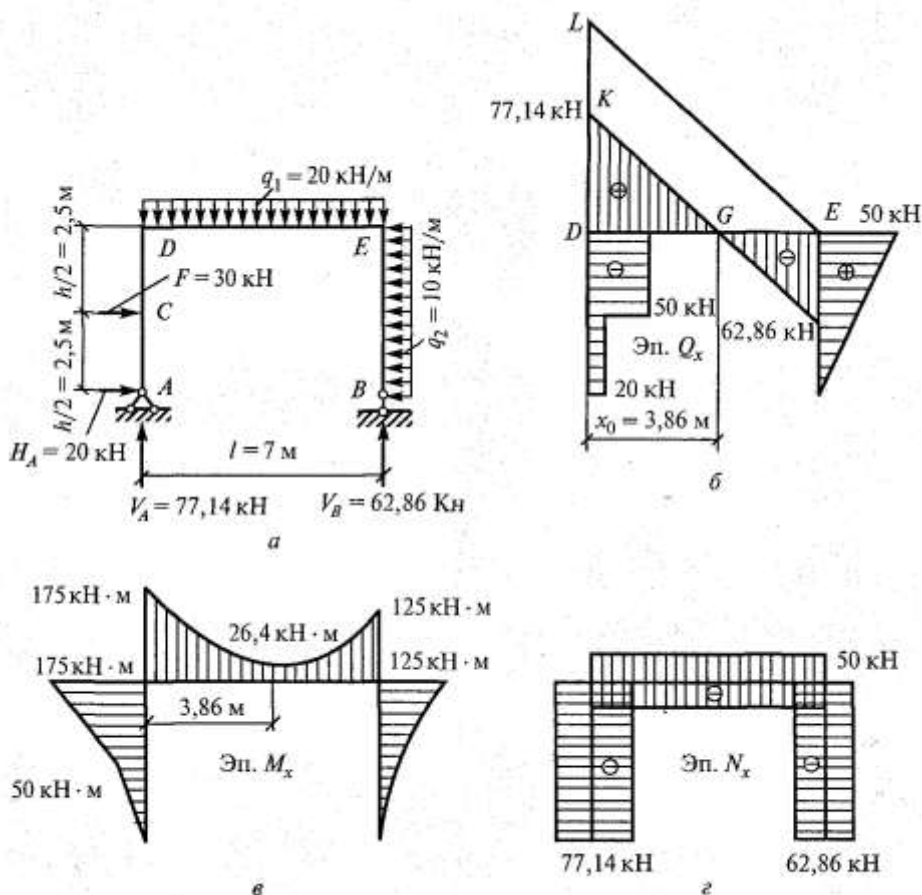


Рис.52

или

$$20 \cdot 7 \cdot 3,5 + 30 \cdot 2,5 - 10 \cdot 5 \cdot 2,5 - V_B \cdot 7 = 0,$$

откуда  $V_B = (20 \cdot 7 \cdot 3,5 + 30 \cdot 2,5 - 10 \cdot 5 \cdot 2,5)/7 = 62,86$  кН.

Из второго уравнения определим  $V_A$ :

$$V_A l + Fh/2 - q_1 l l/2 - q_2 h h/2 = 0$$

или  $V_A \cdot 7 + 30 \cdot 2,5 - 20 \cdot 7 \cdot 3,5 - 10 \cdot 5 \cdot 2,5 = 0,$

откуда  $V_A = (-30 \cdot 2,5 + 20 \cdot 7 \cdot 3,5 + 10 \cdot 5 \cdot 2,5)/7 = 77,14$  кН.

Из третьего уравнения найдем

$$H_A + F - q_2 h = 0,$$

откуда  $H_A = q_2 h - F = 10 \cdot 5 - 30 = 20$  кН.

Проверим правильность определения вертикальных реакций:

$$\sum Y = V_A + V_B - q_1 l$$

или

$$62,86 + 77,14 - 20 \cdot 7 = 0, \text{ откуда } 140 - 140 = 0.$$

2. Обозначим характерные точки  $A, C, D, E, B$ . Рама состоит из двух стоек  $AD, BE$  и ригеля  $DE$ . Стойки и ригель жестко соединены между собой в узлах  $D$  и  $E$ .

3. Определим поперечные силы в характерных точках, обходя раму по часовой стрелке изнутри.

Стойка  $AD$ :

$$Q_A = -H_A = -20 \text{ кН}; \quad Q_C^{\text{лев}} = -H_A = -20 \text{ кН};$$

$$Q_C^{\text{прав}} = -H_A - F = -20 - 30 = -50 \text{ кН};$$

$$Q_D^{\text{лев}} = -H_A - F = -50 \text{ кН}.$$

Ригель  $DE$ :

$$Q_D^{\text{прав}} = -V_A = 77,14 \text{ кН};$$

$$Q_E^{\text{лев}} = V_A - q_1 l = 77,14 - 20 \cdot 7 = 62,86 \text{ кН}.$$

Стойка  $BE$ : рассмотрим правую часть рамы (при взгляде изнутри)

$$Q_B = 0; \quad Q_E^{\text{прав}} = q_2 h = 10 \cdot 5 = 50 \text{ кН}.$$

По найденным значениям строим эпюру поперечных сил. На участке  $D_E$  эпюра  $Q_x$  пересекает ось ригеля на расстоянии  $x_0$  от точки  $D$ . Из подобия треугольников  $DKG$  и  $DEL$ :

$$\frac{x_0}{7} = \frac{77,14}{140}, \text{ откуда } x_0 = \frac{77,14 \cdot 7}{140} = 3,86 \text{ м.}$$

4. Определим значения изгибающих моментов в характерных точках.

Стойка  $AD$ :

$$M_A = 0; \quad M_C = -H_A h/2 = -20 \cdot 2,5 = -50 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_D = -H_A h - Fh/2 = -20 \cdot 5 - 30 \cdot 2,5 = -175 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Ригель  $DE$ :

$$M_D = -H_A h - Fh/2 = -20 \cdot 5 - 30 \cdot 2,5 = -175 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x_0=3,86 \text{ м}} = -V_A x_0 - Hh - Fh/2 - q_1 x_0 x_0/2 = \\ = 77,14 \cdot 3,86 - 20 \cdot 5 - 30 \cdot 2,5 - 20 \cdot 3,86 \cdot 1,93 = -26,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_E = V_A l - H_A h - Fh/2 - q_1 ll/2 = \\ = 77,14 \cdot 7 - 20 \cdot 5 - 30 \cdot 2,5 - 20 \cdot 7 \cdot 3,5 = -125 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Стойка  $BE$ : для правой части рамы

$$M_B = 0; \quad M_E = -q_2 hh/2 = -10 \cdot 5 \cdot 2,5 = -125 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим эпюру изгибающих моментов.

5. Определим значения продольных сил.

Стойка  $AD$ :

$$N_{AD} = -V_A = -77,14 \text{ кН}.$$

Ригель  $DE$ :

$$N_{DE} = -H_A - F = -20 - 30 = -50 \text{ кН}.$$

Стойка  $BE$ :

$$N_{BE} = -V_B = -62,86 \text{ кН}.$$

По найденным значениям строим эпюру продольных сил.

**Практическая работа №27**  
**по теме «Стически определимые плоские фермы»**  
**Определение усилий в стержнях фермы аналитическим**  
**способом**

**Цель работы:** научиться определять усилия в стержнях фермы аналитическим способом

**Методические указания:**

1. *Определяют расчетные нагрузки на  $1 \text{ м}^2$  покрытия.* Расчетная нагрузка равна произведению нормативной нагрузки на коэффициент перегрузки. Нормативную нагрузку, в свою очередь, определяют по правилам, приведенным в строительных нормах. Определение ее выходит за рамки задачи, поэтому нормативная постоянная  $g_n$  и нормативная временная (снеговая)  $s_n$  нагрузки приводятся в условии задачи.

Правила определения расчетных нагрузок также приводятся в строительных нормах. Порядок их определения следующий. Расчетная постоянная нагрузка  $g_d$  равна произведению нормативной нагрузки  $g_n$  на коэффициент надежности по постоянной нагрузке  $\gamma_g$ :

$$g_d = g_n \gamma_g$$

Расчетная временная нагрузка  $s_d$  равна произведению нормативной нагрузки  $s_n$  на коэффициент надежности по временной нагрузке  $\gamma_s$ :

$$s_d = s_n \gamma_s$$

Полная нагрузка равна сумме постоянной и временной нагрузок. Полная нормативная нагрузка

$$q_n = g_n + s_n$$

Полная расчетная нагрузка

$$q_d = g_d + s_d$$

Все эти нагрузки являются распределенными на  $1 \text{ м}^2$  покрытия.

2. *Определяют узловые нагрузки,* т. е. нагрузки, приходящиеся на один узел фермы. Узловая нагрузка является сосредоточенной и равна произведению распределенной нагрузки на грузовую площадь, приходящуюся на этот узел. Например, полная нагрузка на один узел

$$F = q_d A_{\text{груз}}$$

где  $q_d$  — полная расчетная распределенная нагрузка на  $1 \text{ м}^2$  покрытия;  $A_{\text{груз}}$  — площадь покрытия, с которой собирается нагрузка на узел.

Грузовая площадь в общем случае определяется по формуле

$$A_{\text{груз}} = bd,$$

где  $b$  — шаг ферм или расстояние между смежными фермами;  $d$  — панель верхнего пояса фермы, или расстояние между серединами стержней пояса, примыкающих к узлу.

Грузовые площади могут быть одинаковыми для всех промежуточных узлов или разными. Следовательно, узловые силы тоже могут быть одинаковыми или разными.

**Пример 1.** Определение усилий в стержнях фермы, изображенной на рисунке 53.

1. Расчет начинается с определения опорных реакций. Поскольку рассматриваемая ферма является балочной, то определение опорных реакций осуществляется как для обычной балки:

$$\sum F_x = 0; H_B = 0; \sum M_B = 0;$$

$$-V_C \cdot 15 + 17,5 \cdot 5 + 10 \cdot 10 = 0; V_C = 187,5/15 = 12,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_C = 0;$$

$$V_B \cdot 15 - 17,5 \cdot 10 - 10 \cdot 5 = 0; V_B = 225/15 = 15 \text{ кН};$$

$$\text{Проверка: } 12,5 + 15 - 10 - 17,5 = 0.$$

Вырезаем опорный узел В, в котором сходятся два стержня и реакция:

$$\sum F_y = 0;$$

$$V_B + N_{B2} \cdot \sin 45^\circ = 0; N_{B2} = -15/0,707 = -21,22 \text{ кН};$$

$$\sum F_x = 0;$$

$$N_B = N_{B2} \cdot \cos 45^\circ = -(21,22) \cdot 0,707 = 15 \text{ кН}.$$

Вырезаем узел 1, в котором сходятся два стержня с неизвестными силами  $N_{12}$  и  $N_{14}$  (рис. 17в).

$$\sum F_y = 0; N_{12} = 0;$$

$$\sum F_x = 0; -N_{1B} + N_{14} = 0; N_{14} = N_{1B} = 15 \text{ кН}.$$

Затем вырезаем узел 2, в котором:

$$\sum F_y = 0; -N_{B2} \cdot \cos 45^\circ - 17,5 - N_{24} \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$N_{24} = -N_{B2} - 17,5/\cos 45^\circ = -(-21,22) - 17,5/0,707 = 3,53 \text{ кН};$$

$$\sum F_x = -N_{B2} \cdot \sin 45^\circ + N_{24} \cdot \sin 45^\circ + N_{23} = 0;$$

$$N_{23} = (N_{B2} - N_{24}) \sin 45^\circ = (-21,22 + 3,53) \cdot 0,707 = -12,5 \text{ кН}.$$

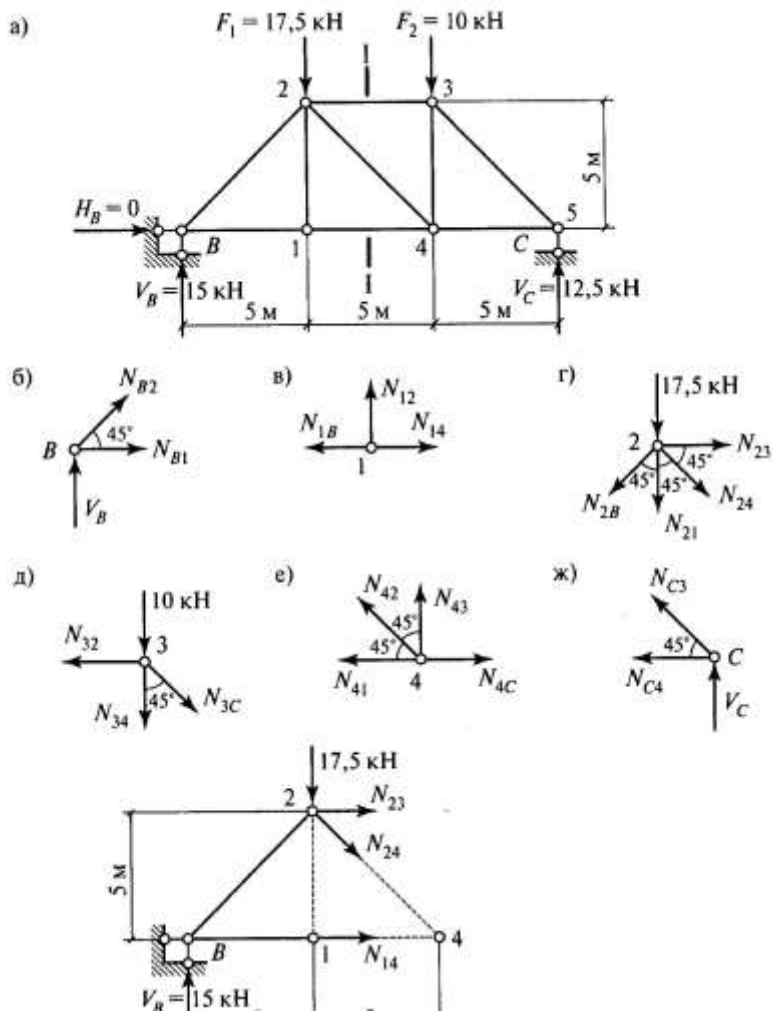


Рис. 53

Вырезаем узел 3:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0; \quad -N_{32} + N_{3C} \cdot \sin 45^\circ = 0; \\ N_{3C} &= N_{32} / \sin 45^\circ = -12,5 / 0,707 = -17,68 \text{ кН}; \\ \Sigma F_y &= 0; \quad -N_{34} - 10 - N_{3C} \cdot \sin 45^\circ = 0; \\ N_{34} &= -10 - N_{3C} \cdot \sin 45^\circ = -10 - (-17,68) \cdot 0,707 = 2,5 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Вырезаем узел 4:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0; \quad -N_{41} - N_{42} \cdot \sin 45^\circ + N_{4C} = 0; \\ N_{4C} &= N_{41} + N_{42} \cdot \sin 45^\circ = 15 - 3,53 \cdot 0,707 = 12,5 \text{ кН}.\end{aligned}$$

После обхода узлов В, 1, 2, 3, 4 определены продольные силы во всех стержнях фермы. Условия равновесия узла С используем в качестве проверки.

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= 0; \quad N_{C3} \cdot \sin 45^\circ + V_C = 0; \\ N_{C3} &= -V_C / \sin 45^\circ = -12,5 / 0,707 = -17,68 \text{ кН}; \\ \Sigma F_x &= 0; \quad -N_{C4} - N_{C3} \cdot \cos 45^\circ = 0; \\ N_{C4} &= -N_{C3} \cdot \cos 45^\circ = -(-17,68) \cdot 0,707 = 12,5 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Расчет выполнен верно.

## Практическая работа №28

по теме «Стически определяемые плоские фермы»

### Определение усилий в стержнях фермы путём построения диаграммы Максвелла-Кремоны

**Цель работы:** научиться определять усилия в стержнях фермы графическим способом

#### Методические указания:

1. *Определяют расчетные нагрузки на 1 м<sup>2</sup> покрытия. Расчетная нагрузка равна произведению нормативной нагрузки на коэффициент перегрузки. Нормативную нагрузку, в свою очередь, опре-*

деляют по правилам, приведенным в строительных нормах. Определение ее выходит за рамки задачи, поэтому нормативная постоянная  $g_n$  и нормативная временная (снеговая)  $s_n$  нагрузки приводятся в условии задачи.

Правила определения расчетных нагрузок также приводятся в строительных нормах. Порядок их определения следующий. Расчетная постоянная нагрузка  $g_d$  равна произведению нормативной нагрузки  $g_n$  на коэффициент надежности по постоянной нагрузке  $\gamma_g$ :

$$g_d = g_n \gamma_g$$

Расчетная временная нагрузка  $s_d$  равна произведению нормативной нагрузки  $s_n$  на коэффициент надежности по временной нагрузке  $\gamma_s$ :

$$s_d = s_n \gamma_s$$

Полная нагрузка равна сумме постоянной и временной нагрузок. Полная нормативная нагрузка

$$q_n = g_n + s_n$$

Полная расчетная нагрузка

$$q_d = g_d + s_d$$

Все эти нагрузки являются распределенными на  $1 \text{ м}^2$  покрытия.

2. *Определяют узловые нагрузки*, т. е. нагрузки, приходящиеся на один узел фермы. Узловая нагрузка является сосредоточенной и равна произведению распределенной нагрузки на грузовую площадь, приходящуюся на этот узел. Например, полная нагрузка на один узел

$$F = q_d A_{\text{груз}}$$

где  $q_d$  — полная расчетная распределенная нагрузка на  $1 \text{ м}^2$  покрытия;  $A_{\text{груз}}$  — площадь покрытия, с которой собирается нагрузка на узел.

Грузовая площадь в общем случае определяется по формуле

$$A_{\text{груз}} = bd,$$

где  $b$  — шаг ферм или расстояние между смежными фермами;  $d$  — панель верхнего пояса фермы, или расстояние между серединами стержней пояса, примыкающих к узлу.

Грузовые площади могут быть одинаковыми для всех промежуточных узлов или разными. Следовательно, узловые силы тоже могут быть одинаковыми или разными.



**Пример 1.** Для заданной статически определимой фермы (рис. 54) определить усилия в стержнях путем построения диаграммы Максвелла - Кремоны.

Дано:  $F = 20 \text{ кН}$ ;  $h_1 = 2 \text{ м}$ ;  $h = 2,5 \text{ м}$ ;  $d = 3 \text{ м}$ .

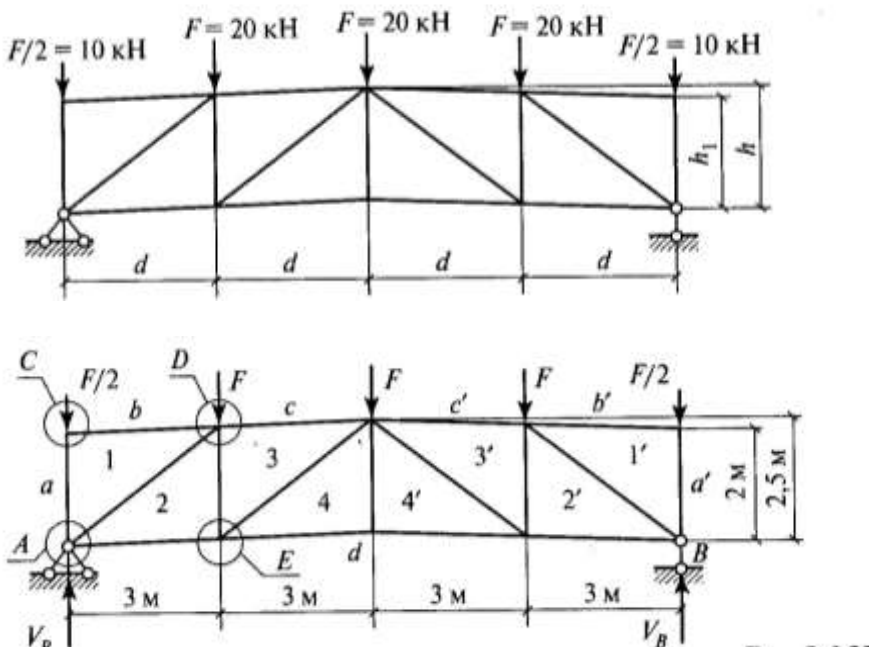


Рис.54

**Решение:** Вычерчиваем геометрическую схему фермы в масштабе.

2. Обозначение полей:

внешние поля ограничены внешними силами и поясами фермы, они разомкнуты. Эти поля будем обозначать буквами  $a, b, c, d$ , обходя ферму по часовой стрелке. Так как ферма и нагрузка имеют ось симметрии, то симметричные поля правой половины обозначим теми же буквами, но с индексами:  $a', b', c', d'$ ;

внутренние поля ограничены только стержнями фермы, они замкнуты. Обозначим их цифрами 1, 2, 3, 4, обходя ферму слева направо. Так как ферма имеет ось симметрии, поля правой половины обозначим теми же цифрами, но с индексами: 1', 2', 3', 4'.

### 3. Определение опорных реакций.

Так как ферма и нагрузки имеют ось симметрии, то опорные реакции фермы равны между собой и равны половине всей нагрузки:

$$V_A = V_B = \frac{\sum F_k}{2} = \frac{\frac{F}{2} + F + F + F + \frac{F}{2}}{2} = \frac{4F}{2} = 2 \cdot 20 = 40 \text{ кН.}$$

Построение диаграммы:

выбираем масштаб сил: в 1 см — 10 кН;

строим силовую линию  $a - b - c - c' - b' - a' - d$  из внешних

сил: откладываем в принятом масштабе силу  $\frac{F}{2}(a - b)$

и далее все заданные силы и реакции в том же порядке, в котором они встречаются при обходе контура фермы по часовой стрелке. В результате получаем замкнутый силовой многоугольник  $abcc'b'a'da$ , расположенный (ввиду параллельности всех внешних сил) на одной прямой;

построение диаграммы усилий.

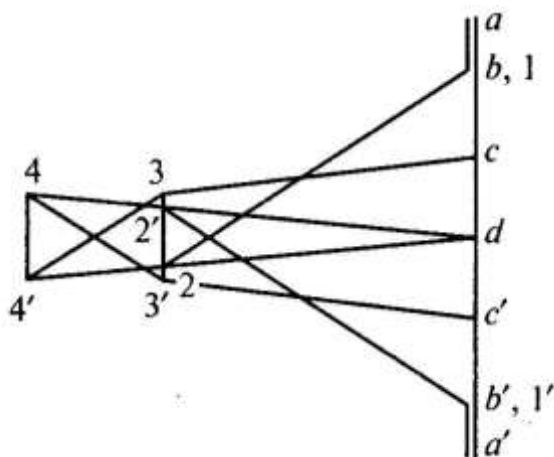


Рис. 55

Мысленно вырезаем узел *C*, в котором сходятся два стержня, которые будем называть *b—1* и *1—a*. На силовой линии уже есть точки *a* и *b*. Проведем через точку *a* линию, параллельную стержню *1—a*, через точку *b* — линию, параллельную стержню *b—1*. Точку их пересечения обозначим цифрой 1. В нашем случае она совпадает с точкой *b*. Далее вырезаем узел *A*. В нем сходятся три стержня *1—a*, *1—2*, *2—d*. На диаграмме уже есть точки *a*, *d*, 1. Проведем через точку 1 линию, параллельную стержню *1—2*, а через точку *d* — линию, параллельную стержню *2—d*, до взаимного пересечения. Точку пересечения линий *1—2* и *2—d* обозначим цифрой 2.

Аналогично вырезая узлы *D* и *E*, строим точки 3 и 4.

На этом можно закончить построение диаграммы, так как усилия в симметричных стержнях одинаковы. Полностью диаграмму

можно построить, определяя положение точек 1', 2', 3', 4' как симметричные точкам 1, 2, 3, 4 относительно оси симметрии.

Знаки усилий определяем следующим образом (на примере узла *A*). Так как силовой многоугольник, построенный для заданного узла, замкнут, то усилие *a—1* направлено от точки *a* к точке 1, усилие *1—2* — от точки 1 к точке 2 и усилие *2—d* — от точки 2 к точке *d*. Мысленно перенеся эти направления на соответствующие стержни схемы фермы, видим, что усилия *a—1* и *1—2* направлены к рассматриваемому узлу и, следовательно, являются сжимающими, а усилие *2—d* направлено от рассматриваемого узла, т.е. оно растягивающее. На диаграмме сжимающие усилия покажем двойной линией, а растягивающие — одинарной линией.

5. Определение усилий по диаграмме. По построенной на рис. 3.6.23 диаграмме измеряем расстояние между точками, соответствующее определенному стержню, и, умножая полученные значения на масштаб (1 см : 10 кН), получим значения усилия:

$$\begin{aligned}
 S_{b-1} &= 0; \\
 S_{c-3} &= S_{c'-3'} = -4,5 \cdot 10 = -45 \text{ кН}; \\
 S_{2-d} &= S_{2'-d'} = 4,5 \cdot 10 = 45 \text{ кН}; \\
 S_{4-d} &= S_{4'-d'} = 6 \cdot 10 = 60 \text{ кН}; \\
 S_{1-a} &= S_{1'-a'} = -1 \cdot 10 = -10 \text{ кН}; \\
 S_{2-3} &= S_{2'-3'} = 1 \cdot 10 = 10 \text{ кН}; \\
 S_{3-4} &= S_{3'-4'} = -1,9 \cdot 10 = -19 \text{ кН}; \\
 S_{4-4'} &= 1 \cdot 10 = 10 \text{ кН}.
 \end{aligned}$$

## Практическая работа №29

по теме «Основы расчета статически неопределимых систем методом сил»

### Применение метода сил к расчёту один раз статически неопределимой рамы

## Практическая работа №30

по теме «Основы расчета статически неопределимых систем методом сил»

### Построение эпюр Q, M, N для один раз статически неопределимой рамы

**Цель работы:** научиться проводить расчет один раз статически неопределимой рамы методом сил.

**Методические указания:**

1. *Определяют степень статической неопределимости системы:*

$$L = 2Ш + C_{оп} - 3Д,$$

где Ш — число промежуточных шарниров в раме;  $C_{оп}$  — число опорных стержней, крепящих раму к основанию; шарнирно-подвижная опора имеет один опорный стержень, шарнирно-неподвижная — два, жесткая защемляющая — три; Д — число жестких дисков, образующих систему.

Степень статической неопределимости системы равна числу лишних связей. В задачах для расчетно-графической работы приведены дважды статически неопределимые рамы. В этом следует убедиться.

2. *Выбирают основную систему, которую лучше иметь статически определимой. Для этого необходимо отбросить лишние связи и заменить их действие неизвестными пока реакциями. В задачах для расчетной графической работы есть возможность основную систему получить в виде консольной рамы или бруса с ломаной осью, отбрасывая две связи и заменяя их действие реакциями, которые обозначают  $X_1$  и  $X_2$ .*

3. *Определяют изгибающие моменты в характерных точках от заданной нагрузки для основной системы и строят эпюру моментов. Эта эпюра называется грузовой и обозначается  $M_F$ .*

4. *Строят эпюры моментов от единичных сил  $\bar{X}_1 = 1$  и  $\bar{X}_2 = 1$ . Эти эпюры называются единичными и обозначаются  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$ .*

5. Составляют канонические уравнения метода сил. Число уравнений зависит от степени статической неопределимости системы (числа неизвестных). Для системы с двумя неизвестными уравнения принимают вид:

$$1) \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0;$$

$$2) \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0.$$

Определяют коэффициенты при неизвестных путем перемножения единичных эпюр и свободные члены путем перемножения единичных эпюр на грузовую эпюру. При этом следует пользоваться прил. V. Из уравнений находят неизвестные  $X_1$  и  $X_2$ .

6. Строят эпюры моментов от найденных сил  $M_{X_1}$  и  $M_{X_2}$ , умножая значения эпюр  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$  на  $X_1$  и  $X_2$ .

7. Определяют изгибающие моменты в характерных точках от заданной нагрузки для заданной системы путем суммирования значений моментов эпюр  $M_F$ ,  $M_{X_1}$  и  $M_{X_2}$ .

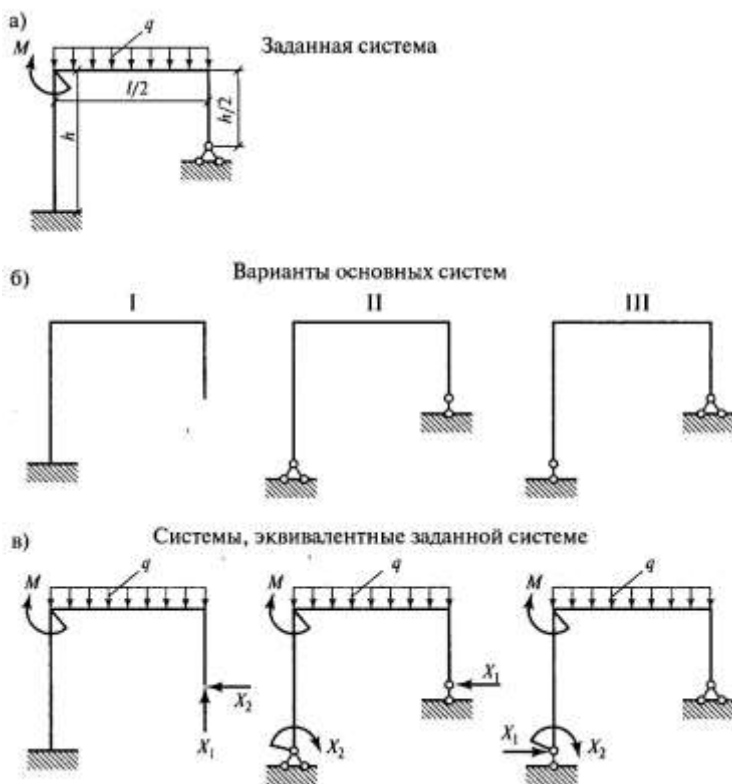


Рис. 56

Пример. Построить эпюры продольных сил  $N_z$ , поперечных сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_x$ . Жесткость  $EJ_z = \text{const}$  (рис. 57).

*Решение*

1. Степень статической неопределенности

$$L = C_{оп} - 3 = 4 - 3 = 1.$$

Рама один раз статически неопределима.

2. Выбираем основную систему, отбросив лишние связи. Лишняя связь только одна. В опоре  $B$  заменяем шарнирно-неподвижную опору шарнирно-подвижной.

3. Строим эквивалентную систему, сила  $X_1$  — неизвестная реакция отброшенной связи (рис. 57в).

4. Каноническое уравнение метода сил:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0.$$

Канонических уравнений будет столько, сколько раз задача статически неопределима. Это уравнение выражает равенство нулю горизонтального перемещения точки  $B$  от совместного действия неизвестной силы  $X_1$  и заданной нагрузки.

5. Вычислим коэффициенты канонических уравнений, для чего необходимо построить эпюры от  $X_1 = 1$  и заданной нагрузки  $F = 30$  кН.

Единичная эпюра  $M_{x1}$  (рис. 57д). Основная система нагружена только силой  $X_1 = 1$ . Вертикальные опорные реакции равны нулю,  $V_A = 0$ ;  $V_B = 0$ ;  $H_A = X_1 = 1$ ,  $M_{xA} = M_{xB} = 0$ ,  $M_{xC} = M_{xD} = 1 \cdot 6 = 6$  кНм.

7. «Грузовая» эпюра  $M_E$  (рис. 57е)

Определим реакции в опорах:

$$\Sigma M_A = 0; \quad F \cdot 6 - V_B \cdot 3 = 0; \quad V_B = \frac{F \cdot 6}{3} = \frac{30 \cdot 6}{3} = 60 \text{ кН};$$

$$V_A = -60 \text{ кН}; \quad H_A = F = 30 \text{ кН}.$$

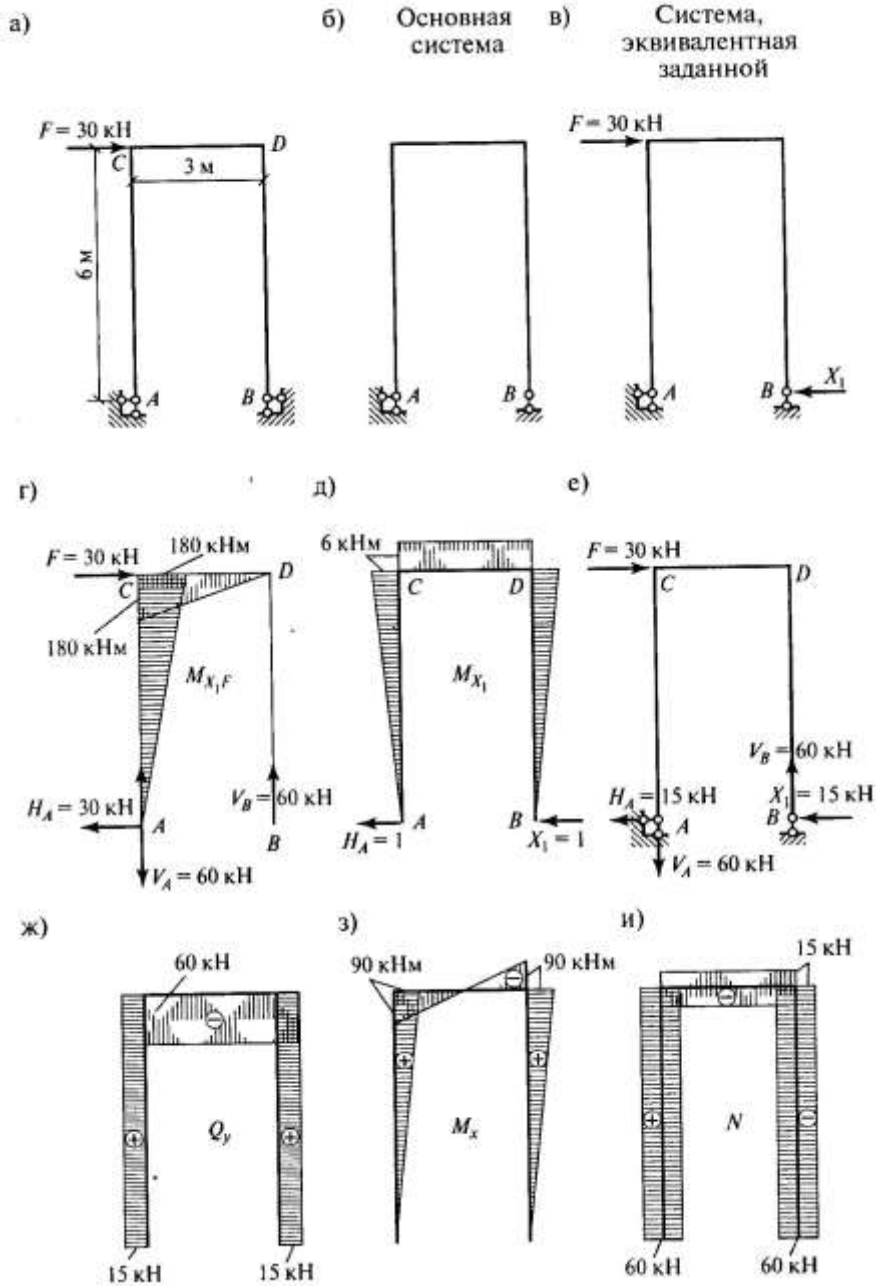


Рис. 57

8. Определим коэффициенты канонических уравнений:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x} \omega_1 M_{x1}^0,$$

е  $\omega_1$  — площадь единичной эпюры на каждом участке;  $M_{x1}^0$  — ордината единичной эпюры под центром тяжести этой же эпюры.

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_x} \left( \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \cdot 6 \right) = \frac{1}{EJ_x} (144 + 108) = \frac{252}{EJ_x};$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \frac{\omega_F M_{x1}^0}{EJ_x} = -\frac{1}{EJ_x} \left( \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 180 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 180 \cdot 6 \right) = \\ &= -\frac{1}{EJ_x} (2160 + 1620) = -\frac{3780}{EJ_x}. \end{aligned}$$

9. Решаем канонические уравнения метода сил:

$$\frac{252}{EJ_x} X_1 - \frac{3780}{EJ_x} = 0; \quad X_1 = \frac{3780}{EJ_x} \cdot \frac{EJ_x}{252} = 15 \text{ кН.}$$

Нагружаем раму силой  $F = 30$  кН и  $X_1 = 15$  кН.

10. Строим окончательные эпюры  $Q_y$  и  $M_x$ .

Эпюры поперечных сил  $Q_y$ ,  $M_x$  и  $N$ .

1)  $\sum F_x = 0$ ;  $F - X_1 + H_A = 0$ ;  $30 - 15 + H_A = 0$ ;  $H_A = -15$  кН.

Знак «-» означает, что реакция  $H_A$  направлена в противоположную сторону;

2)  $\sum M_A = 0$ ;  $F \cdot 6 - V_B \cdot 3 = 0$ ;  $V_B = 2 \cdot F = 2 \cdot 30 = 60$  кН;

3)  $\sum M_B = 0$ ;  $V_A \cdot 3 + F \cdot 6 = 0$ ;  $V_A = -2 \cdot F = 2 \cdot 30 = -60$  кН.

Знак «-» означает, что реакция  $H_A$  направлена в противоположную сторону.



Участок  $AC$ :  $Q_y = H_A = 15$  кН;  
участок  $CD$ :  $Q_y = -V_A = -60$  кН (рис. 3.8.);  
участок  $BD$ :  $Q_y = -X_1 = 15$  кН.

11. Эпюра  $M_x$ :

точка  $A$ :  $M_x = 0$ ;

точка  $C$ :  $M_x = H_A \cdot 6 = 15 \cdot 6 = 90$  кНм

точка  $D$ :  $M_x = 90 - 60 \cdot 3 = -180$  кНм.

12. Эпюра продольных сил

участок  $AC$ :  $N = 60$  кН;

участок  $CD$ :  $N = -15$  кН (рис. 3.8.);

участок  $BD$ :  $N = -60$  кН.

### Практическая работа №31

по теме: «Неразрезные балки»

**Применение уравнения трех моментов к расчету неразрезных балок**

### Практическая работа №32

по теме: «Неразрезные балки»

**Построение эпюр изгибающих моментов, поперечных сил в характерных точках и определение опорных реакций для неразрезной балки**

**Цель работы:** научиться строить эпюры  $Q$  и  $M$  для неразрезной балки с помощью уравнения трех моментов.

**Методические указания:**

1. *Обозначают пролеты и опоры на заданной схеме (системе):* первый пролет —  $l_1$ , второй —  $l_2$ , третий —  $l_3$  и т. д. Первая опора обозначается 0, вторая — 1, третья — 2 и т. д.

2. *От заданной системы переходят к основной системе.* Для этого каждую опору заменяют шарниром и опорным моментом, который замещает действие отброшенной связи. Опорные моменты обозначают  $M_0, M_1, M_2, \dots$  в зависимости от номера опоры. Величина этих моментов неизвестна.

Если балка имеет консоль, то в основной системе она отбрасывается, а действие отброшенных сил, приложенных к консоли, учитывается. Если одна из крайних опор жестко защемляющая, то в основной системе ее заменяют шарнирной опорой и добавляют еще один пролет и опору, которые называют фиктивными, так как в заданной системе их нет. Длина фиктивного пролета принимается равной нулю. Если защемляющая опора расположена на левом конце, то фиктивный пролет обозначают  $l_0 = 0$ , а фиктивную опору — «-1» (минус первая) и опорный момент  $M_{-1} = 0$ . Если защемляющая опора расположена на правом конце, то фиктивному пролету, опоре и моменту присваивается индекс, следующий за индексом предшествующего пролета (опоры, момента).

3. *Определяют значения изгибающих моментов от заданной нагрузки для основной системы* в каждом пролете. По найденным значениям строят эпюру моментов от заданной нагрузки для основной системы, которую обозначают  $M_x^0$ . Величины моментов и характер эпюр определяют по прил. VI.

4. *Определяют неизвестные опорные моменты с помощью уравнений трех моментов*, которые составляются для каждой промежуточной опоры. Во всех задачах самостоятельной работы основная система имеет одну промежуточную опору, в задачах расчетно-графической работы — две. Поэтому в этих задачах составляются соответственно одно и два уравнения трех моментов.

Для балки, у которой в заданной системе все опоры шарнирные или одна (правая) защемляющая, уравнения трех моментов имеют вид:

для первой промежуточной опоры 1

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6(B_1^\Phi + A_2^\Phi);$$

для второй промежуточной опоры 2

$$M_1 l_2 + 2M_2(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = -6(B_2^\Phi + A_3^\Phi),$$

где  $M_1$  и  $M_2$  — опорные моменты на промежуточных опорах, их определяют путем решения уравнений;  $M_0$  и  $M_3$  — опорные моменты на концевых опорах, их находят по схеме балки;  $A_2^\Phi$ ,  $A_3^\Phi$ ,  $B_1^\Phi$ ,  $B_2^\Phi$  — фиктивные опорные реакции для основной системы (по прил. VII).

Если защемляющая опора расположена слева, то, учитывая все дополнительные преобразования (см. п. 2), уравнения трех моментов принимают вид:

для первой промежуточной опоры 0

$$M_{-1}l_0 + 2M_0(l_0 + l_1) + M_1l_1 = -6(B_0^\Phi + A_1^\Phi);$$

для второй промежуточной опоры 1

$$M_0l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2l_2 = -6(B_1^\Phi + A_2^\Phi),$$

где  $M_0$  и  $M_1$  — опорные моменты на промежуточных опорах, их определяют путем решения уравнений;  $M_{-1}$  и  $M_2$  — опорные моменты на крайних опорах, их определяют по схеме балки;  $B_0^\Phi$ ,  $A_1^\Phi$ ,  $B_1^\Phi$ ,  $A_2^\Phi$  — фиктивные опорные реакции для основной системы (по прил. VII). В примерах они условно показаны на основной системе. Подробнее о фиктивных опорных реакциях можно узнать в работе [3].

Решают уравнения и определяют опорные моменты.

5. По найденным значениям строят эпюры опорных моментов  $M_{оп}$ , откладывая их на соответствующих опорах с учетом полученных знаков и соединяя прямыми линиями.

6. Определяют значения изгибающих моментов  $M_x$  от заданной нагрузки для заданной системы путем суммирования значения эпюр  $M_x^0$  и  $M_{оп}$  в характерных точках. По найденным значениям строят эпюру  $M_x$ . Она должна быть уточнена после построения эпюры  $Q_x$ .

7. Определяют значения поперечных сил  $Q_x$  на опорах:

$$Q_0^{прав} = A_1^0 + \frac{M_1 - M_0}{l_1};$$

$$Q_1^{лев} = -B_1^0 + \frac{M_1 - M_0}{l_1};$$

$$Q_1^{прав} = A_2^0 + \frac{M_2 - M_1}{l_2};$$

$$Q_2^{лев} = -B_2^0 + \frac{M_2 - M_1}{l_2};$$

$$Q_2^{\text{прав}} = A_3^0 + \frac{M_3 - M_2}{l_3},$$

где  $Q_i^{\text{лев}}$  и  $Q_i^{\text{прав}}$  — значения поперечной силы на  $i$ -й опоре ( $i = 0, 1, 2$ ), соответственно чуть левее и чуть правее ее;  $A_1^0, B_1^0, A_2^0, B_2^0, A_3^0$  — опорные реакции для простой балки (см. прил. VI);  $M_0, M_1, M_2, M_3$  — найденные ранее опорные моменты.

Поперечные силы на участках между опорами и на консольных участках определяются по общим правилам. По найденным значениям строят эпюру  $Q_x$ , используя зависимости между нагрузкой и характером эпюры  $Q_x$  (см. самостоятельную работу 6).

8. *Определяют опорные реакции балки на опорах 0, 1, 2, 3:*

$$R_0 = -Q_0^{\text{лев}} + Q_0^{\text{прав}};$$

$$R_1 = -Q_1^{\text{лев}} + Q_1^{\text{прав}};$$

$$R_2 = -Q_2^{\text{лев}} + Q_2^{\text{прав}};$$

$$R_3 = -Q_3^{\text{лев}} + Q_3^{\text{прав}}.$$

9. *Уточняют эпюру  $M_x$ .* Для этого находят значения изгибающих моментов для тех сечений, где наклонная линия эпюры (если такая есть) пересекает нулевую линию.

В качестве проверки можно найти сумму моментов всех левых или правых сил (и опорных реакций в том числе) относительно любой точки балки. Они должны быть равны между собой.

**Пример. 1** Построить эпюры  $Q$  и  $M$  для неразрезной балки с помощью уравнения трех моментов (рис. 58).

**Решение.** 1. Обозначим пролеты  $l_1$  и  $l_2$  и опоры 0, 1, 2

2. От заданной системы переходим к основной, введя на каждую опору шарниры и опорные моменты.

3. Определим изгибающие моменты в характерных точках для основной системы от заданной нагрузки (см. прил. VI). Момент в точке  $C$  под силой  $F_1 = 80$  кН

$$M_C^0 = \frac{F_1 ab}{l_1} = \frac{80 \cdot 3 \cdot 4}{7} = 137,1 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

момент в точке  $D$  под силой  $F_2 = 30$  кН

$$M_D^0 = \frac{F_2 l_2}{4} + \frac{q l_2^2}{8} = \frac{30 \cdot 5}{4} + \frac{20 \cdot 5^2}{8} = 37,5 + 62,5 = 100 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По найденным значениям строим эпюру  $M_x^0$

4. Составим уравнение трех моментов. Промежуточная опора одна, поэтому и уравнение для опоры 1 будет одно:

$$M_0 l_1 + 2M_1(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = -6(B_1^\Phi + A_2^\Phi),$$

где  $M_0 = 0$ , так как опора 0 концевая и шарнирная;

$$M_2 = -\frac{qc^2}{2} = -\frac{20 \cdot 1,5^2}{2} = -22,5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$B_1^\Phi = \frac{F_1 ab(l_1 + a)}{6l_1} = \frac{80 \cdot 3 \cdot 4(7 + 4)}{6 \cdot 7} = 251,4 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\begin{aligned} A_2^\Phi &= \frac{F_2 l_2^2}{16} + \frac{q l_2^3}{24} = \frac{30 \cdot 5^2}{16} + \frac{20 \cdot 5^3}{24} = 46,9 + 104,2 = \\ &= 151,1 \text{ кН} \cdot \text{м (см. прил. VII)}. \end{aligned}$$

Подставим числовые значения в уравнение моментов:

$$0 + 2M_1(7 + 5) - 22,5 \cdot 5 = -6(251,4 + 151,1)$$

или  $24M_1 = 2302$ , откуда  $M_1 = -95,9$  кН · м.

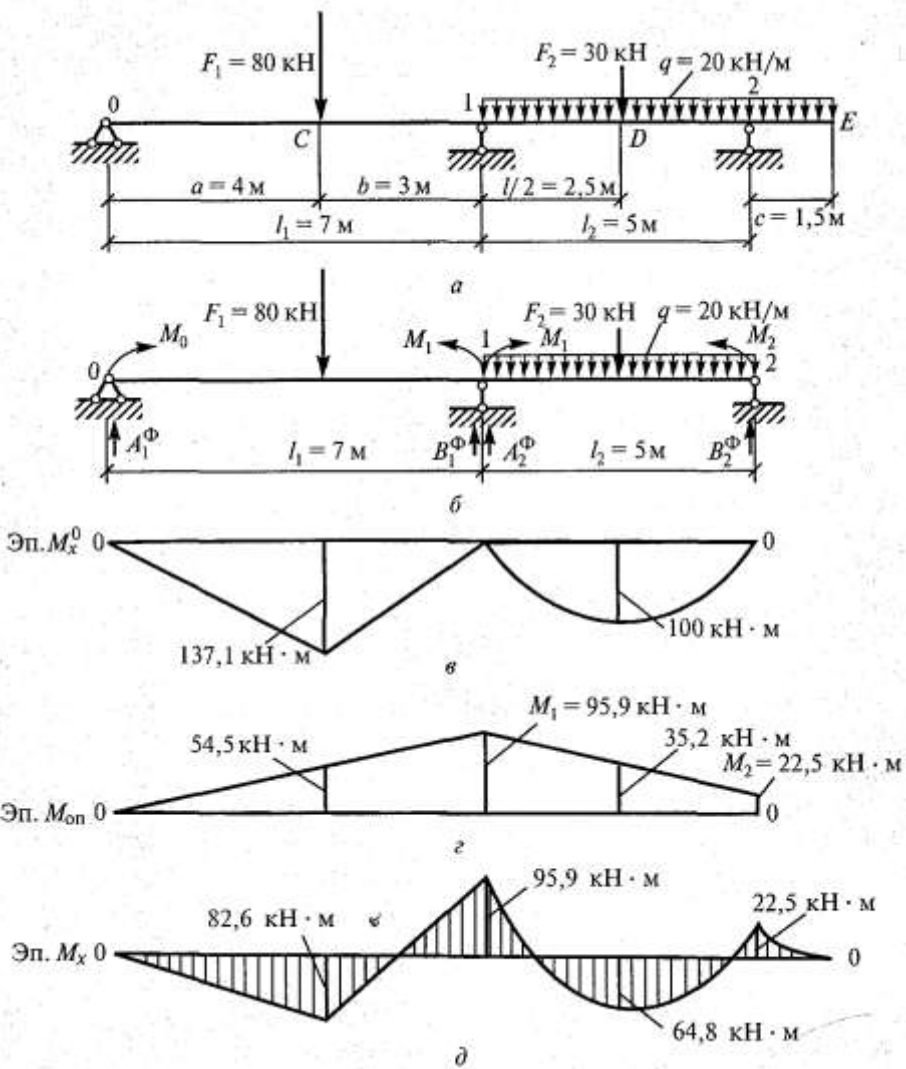


Рис. 58

В точке  $C$  величина опорного момента

$$M_C = -\frac{95,9}{7} \cdot 4 = -54,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В точке  $D$  величина опорного момента

$$M_D = \frac{-95,9 + 22,5}{2} = -35,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5. По найденным значениям строим эпюру  $M_{\text{оп}}$  (рис. 28,  $z$ ).

6. Суммируем значения эпюр  $M_x^0$  и  $M_{\text{оп}}$  в характерных точках:

$$M_0 = 0; \quad M_C = 137,1 - 54,5 = 82,6 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_1 = -95,9 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_D = 100 - 35,2 = 64,8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = -22,5 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_E = 0.$$

По найденным значениям строим эпюру  $M_x$  (рис. 28,  $d$ ). По условию самостоятельной работы требуется построить только эпюру  $M_x$ .

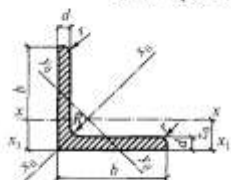
7. Строим эпюру поперечных сил

## Приложения

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Таблица I

Сталь прокатная угловая равнополочная (ГОСТ 8609—86)



Обозначения:

- $b$  — ширина полки;
- $d$  — толщина полки;
- $R$  — радиус внутреннего закругления;
- $r$  — радиус закругления полки;
- $J$  — момент инерции;
- $i$  — радиус инерции;
- $z_0$  — расстояние от центра тяжести до полки.

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Масса 1 м длины, кг	Справочные величины для осей							
	$b$	$d$	$R$	$r$			$X-X$		$Y_0-Y_0$		$Y_0-Y_0$		$X_1-X_1$	$Z_0$ , см
							$J_{xx}$ , см <sup>4</sup>	$i_x$ , см	$J_{yy}$ , см <sup>4</sup>	$i_y$ , см	$J_{yy}$ , см <sup>4</sup>	$i_y$ , см		
4,5	45	3	5	1,7	2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21
	4	3,48	2,73	1,38	3,48	2,73	6,63	1,38	10,50	1,74	2,74	0,89	12,10	1,26
	5	4,29	3,37	8,03	1,37	12,70	1,72	3,33	0,88	15,30	1,30			
5	50	3	5,5	1,8	2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,13
	4	3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38			
	5	4,80	3,77	11,20	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42			
5,6	56	4	6	2	4,38	3,44	13,10	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52
	5	5,41	4,25	16,00	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57			

Продолжение табл. I

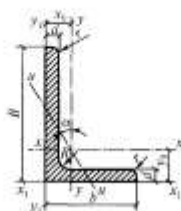
Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Масса 1 м длины, кг	Справочные величины для осей							
	$b$	$d$	$R$	$r$			$X-X$		$Y_0-Y_0$		$Y_0-Y_0$		$X_1-X_1$	$Z_0$ , см
							$J_{xx}$ , см <sup>4</sup>	$i_x$ , см	$J_{yy}$ , см <sup>4</sup>	$i_y$ , см	$J_{yy}$ , см <sup>4</sup>	$i_y$ , см		
6,3	63	4	7	2,3	4,96	3,90	18,90	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69
	5	6,13	4,81	23,10	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74			
	6	7,28	5,72	27,10	1,93	42,9	2,43	11,20	1,24	50,0	1,78			
7	70	4,5	8	2,7	6,20	4,87	29,00	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88
	5	6,86	5,38	31,90	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90			
	6	8,15	6,39	37,60	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94			
	7	9,42	7,39	43,00	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99			
	8	10,70	8,37	48,20	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02			
7,5	75	5	9	3	7,39	5,80	39,50	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
	6	8,78	6,89	46,60	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06			
	7	10,10	7,96	53,30	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10			
	8	11,50	9,02	59,80	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113,0	2,15			
	9	12,80	10,10	66,10	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	127,0	2,18			
8	80	5,5	9	3	8,63	6,78	52,70	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17
	6	9,38	7,36	57,00	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102,0	2,19			
	7	10,80	8,51	65,30	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	119,0	2,23			
	8	12,30	9,65	73,40	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	137,0	2,27			
9	90	6	10	3,3	10,60	8,33	82,10	2,78	130,0	3,50	34,0	1,79	145,0	2,43
	7	12,30	9,64	94,30	2,77	150,0	3,49	38,9	1,78	169,0	2,47			
	8	13,90	10,90	106,00	2,76	168,0	3,48	43,8	1,77	194,0	2,51			
	9	15,60	12,20	118,00	2,75	186,0	3,46	48,6	1,77	219,0	2,55			



Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Масса 1 м длины, кг	Справочные величины для осей							
	b	d	R	r			x-x		x <sub>0</sub> -x <sub>0</sub>		y <sub>0</sub> -y <sub>0</sub>		x <sub>1</sub> -x <sub>1</sub>	z <sub>0</sub> , см
							J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	I <sub>x</sub> , см	J <sub>x0 макс</sub> , см <sup>4</sup>	I <sub>0 макс</sub> , см	J <sub>y0 мин</sub> , см <sup>4</sup>	I <sub>0 мин</sub> , см	J <sub>x1</sub> , см <sup>4</sup>	
20	200	12	18	6	47,1	37,0	1823,0	6,22	2896,0	7,84	749,0	3,99	3182,0	5,37
		13			50,9	39,9	1961,0	6,21	3116,0	7,83	805,0	3,98	3452,0	5,42
		14			51,6	42,8	2097,0	6,20	3333,0	7,81	861,0	3,97	3722,0	5,46
		16			62,0	48,7	2363,0	6,17	3755,0	7,78	970,0	3,96	4264,0	5,54
		20			76,5	60,1	2871,0	6,12	4560,0	7,72	1182,0	3,93	5355,0	5,70
		25			94,3	74,0	3466,0	6,06	5494,0	7,63	1438,0	3,91	6733,0	5,89
		30			111,5	87,6	4020,0	6,00	6351,0	7,55	1688,0	3,89	8130,0	6,07
22	220	14	21	7	60,4	47,4	2814,0	6,83	4470,0	8,60	1159,0	4,38	4941,0	5,93
		16			68,6	53,8	3175,0	6,81	5045,0	8,58	1306,0	4,36	5661,0	6,02
		16			78,4	61,5	4717,0	7,76	7492,0	9,78	1942,0	4,98	8286,0	6,75
		18			87,7	68,9	5247,0	7,73	8337,0	9,75	2158,0	4,96	9342,0	6,83
		20			97,0	76,1	5765,0	7,71	9160,0	9,72	2370,0	4,94	10401,0	6,91
25	250	22	24	8	106,1	83,3	6 270,0	7,69	9961,0	9,69	2579,0	4,93	11464,0	7,00
		25			119,1	94,0	7006,0	7,65	11125,0	9,64	2887,0	4,91	13064,0	7,11
		28			133,1	104,5	7717,0	7,61	12244,0	9,59	3190,0	4,89	14674,0	7,23
		30			142,0	111,4	8177,0	7,59	12965,0	9,56	3389,0	4,89	15753,0	7,31

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Масса 1 м длины, кг	Справочные величины для осей							
	b	d	R	r			x-x		x <sub>0</sub> -x <sub>0</sub>		y <sub>0</sub> -y <sub>0</sub>		x <sub>1</sub> -x <sub>1</sub>	z <sub>0</sub> , см
							J <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	I <sub>x</sub> , см	J <sub>x0 макс</sub> , см <sup>4</sup>	I <sub>0 макс</sub> , см	J <sub>y0 мин</sub> , см <sup>4</sup>	I <sub>0 мин</sub> , см	J <sub>x1</sub> , см <sup>4</sup>	
20	200	12	18	6	47,1	37,0	1823,0	6,22	2896,0	7,84	749,0	3,99	3182,0	5,37
		13			50,9	39,9	1961,0	6,21	3116,0	7,83	805,0	3,98	3452,0	5,42
		14			51,6	42,8	2097,0	6,20	3333,0	7,81	861,0	3,97	3722,0	5,46
		16			62,0	48,7	2363,0	6,17	3755,0	7,78	970,0	3,96	4264,0	5,54
		20			76,5	60,1	2871,0	6,12	4560,0	7,72	1182,0	3,93	5355,0	5,70
		25			94,3	74,0	3466,0	6,06	5494,0	7,63	1438,0	3,91	6733,0	5,89
		30			111,5	87,6	4020,0	6,00	6351,0	7,55	1688,0	3,89	8130,0	6,07
22	220	14	21	7	60,4	47,4	2814,0	6,83	4470,0	8,60	1159,0	4,38	4941,0	5,93
		16			68,6	53,8	3175,0	6,81	5045,0	8,58	1306,0	4,36	5661,0	6,02
		16			78,4	61,5	4717,0	7,76	7492,0	9,78	1942,0	4,98	8286,0	6,75
		18			87,7	68,9	5247,0	7,73	8337,0	9,75	2158,0	4,96	9342,0	6,83
		20			97,0	76,1	5765,0	7,71	9160,0	9,72	2370,0	4,94	10401,0	6,91
25	250	22	24	8	106,1	83,3	6 270,0	7,69	9961,0	9,69	2579,0	4,93	11464,0	7,00
		25			119,1	94,0	7006,0	7,65	11125,0	9,64	2887,0	4,91	13064,0	7,11
		28			133,1	104,5	7717,0	7,61	12244,0	9,59	3190,0	4,89	14674,0	7,23
		30			142,0	111,4	8177,0	7,59	12965,0	9,56	3389,0	4,89	15753,0	7,31

## Сталь прокатная угловая неравнополочная (ГОСТ 8510—86)



Обозначения:

- $B$  — ширина большой полки;  
 $b$  — ширина малой полки;  
 $d$  — толщина полки;  
 $R$  — радиус внутреннего закругления;  
 $r$  — радиус закругления полки;  
 $J$  — момент инерции;  
 $l$  — радиус инерции;  
 $x_0, y_0$  — расстояния от центра тяжести до наружных граней полки.

Номер профиля	Размеры, мм					Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Масса 1 м длины, кг	Справочные величины для осей										Тангенс угла $\alpha$
	$B$	$b$	$d$	$R$	$r$			$x-x$		$y-y$		$x_1-x_1$		$y_1-y_1$		$u-u$		
								$J_x$ , см <sup>4</sup>	$i_x$ , см	$J_y$ , см <sup>4</sup>	$i_y$ , см	$J_{x_1}$ , см <sup>4</sup>	$i_{y_1}$ , см	$J_{y_1}$ , см <sup>4</sup>	$i_{x_1}$ , см	$J_{u_{max}}$ , см <sup>4</sup>	$i_{u_{min}}$ , см	
3,5/3,6	56	36	4 3	6	2	3,58 4,41	2,81 3,46	11,4 13,8	1,78 1,77	3,7 4,48	1,02 1,01	25,2 29,2	1,82 1,86	6,25 7,91	0,84 0,88	2,19 2,66	0,78 0,78	0,506 0,404
6,3/4	63	40	4	7	2,3	4,04	3,17	36,3	2,01	5,16	1,13	33,0	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397
			5			5,98	3,91	39,9	2,00	6,26	1,12	41,4	2,08	10,80	0,95	3,73	0,86	0,396
			6			5,90	4,63	23,3	1,99	7,28	1,11	49,9	2,12	13,10	0,99	4,36	0,86	0,393
			8			7,68	6,03	29,6	1,96	9,15	1,09	66,9	2,20	17,90	1,07	5,58	0,85	0,386
7,4/5	70	45	5	7,5	2,5	5,59	4,19	27,8	2,23	9,05	1,27	56,7	2,28	15,20	1,05	5,34	0,98	0,406

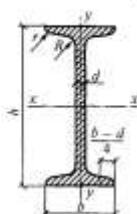
Продолжение табл. 2

Номер профиля	Размеры, мм					Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Масса 1 м длины, кг	Справочные величины для осей										Тангенс угла $\alpha$
	$B$	$b$	$d$	$R$	$r$			$x-x$		$y-y$		$x_1-x_1$		$y_1-y_1$		$u-u$		
								$J_x$ , см <sup>4</sup>	$i_x$ , см	$J_y$ , см <sup>4</sup>	$i_y$ , см	$J_{x_1}$ , см <sup>4</sup>	$i_{y_1}$ , см	$J_{y_1}$ , см <sup>4</sup>	$i_{x_1}$ , см	$J_{u_{max}}$ , см <sup>4</sup>	$i_{u_{min}}$ , см	
7,5/5	75	50	5	8	2,7	6,11	4,79	34,8	2,39	12,5	1,43	69,7	2,39	20,8	1,17	7,24	1,09	0,436
			6			7,25	5,69	40,9	2,38	14,6	1,42	83,9	2,44	25,2	1,21	8,48	1,08	0,435
			8			9,47	7,43	52,4	2,35	18,5	1,40	112,0	2,52	34,2	1,29	10,99	1,07	0,430
8/5	80	50	5	8	2,7	6,36	4,99	41,6	2,56	12,7	1,41	84,6	2,60	20,8	1,13	7,58	1,09	0,387
			6			7,55	5,92	49,0	2,55	14,8	1,40	102,0	2,65	25,2	1,17	8,88	1,08	0,386
			8															
9/5,6	90	56	5,5	9	3	7,86	6,17	65,3	2,88	19,7	1,58	132,0	2,92	32,2	1,26	11,80	1,22	0,384
			6			8,54	6,70	70,6	2,88	21,2	1,58	145,0	2,95	35,2	1,28	12,70	1,22	0,384
			8			11,18	8,77	90,9	2,85	27,1	1,56	194,0	3,04	47,8	1,36	16,30	1,21	0,380
10/6,3	100	63	6	10	3,3	9,59	7,53	98,3	3,20	30,6	1,79	198,0	3,23	49,9	1,42	18,20	1,38	0,393
			7			11,10	8,70	113,0	3,19	35,0	1,78	232,0	3,28	58,7	1,46	20,80	1,37	0,392
			8			12,60	9,87	127,0	3,18	39,2	1,77	266,0	3,32	67,6	1,50	23,40	1,36	0,391
			10			15,50	12,10	154,0	3,15	47,1	1,75	333,0	3,40	85,8	1,58	28,30	1,35	0,387
11/7	110	70	6,5	10	3,3	11,40	8,98	142,0	3,53	45,6	2,00	286,0	3,55	74,3	1,58	26,90	1,53	0,402
			8			13,90	10,90	172,0	3,51	54,6	1,98	353,0	3,61	92,3	1,64	32,30	1,52	0,400
12,5/8	125	80	7	11	3,7	14,10	11,00	227,0	4,01	73,7	2,29	452,0	4,01	119,0	1,80	43,30	1,76	0,407
			8			16,00	12,50	256,0	4,00	83,0	2,28	518,0	4,05	137,0	1,84	48,80	1,75	0,406
			10			19,70	15,50	312,0	3,98	100,0	2,26	649,0	4,14	173,0	1,92	59,30	1,74	0,404
			12			23,40	18,30	365,0	3,95	117,0	2,24	781,0	4,22	210,0	2,00	69,50	1,72	0,400
14/9	140	90	8	12	4	18,00	14,10	364,0	4,49	120,0	2,58	727,0	4,49	194,0	2,03	70,30	1,98	0,411
			10			22,20	17,50	444,0	4,47	146,0	2,56	911,0	4,58	245,0	2,12	85,50	1,96	0,409

16/10	160	100	9	13	4,3	22,90	18,00	606,0	5,15	186,0	2,85	1221	5,19	300,0	2,23	110,0	2,20	0,391
			10			25,30	19,80	667,0	5,13	204,0	2,84	1359	5,23	335,0	2,28	121,0	2,19	0,390
			12			30,00	23,60	784,0	5,11	239,0	2,82	1634	5,32	405,0	2,36	142,0	2,18	0,388
			14			34,70	27,30	897,0	5,08	272,0	2,80	1910	5,40	477,0	2,43	162,0	2,16	0,385
18/11	180	110	10	14	4,7	28,30	22,20	952,0	5,80	276,0	3,12	1933	3,88	444,0	2,44	165,0	2,42	0,375
			12			33,70	26,40	1123,0	5,77	324,0	3,10	2324	3,97	537,0	2,52	194,0	2,40	0,374
			14			34,90	27,40	1449,0	6,45	446,0	3,58	2920	6,50	718,0	2,79	264,0	2,75	0,392
20/12,5	200	125	11	14	4,7	37,90	29,70	1568,0	6,43	482,0	3,57	3189	6,54	786,0	2,83	285,0	2,74	0,392
			12			43,90	34,40	1801,0	6,41	551,0	3,54	3726	6,62	922,0	2,91	327,0	2,73	0,390
			14			49,80	39,10	2026,0	6,38	617,0	3,52	4264	6,71	1061,0	2,99	367,0	2,72	0,388
			16			48,30	37,90	3147,0	8,07	1032	4,62	6212	7,97	1634	3,53	604,0	3,54	0,410
25/16	250	160	12	18	6	63,60	49,90	4091,0	8,02	1333	4,58	8308	8,14	2200	3,69	781,0	3,50	0,408
			16			71,10	55,80	4545,0	7,99	145,0	4,56	9358	8,23	2487	3,77	866,0	3,49	0,407
			18			78,50	61,70	4987,0	7,97	1613	4,53	10400	8,31	2776	3,85	949,0	3,48	0,405
			20															

Таблица 3

## Сталь прокатная — балки двутавровые (ГОСТ 8239—72)

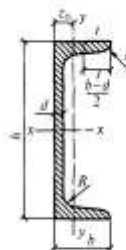


Обозначения:

- $h$  — высота балки;
- $b$  — ширина полки;
- $d$  — толщина стенки;
- $t$  — средняя толщина полки;
- $R$  — радиус внутреннего закругления;
- $r$  — радиус закругления полки;
- $J$  — момент инерции;
- $W$  — момент сопротивления;
- $S$  — статический момент полусечения;
- $i$  — радиус инерции.

Номер профиля	Масса $l$ м длины, кг	Размеры, мм						Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей						
		$h$	$b$	$d$	$t$	$R$	$r$		$x-x$			$y-y$			
									$J_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$J_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см
10	9,46	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	18,4	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18a	19,9	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,8	2,12
20	21,0	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,1	2,07
20a	22,7	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	24,0	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
22a	25,8	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	2790	254	9,22	143	106	34,3	2,50
24	27,3	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	29,4	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	3800	317	10,10	178	260	41,6	2,63
27	31,5	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	5010	371	11,20	210	260	41,5	2,54
27a	33,9	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	5500	407	11,30	229	337	50,0	2,80
30	36,5	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	7080	472	12,30	268	337	49,9	2,69
30a	39,2	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	7780	518	12,50	292	436	60,1	2,95
33	42,2	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	9840	597	13,50	339	419	59,9	3,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	13380	743	14,70	423	516	71,1	2,89
40	57,0	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	19062	953	16,20	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	27696	1231	18,10	708	808	101,0	3,09
50	78,5	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100	39727	1589	19,90	919	1043	123,0	3,23
55	92,6	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118	55962	2035	21,80	1181	1356	151,0	3,39
60	108,0	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138	76806	2560	23,60	1491	1725	182,0	3,54

## Сталь прокатная — швеллеры (ГОСТ 8240—72)



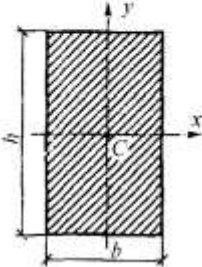
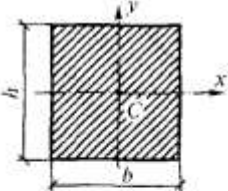
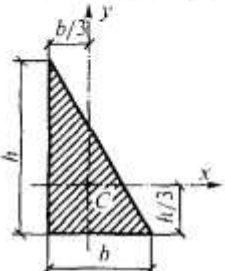
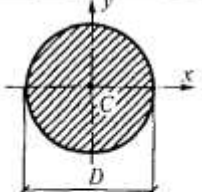
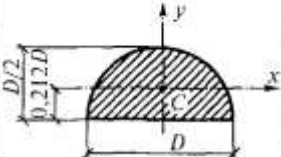
Обозначения:

- $h$  — высота швеллера;  
 $b$  — ширина полки;  
 $d$  — толщина стенки;  
 $t$  — средняя толщина полки;  
 $R$  — радиус внутреннего закругления;  
 $r$  — радиус закругления полки;  
 $J$  — момент инерции;  
 $W$  — момент сопротивления;  
 $S$  — статический момент полусечения;  
 $i$  — радиус инерции;  
 $z_0$  — расстояние от оси  $y$ — $y$  до наружной грани стенки.

Номер профиля	Масса 1 м длины, кг	Размеры, мм						Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей							
		$h$	$b$	$d$	$t$	$R$	$r$		$x-x$				$y-y$			
									$J_x$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$J_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см	$z_0$ , см
5	4,84	50	32	4,4	7	6	2,5	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	6	2,5	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	7	3	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	7,5	3	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	8	3	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67

14а	13,3	140	62	4,9	8,7	8	3	17	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5	8,4	8,5	3,5	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16а	15,3	160	68	5	9	8,5	3,5	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,0
18	16,3	180	70	5,1	8,7	9	3,5	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18а	16,4	180	74	5,1	9,3	9	3,5	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9	9,5	4	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20а	19,8	200	80	5,2	9,7	9,5	4	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	21	220	82	5,4	9,5	10	4	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22а	22,6	220	87	5,4	10,2	10	4	28,8	2330	212	8,99	121	187	30	2,55	2,46
24	24	240	90	5,6	10	10,5	4	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24а	25,8	240	95	5,6	10,7	10,5	4	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	27,2	270	95	6	10,5	11	4,5	35,2	4160	308	10,9	178	272	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11	12	5	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7	11,7	13	5	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	14	6	53,4	10 820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	48,3	400	115	8,0	13,5	15	6	61,5	15 220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Моменты инерции простых геометрических фигур

Сечение	$J_x$	$J_y$
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$
	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$
	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{36}$
	$\frac{\pi D^4}{64} \approx 0,05 D^4$	$\frac{\pi D^4}{64} \approx 0,05 D^4$
	$0,00686 D^4$	$\frac{\pi D^4}{128} \approx 0,025 D^4$

Коэффициенты приведения длины стержня





Способы закрепления концов стержня				
	Коэффициент $\mu$	1	2	0,7

Таблица 1

Коэффициенты продольного изгиба  $\varphi$   
центрально-сжатых элементов из стали

Гибкость $\lambda$	Коэффициенты $\varphi$ для элементов из стали с расчетным $R_y$ , МПа								
	200	220	225	230	235	240	280	290	300
10	0,998	0,987	0,987	0,987	0,987	0,985	0,985	0,985	0,984
20	0,967	0,964	0,963	0,963	0,962	0,962	0,959	0,958	0,957
30	0,939	0,935	0,934	0,933	0,932	0,931	0,924	0,922	0,920
40	0,906	0,900	0,898	0,897	0,895	0,894	0,883	0,880	0,878
50	0,869	0,860	0,858	0,856	0,854	0,852	0,836	0,832	0,829
60	0,827	0,816	0,813	0,810	0,807	0,805	0,785	0,780	0,775
70	0,782	0,768	0,764	0,761	0,757	0,754	0,724	0,714	0,705
80	0,734	0,710	0,704	0,698	0,692	0,686	0,641	0,631	0,621
90	0,665	0,638	0,631	0,625	0,618	0,612	0,565	0,554	0,543
100	0,599	0,710	0,563	0,556	0,549	0,542	0,493	0,481	0,470
110	0,537	0,507	0,499	0,492	0,485	0,478	0,427	0,415	0,404
120	0,479	0,449	0,441	0,434	0,426	0,419	0,366	0,354	0,343
130	0,425	0,394	0,386	0,379	0,371	0,364	0,313	0,303	0,294
140	0,376	0,345	0,337	0,330	0,322	0,315	0,272	0,264	0,256
150	0,328	0,302	0,295	0,389	0,282	0,276	0,239	0,232	0,225
160	0,290	0,267	0,261	0,355	0,249	0,244	0,212	0,205	0,199

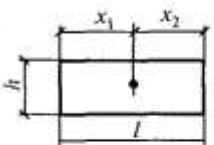
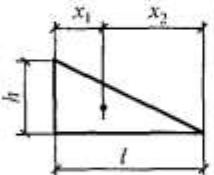
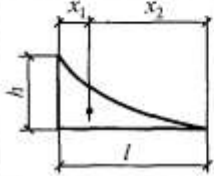
Таблица 2

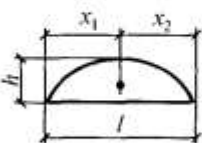
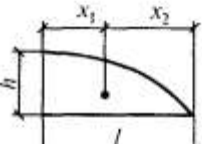
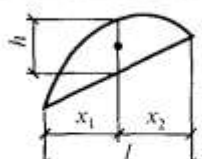
**Коэффициенты продольного изгиба  $\varphi$**   
**центрально-сжатых элементов из алюминия**

Гибкость $\lambda$	Коэффициент $\varphi$ для элементов из алюминия			Гибкость $\lambda$	Коэффициент $\varphi$ для элементов из алюминия		
	АМГ2М	АМГ2П АД31Т1	АД31Т		АМГ2М	АМГ2П АД31Т1	АД31Т
10	1	1	1	90	0,608	0,392	0,656
20	0,982	0,924	0,995	100	0,555	0,318	0,610
30	0,915	0,850	0,930	110	0,506	0,263	0,562
40	0,860	0,785	0,880	120	0,458	0,221	0,518
50	0,812	0,717	0,835	130	0,415	0,188	0,475
60	0,766	0,645	0,793	140	0,362	0,162	0,435
70	0,717	0,565	0,750	150	0,313	0,141	0,400
80	0,665	0,490	0,706	160	—	—	—

## ПРИЛОЖЕНИЕ V

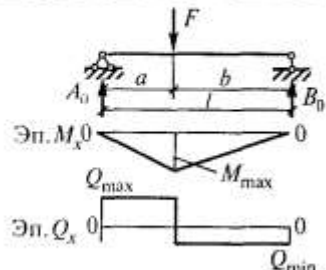
## Площади и координаты центров тяжести фигур

Фигуры	Площадь, $\omega$	Абсциссы центра тяжести	
		$x_1$	$x_2$
	$lh$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$
	$\frac{lh}{2}$	$\frac{l}{3}$	$\frac{2}{3}l$
	$\frac{1}{2}lh$	$\frac{l}{4}$	$\frac{3}{4}l$

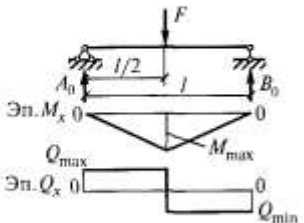
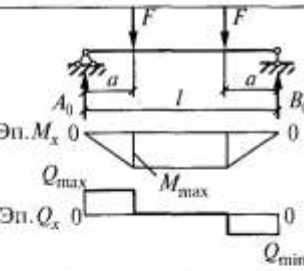
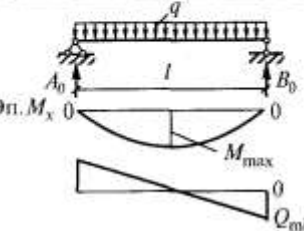
Фигуры	Площадь, $\omega$	Абсциссы центра тяжести	
		$x_1$	$x_2$
	$\frac{2}{3}lh$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$
	$\frac{2}{3}lh$	$\frac{3}{8}l$	$\frac{5}{8}l$
	$\frac{2}{3}lh$	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$

## ПРИЛОЖЕНИЕ VI

Опорные реакции, эпюры  $Q_x$  и  $M_x$  простых балок

Схема, нагрузка, эпюры	Опорные реакции		$Q_{\max}$	$M_{\max}$
	$A_0$	$B_0$		
	$\frac{F}{2}$	$\frac{F}{2}$	$\frac{F}{2}$	$\frac{Fl}{4}$



Схема, нагрузка, эпюры	Опорные реакции		$Q_{\max}$	$M_{\max}$
	$A_0$	$B_0$		
	$\frac{Fb}{l}$	$\frac{Fa}{l}$	$\frac{Fb}{l}$	$\frac{Fab}{l}$
	$F$	$F$	$F$	$Fa$
	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql^2}{8}$

## ПРИЛОЖЕНИЕ VII

## Фиктивные опорные реакции балок

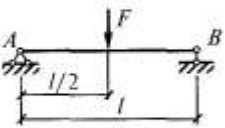
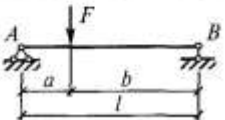
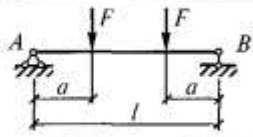
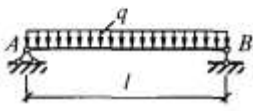
Схема	$A^\Phi$	$B^\Phi$
	$\frac{Fl^2}{16}$	$\frac{Fl^2}{16}$
	$\frac{Fab(l+b)}{6l}$	$\frac{Fab(l+a)}{6l}$

Схема	$A^\Phi$	$B^\Phi$
	$\frac{Fa(l-a)}{2}$	$\frac{Fa(l-a)}{2}$
	$\frac{ql^3}{24}$	$\frac{ql^3}{24}$

## ПРИЛОЖЕНИЕ VIII

Расчетные сопротивления  $R$  стали и алюминия

Материал	Марка, класс	ГОСТ	Расчетное сопротивление	
			по пределу текучести, на растяжение, сжатие	на сдвиг
Сталь прокатная	C-235,	27772—88	230	130
	C-245,		240	140
	C-345		335	190
Алюминий деформируемый	АМг2М	—	68	39
	АМг2П	—	147	88
	АД31Т	—	54	34
	АД31Т1	—	147	88
Сталь арматурная горячекатаная	А-I	—	225	—
	А-II	—	280	—
	А-III, $d = 6...8$ мм	—	355	—
	А-III, $d = 10...40$ мм	—	365	—

**Пример оформления титульного листа практической работы**

ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ ВОЛОГОДСКОЙ ОБЛАСТИ  
БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВОЛОГОДСКОЙ ОБЛАСТИ  
**«ВОЛОГОДСКИЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»**

Практическая работа №  
по дисциплине «Техническая механика»

Тема: « \_\_\_\_\_ »

Выполнил:

*Студент* \_\_\_\_\_

Группа \_\_\_\_\_

Отделение \_\_\_\_\_

Проверил:

Преподаватель \_\_\_\_\_

Оценка: \_\_\_\_\_

Дата: \_\_\_\_\_

Вологда  
2016 г.