Департамент образования Вологодской области
бюджетное профессиональное образовательное учреждение
Вологодской области
«ВОЛОГОДСКИЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим работам
по дисциплине **ЕН.01. Математика**

Специальность 08.02.01 «Строительство и эксплуатация зданий и сооружений»

2017 г.

Рассмотрено на заседании предметной цикловой комиссии общепрофессиональных, специальных дисциплин и дипломного проектирования по специальностям 08.02.01 «Строительство и эксплуатация зданий и сооружений», 08.02.07 «Монтаж и эксплуатация внутренних сантехнических устройств, кондиционирования воздуха и вентиляции», 43.02.08 «Сервис домашнего и коммунального хозяйства».

Данные методические указания предназначены для студентов по специальности 08.02.01 «Строительство и эксплуатация зданий и сооружений» БПОУ ВО «Вологодский строительный колледж» при выполнении практических работ.

Объем практической работы по дисциплине ЕН.01. Математика составляет **20** часов.

Перечень практических работ соответствует содержанию программы. Практическая работа студентов повышает интеллектуальный уровень обучающихся, формирует умение находить нужную информацию, систематизировать, обобщать, что необходимо для профессиональной подготовки будущего специалиста. Навыки исследовательской работы помогут студентам на старших курсах при выполнении и оформлении курсовых и дипломных проектов.

Практические занятия служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на уроках теоретического обучения, а так же для получения практических навыков. Практические задания выполняются студентом, с применением знаний и умений, полученных на уроках, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания.

Целями проведения практических занятий являются:
- обобщение, систематизация, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины ЕН.01.Математика;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- выработка при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность.

Методические указания разработаны в соответствии с учебной программой. В зависимости от содержания они могут выполняться студентами индивидуально или фронтально.

Методические указания могут быть рекомендованы к использованию студентами и преподавателями БПОУ ВО «Вологодский строительный колледж».

Авторы:
Севалева Елена Анатольевна, преподаватель БПОУ ВО «Вологодский строительный колледж»

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Комплект методических указаний для студентов по выполнению практических работ предназначен для использования в учебном процессе.

В методических указаниях присутствует необходимый теоретический минимум, включающий важнейшие определения, теоремы и формулы.

К практическому занятию от студента требуется предварительная подготовка, которую он должен провести перед занятием. Список литературы и вопросы, необходимые при подготовке, студент получает перед занятием из методических рекомендаций к практическому занятию.

Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, либо отсутствовал на занятии по уважительной причине, то он может получить консультацию преподавателя.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

При выполнении работы и ее оформлении необходимо соблюдать следующие правила:

- работа оформляется в тетради, имеющей поля для замечании преподавателя;
- решение задач необходимо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях;
- решение задач надо оформлять аккуратно, подробно объясняя все действия и используемые формулы;
- после получения проверенной преподавателем работы, студент должен исправить все отмеченные ошибки и недочеты;
- в случае незачета студент должен в кратчайший срок выполнить все требования преподавателя и представить работу на повторную проверку.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

№ п/п	Тема программы	Кол-во часов
1.	Производная функции, производная сложной функции.	2
2.	Частные производные и полный дифференциал функции двух переменных.	2
3.	Неопределенный интеграл. Интегрирование методом подстановки и по частям.	2
4.	Определенный интеграл.	2
5.	Вычисление площади плоской фигуры с помощью определенного интеграла.	2
6.	Вычисление объема тела с помощью определенного интеграла.	2
7.	Вероятность случайного события. Теоремы сложения и умножения вероятностей.	2
8.	Случайные величины. Их виды и числовые характеристики.	2
9.	Вычисление площадей плоских фигур.	2
10.	Вычисление площади поверхности и объема тела.	2
	ИТОГО:	**20**

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гулиян Б.Ш. Математика. Базовый курс [Электронный ресурс]: учебник/ Гулиян Б.Ш., Хамидуллин Р.Я.— Электрон. текстовые данные.— М.: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2013.— 712 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/17023.html.— ЭБС «IPRbooks»
2. Григорьев С.Г.Математика, Академия, 2012
3. Орлова И.В. Экономико-математическое моделирование: Практическое пособие по решению задач.- М.: Вузовский учебник, 2010.-144 с.
4. Березина Н.А. Высшая математика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Березина Н.А.— Электрон. текстовые данные.— Саратов: Научная книга, 2012.— 159 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/8233.html.— ЭБС «IPRbooks»

Интернет - ресурсы

1. Интернет-библиотека по математике http://ilib.mccme.ru

5. Учебная физико-математическая библиотека http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm

6. Math.ru - библиотека http://www.math.ru/lib/formats

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1
Тема: «Производная функции»
Цель: научиться вычислять производные функций, производные сложной функции.
Теория.

Определение: *Производной* функции $y = f(x)$ в точке x называется предел приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Правила вычисления производных: 1. $(u+v)' = u' + v'$;

2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v + u \cdot v'}{v^2}$.

Пример 1: Найти производную функции $y = 2\sqrt{x} + \ln x - \dfrac{3}{x^4}$.

Решение: $y' = \left(2\sqrt{x} + \ln x - \dfrac{3}{x^4}\right)' = 2\left(\sqrt{x}\right)' + (\ln x)' - 3\left(\dfrac{1}{x^4}\right)' = 2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} - 3 \cdot \left(-\dfrac{4}{x^5}\right) =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{12}{x^5}$.

Пример 2: Найти производную функции $y = \ln x \cdot \sin x$.

Решение: $y' = (\ln x \cdot \sin x)' = (\ln x)' \cdot \sin x + \ln x \cdot (\sin x)' = \dfrac{1}{x}\sin x + \ln x \cdot \cos x = \dfrac{\sin x}{x} + \ln x \cdot \cos x$.

Пример 3: Найти производную функции $y=\frac{3x^4-2}{\sqrt{x}}$.

Решение: $y'=\left(\frac{3x^4-2}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{\left(3x^4\right)'\cdot\sqrt{x}-3x^4\cdot\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{3\cdot 4x^3\cdot\sqrt{x}-3x^4\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{12x^3\sqrt{x}-\frac{3x^4}{2\sqrt{x}}}{x}=$

$=\frac{\frac{12x^3\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x}-3x^4}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{\frac{24x^3\cdot x-3x^4}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{24x^4-3x^4}{2x\sqrt{x}}=\frac{21x^4}{2x\sqrt{x}}=\frac{31x^3}{\sqrt{x}}$.

<u>*Определение:*</u> Если $y=f(u)$, где $u=u(x)$, то есть y - сложная функция, то производная сложной функции находится по следующему правилу: $y'=f'(u)\cdot u'(x)$, то есть производную внешней функции нужно умножить на производную внутренней функции.

Пример 4: Найти производную функции $y=\sin(x^2-3x)$.

Решение:

$y'=\left(\sin(x^2-3x)\right)'=\left|\ x^2-3x=t\ \right|=\sin' t=\cos t\cdot t'=\sin(x^2-3x)\cdot\left(x^2-3x\right)'=\sin(x^2-3x)\cdot(2x-3)=$

$=(2x-3)\sin(x^2-3x)$

Пример 5: Найти производную функции $y=\sqrt{4x^3-12x+8}$.

Решение:

$y'=\left(\sqrt{4x^3-12x+8}\right)'=\left|\ 4x^3-12x+8=t\ \right|=\left(\sqrt{t}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot t'=\frac{1}{2\sqrt{4x^3-12x+8}}\cdot\left(4x^3-12x+8\right)'=$

$=\frac{1}{2\sqrt{4x^3-12x+8}}\cdot\left(12x^2-12\right)=\frac{12x^2-12}{2\sqrt{4x^3-12x+8}}=\frac{2\left(6x^2-6\right)}{2\sqrt{4x^3-12x+8}}=\frac{6x^2-6}{\sqrt{4x^3-12x+8}}$.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение производной функции.
2. Перечислите правила вычисления производной.
3. Как определяется производная сложной функции?

<u>1 вариант</u>

Задание № 1. Найдите производные функций:

1. $y=x^6+15x^{10}+6$;
2. $y=(x^2+3)(2x^4-1)$;
3. $y=\sqrt{x}(8x-10)$;
4. $y=x\cdot\cos x$;
6. $y=3x\cdot ctg\,2x$;
7. $y=\left(12-3x\right)^5$;
8. $y=x^3\cdot\ln x$;
9. $y=\sin(2x-5)$;

5. $y = \dfrac{3x^2}{(3-4x)}$;

10. $y = \dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$.

Задание № 2. Найдите производные сложных функций:

1. $y = \cos^3 2x$;

3. $y = \ln(x^2 + x + 1)$;

2. $y = \sqrt{3x^6 - 2x}$;

4. $y = arctg\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

2 вариант

Задание № 1. Найдите производные функций:

1. $y = x^9 - 6x^{21} - 36$;

6. $y = \cos x \cdot ctg 3x$;

2. $y = (x^2 - 2)(x^7 + 4)$;

7. $y = (6 + 2x)^4$;

3 $y = \sqrt{x}(x^4 + 2)$;

8. $y = \dfrac{\ln x}{5x}$;

2. $y = \sqrt{x} \cdot \sin x$;

9. $y = \sin(3x + 1)$;

3. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$;

10. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x}}$.

Задание № 2. Найдите производные сложных функций:

1. $y = 5\sin^2 4x$;

3. $y = \sqrt{5x^2 + 4x}$;

2. $y = \ln^2 4x$;

4. $y = \cos 5x^3$.

3 вариант

Задание № 1. Найдите производные функций:

1. $y = x^7 - 4x^{16} - 3$;

6. $y = \sin x \cdot tg 2x$;

2. $y = (x^4 + 8)(5x^3 - 2)$;

7. $y = (4x - 5)^6$;

3. $y = \sqrt{x}(x^3 + 1)$;

8. $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$;

4. $y = x^2 \cdot \sin x$;

9. $y = tg(5x + 1)$;

5. $y = \dfrac{\cos x}{x}$;

10. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$.

Задание № 2. Найдите производные сложных функций:

1. $y = \sin 5x^3$;

3. $y = \sqrt{2x + 5}$;

2. $y = tg(\ln 2x)$;

4. $y = \ln(\cos 2x)$

4 вариант

Задание № 1. Найдите производные функций:

1 $y = x^{10} - 5x^8 + 1$;

2. $y = (x^4 + 4)(3x^2 - 6)$;

3. $y = \sqrt{x}(x^6 - 2)$;

4. $y = \sqrt{x} \cdot \cos x$;

5. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{8 - 3x}$;

6. $y = \cos 4x \cdot tgx$;

7. $y = (5x - 3)^7$;

8. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{8 - 3x}$;

9. $y = ctg(4x + 3)$;

10. $y = \dfrac{\ln x}{e^x}$.

Задание № 2. Найдите производные сложных функций:

1. $y = \cos 3x^2$;

2. $y = \sin(\ln x)$;

3. $y = \sqrt{3x^2 + 2x}$;

4. $y = \ln(2x - 4)$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

Тема: «Частные производные и полный дифференциал функции двух переменных»

Цель: научиться вычислять частные производные и полный дифференциал функции двух переменных.

Теория.

Определение: *Производной* функции $y = f(x)$ в точке x называется предел приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Правила вычисления производных:

1. $(u + v)' = u' + v'$;

2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v + u \cdot v'}{v^2}$.

Частная производная и полный дифференциал.

Определение: *Частная производная* функции двух переменных по одному из её аргументов равна пределу отношения частного приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$.

Пример 1: Найти частные производные функции: $z = x^2 y - 3y^2 + 5x$.

Решение: $\dfrac{\partial z}{\partial x}(y = const) = (x^2 y - 3y^2 + 5x)' = 2xy - 0 + 5 = 2xy + 5$;

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x = const) = (x^2 y - 3y^2 + 5x)' = x^2 \cdot 1 - 6y + 0 = x^2 - 6y.$$

Определение: *Полный дифференциал* функции $z = f(x; y)$ обозначается dz и имеет вид:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad \text{или} \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

Пример 2: Найти полный дифференциал функции $z = xy^2 + 4y$.

Решение: Найдём частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x}(y = const) = (xy^2 + 4y)' = 1 \cdot y^2 + 0 = y^2$;

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x = const) = (xy^2 + 4y)' = x \cdot 2y + 4 = 2xy + 4 \;;$$

тогда полный дифференциал будет иметь вид: $dz = y^2 dx + (2xy + 4)dy$

Пример 3: Найти полный дифференциал функции $z = \frac{x^3}{2} - \frac{y^4}{8}$ при $x = 2, \quad y = 1, \quad \Delta x = 0{,}1, \quad \Delta y = 0{,}2$.

Решение: Полный дифференциал функции имеет вид: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$. Тогда найдём частные производные заданной функции: $\frac{\partial z}{\partial x}(y = const) = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{y^4}{8}\right)' = \frac{3x^2}{2} - 0 = \frac{3x^2}{2}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x = const) = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{y^4}{8}\right)' = 0 - \frac{4y^3}{8} = \frac{y^3}{2} \;;$$

тогда полный дифференциал будет иметь вид: $dz = \frac{3x^2}{2}\Delta x - \frac{y^3}{2}\Delta y$. Подставим в формулу полного дифференциала заданные значения:

$$dz = \frac{3 \cdot 2^2}{2} \cdot 0{,}1 + \frac{1^3}{2} \cdot 0{,}2 = 6 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}6 + 0{,}1 = 0{,}7.$$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение производной функции.
2. Перечислите правила вычисления производной.
3. Дайте понятие частной производной функции.
4. Дайте понятие полного дифференциала.

<u>1 вариант</u>

Задание № 1. Найдите частные производные функций:

1. $z = y^3 - 3y + 3x$;
2. $z = \ln y + \frac{y}{x}$;
3. $z = x^3 + y^3$;
4. $z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36}$.

Задание № 2. Найдите полный дифференциал функции:

1. $z = 3xy - 2x^2 y^3$; 2. $z = \arccos(x - y)$; 3. $z = 3x^2 - \sin xy^2$.

Задание № 3. Найдите полный дифференциал при заданных значениях $x, y, \Delta x, \Delta y$:

1. $z = y^2 + 3xy + x, \quad x = 1,\ y = 2,\ \Delta x = 0{,}05,\ \Delta y = -0{,}05$;

2. $z = x^2 + 2xy + y^2, \quad x = 2,\ y = 1,\ \Delta x = 0{,}06,\ \Delta y = -0{,}02$

2 вариант

Задание № 1 . Найдите частные производные функций:

1. $z = y^2 - 2y + 5x$;
2. $z = 2y^3x - 3x^3y + 5x$;
3. $z = \ln(x^3 - 5y^2)$;
4. $z = \cos(x^2 - y^2)$.

Задание № 2. Найдите полный дифференциал функции:

1. $z = 2x^3 + 4y^2 + 5xy$; 2. $z = \arcsin(x + y)$; 3. $z = 2xy - \cos xy$.

Задание № 3. Найдите полный дифференциал при заданных значениях $x,\ y,\ \Delta x,\ \Delta y$:

1. $z = x^2 + 3xy + y^2, \quad x = 1,\ y = 1,\ \Delta x = -0{,}02,\ \Delta y = 0{,}04$;

2. $z = x^2 + y^2 + 2x - 2y, \quad x = 1,\ y = 1,\ \Delta x = -0{,}06,\ \Delta y = 0{,}05$.

3 вариант

Задание № 1. Найдите частные производные функций:

1. $z = y^4 - 3x^2 + 2xy$;
2. $z = 3y^2x^3 - 4yx^2 + 3y$;
3. $z = \ln(x^2 - 4y^3)$;
4. $z = e^{x^2 y}$.

Задание № 2. Найдите полный дифференциал функции:

1. $z = 3xy - 2x^2y^3$; 2. $z = \arccos(x - y)$; 3. $z = 3x^2 - \sin xy^2$.

Задание № 3. Найдите полный дифференциал при заданных значениях $x,\ y,\ \Delta x,\ \Delta y$:

1. $z = y^2 + 3xy + x, \quad x = 1,\ y = 2,\ \Delta x = 0{,}05,\ \Delta y = -0{,}05$;

2. $z = x^2 + 2xy + y^2, \quad x = 2,\ y = 1,\ \Delta x = 0{,}06,\ \Delta y = 0{,}02$.

4 вариант

Задание № 1. Найдите частные производные функций:

1. $z = xy^3 + x^2 + 2y$;
2. $z = y^2x - 2yx^3 + 3x$;
3. $z = \ln(x \quad - 4xy^3)$;
4. $z = e^{x^2 y^2}$.

Задание № 2. Найдите полный дифференциал функции:

1. $z = 2xy - 2x^2y^2$; 2. $z = \arcsin(x - y)$; 3. $z = 3x^2 - \cos xy$.

Задание № 3. Найдите полный дифференциал при заданных значениях $x,\ y,\ \Delta x,\ \Delta y$:

1. $z = y^2 + 3x^2 y + y, \quad x = 1,\ y = 2,\ \Delta x = 0{,}05,\ \Delta y = -0{,}05$;

2. $z = x^2 + 2xy^3 + x^2, \quad x = 2,\ y = 1,\ \Delta x = 0{,}06,\ \Delta y = 0{,}02$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3

По теме: «Интегрирование функций»
Цель: научиться интегрировать функции, используя основные формулы интегрирования, а также способом подстановки и по частям.
Теория.
Неопределённый интегра́л для функции $f(x)$ — это совокупность всех *первообразных* данной функции. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $(a; b)$ и $F(x)$ - её первообразная, то есть $F'(x) = f(x)$ при $a \langle x \langle b$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.
Методы интегрирования.
Таблица интегралов.

1	$\int dx = x + C$;	9	$\int \sin x dx = -\cos x + C$;
2	$\int a dx = ax + C$;	10	$\int \cos x dx = \sin x + C$;
3	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$;	11	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$;
4	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C$;	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$
5	$\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$;	13	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$;
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;	14	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{a+x}{a-x} \right\rvert + C$;
7	$\int e^x dx = e^x + C$;	15	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$;
8	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;		

Пример 1. Вычислить неопределенный интеграл $\int x^5 dx$.

Решение: Для решения данного интеграла не нужно использовать свойства неопределенных интегралов, достаточно формулы интеграла степенной функции:

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$; в нашем случае $n = 5$, тогда искомый интеграл равен: $\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} = \frac{x^6}{6} + C$.

Пример 2. Вычислить неопределенный интеграл: $\int (4x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}})dx$.

Решение: Для этого интеграл суммы разложим на сумму интегралов.

$$\int (4x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}})dx = 4\int x^2 dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + 2\sqrt{x} = \frac{4x^3}{3} + 2\sqrt{x} + C.$$

Метод замены переменной (метод подстановки).

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (то есть подстановки). При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является **табличным** или к нему сводящимся. Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой. Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $dx = \varphi'(t)dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем *формулу интегрирования подстановкой:*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Пример 3: Вычислить интеграл $\int \frac{tg^3 x}{\cos^2 x} dx$.

Решение: Сделаем замену переменной tg $x = t$, тогда $dt = (\,tgx\,)' \cdot dx = \frac{1}{\cos^2 x} dx$. Получим табличный интеграл $\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C$, где C - произвольная постоянная. Производя обратную замену переменной, получим: $\int \frac{tg^3 x}{\cos^2 x} dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} tg^4 x + C$.

Пример 4: Вычислить интеграл $\int \frac{x+1}{x^2 + 2x - 5} dx$.

Решение: Сделаем замену переменной $x^2 + 2x - 5 = t$, тогда $dt = (x^2 + 2x - 5)' \cdot dx = (2x + 2)dx =$

$= 2(x+1)dx$. Отсюда $(x+1)dx = \frac{dt}{2}$.

Получим табличный интеграл $\int \frac{\frac{dt}{2}}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t + C$, где C - произвольная постоянная.

Производя обратную замену переменной, получим: $\int \frac{x+1}{x^2 + 2x - 5} dx = \int \frac{\frac{dt}{2}}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t + C ==$

$\frac{1}{2}\ln\left| x^2 + 2x - 5 \right| + C$.

Метод интегрирования по частям.

Интегрирование по частям – применение следующей формулы интегрирования:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du\,.$$

*Пример 5:*_Найти интеграл_$\int x \cdot \ln^2 x dx$.

Решение: Применим формулу интегрирования по частям $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$.

$$\int x \cdot \ln^2 x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln^2 x & dv = xdx \\ du = \left(\ln^2 x\right)' dx & \int dv = \int xdx \\ du = \dfrac{2\ln x}{x} dx & v = \dfrac{x^2}{2} dx \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \cdot \ln^2 x - \int x \cdot \ln x dx.$$ Снова применим формулу интегрирования по частям:

$$\int x \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = xdx \\ du = (\ln x)' dx & \int dv = \int xdx \\ du = \dfrac{1}{x} dx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int xdx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$ Таким образом, получим:

$$\int x \cdot \ln^2 x dx = \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4}\left(2\ln^2 x - \ln x + 1\right) + C.$$

Пример 6. Вычислить $\int xe^x dx$.

Решение. $$\int xe^x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & \int dv = \int e^x dx \\ & v = e^x \end{array} \right| = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C.$$

Контрольные вопросы:

1. Дайте понятие первообразной функции.
2. Дайте понятие неопределённого интеграла.
3. Перечислите свойства неопределённого интеграла.
4. В чём заключается интегрирование функций способом подстановки?
5. В чём заключается интегрирование функций по частям?

1 вариант

Задание № 1. Вычислите интегралы следующих функций:

1. $\int 2xdx$;
2. $\int x^{11}dx$;
3. $\int 4\sqrt{x}dx$;
4. $\int \sin 2xdx$;
5. $\int \left(\cos x - \dfrac{4}{\cos^2 x}\right)dx$;
6. $\int \dfrac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$;
7. $\int 2^x dx$;
8. $\int \left(\dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{3}{4}x^{\frac{1}{3}} + 5\right)dx$;
9. $\int \sqrt[3]{x^2}dx$;
10. $\int \dfrac{x^3+3x^2+4x-1}{x}dx$.

Задание № 2. Проинтегрируйте функции способом подстановки:

1. $\int \dfrac{dz}{(5z+1)^3}$;
2. $\int \sqrt[4]{3x-1}dx$;
3. $\int \dfrac{5dx}{x-3}$;
4. $\int \dfrac{x^2dx}{x^3-2}$;
5. $\int tgxdx$;
6. $\int \dfrac{6z^3dz}{1-2z^4}$.

Задание № 3. Проинтегрируйте функции по частям:

1. $\int x\cdot\sin xdx$;
2. $\int x\cdot\ln xdx$.

2 вариант

Задание № 1. Вычислите интегралы следующих функций:

1. $\int \dfrac{3dx}{x}$;
2. $\int -5zdx$;
3. $\int 5x^{20}dx$;
4. $\int 4(x^2-x+3)dx$;
5. $\int \cos 3xdx$;
6. $\int \dfrac{2dx}{9+x^2}$;
7. $\int \sqrt[4]{x^3}dx$;
8. $\int \left(\dfrac{7}{8}x^{\frac{1}{5}} - \dfrac{4}{3}x^{\frac{2}{3}} + 4\right)dx$;
9. $\int 3(2x^2-1)^2dx$;
10. $\int \dfrac{x^2-x+x^3+1}{x}dx$

Задание № 2. Проинтегрируйте функции способом подстановки:

1. $\int \frac{dx}{(4-3x)^3}$;
2. $\int \sqrt{(2x+1)^3}\,dx$;
3. $\int \frac{2xdx}{x^2+1}$;
4. $\int \frac{\cos x}{2\sin x+1}dx$;
5. $\int \frac{x^7dx}{x^8+4}$;
6. $\int \frac{2x-4}{x^2-4x-6}dx$.

Задание № 3. Проинтегрируйте функции по частям:

1. $\int x\cdot\cos xdx$;
2. $\int x^2\cdot e^x dx$.

<u>3 вариант</u>

Задание № 1. Вычислите интегралы следующих функций:

1. $\int\left(\frac{3}{x}+2x\right)dx$;
2. $\int(5x^{20}-\frac{1}{\sqrt{x}})dx$;
3. $\int 4(x^2-x+3)dx$;
4. $\int(\cos x-e^x)dx$;
5. $\int\frac{5dx}{\sin^2 x}$;
6. $\int\frac{2dx}{9+x^2}$;
7. $\int\left(\cos x-\frac{4}{\cos^2 x}\right)dx$;
8. $\int\frac{2}{x^2+25}dx$;
9. $\int\frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $\int\left(\frac{1}{x}+\sin x\right)dx$.

Задание № 2. Проинтегрируйте функции способом подстановки:

1. $\int\frac{dz}{(5z+1)^3}$;
2. $\int\frac{x^2dx}{x^3-2}$;
3. $\int\frac{5dx}{x-3}$;
4. $\int\frac{\cos x}{2\sin x+1}dx$;
5. $\int\sqrt{(2x+1)}\;dx$;
6. $\int\frac{x^7dx}{x^8+4}$;

Задание № 3. Проинтегрируйте функции по частям:

1. $\int x\cdot\sin xdx$;
2. $\int \ln x\cdot e^x dx$.

4 вариант

Задание № 1. Вычислите интегралы следующих функций:

1. $\int \frac{5dx}{\sin^2 x}$;
2. $\int \frac{2}{x^2+25}dx$;
3. $\int (2x - 3\sqrt{x} + \sin x)dx$;
4. $\int \frac{3dx}{\sqrt{x}}$;
5. $\int (\cos x + tgx + 5)dx;$;
6. $\int \frac{dz}{3\sqrt{1-z^2}}$;
7. $\int \frac{3dx}{x}$;
8. $\int (\frac{2}{x} - 6x + e^x)dx;$;
9. $\int (\frac{1}{2\sqrt{x}} + ctgx)dx;$;
10. $\int (2 - 3x + 5x^2)dx$.

Задание № 2. Проинтегрируйте функции способом подстановки:

1. $\int \frac{6x^3dx}{1-2x^4}$;
2. $\int \frac{dx}{(4-3x)^3}$;
3. $\int \frac{\cos xdx}{\sin^2 x}$;
4. $\int \frac{2xdx}{x^2+1}$;
5. $\int \frac{2x}{x^2-6}dx$;
6. $\int \frac{4xdx}{5+2x^2}$.

Задание № 3. Проинтегрируйте функции по частям:

1. $\int x^2 \cdot e^x dx$;
2. $\int e^x \cdot \cos xdx$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

По теме: «Определенный интеграл»
Цель: научиться вычислять определенный интеграл, используя формулу Ньютона – Лейбница.
Теория.
Определённым интегралом от непрерывной функции *f(x)* на конечном отрезке [a, b] (где $a \neq b$) называется приращение какой-нибудь её первообразной на этом отрезке. При этом употребляется запись $\int_a^b f(x)dx$.

Решить определенный интеграл – это значит, найти число.

Вычисляется определенный интеграл с помощью **<u>формулы Ньютона-Лейбница</u>:**
$\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

a – нижний предел интегрирования;
b – верхний предел интегрирования;
f(x) – подинтегральная функция;
F(X) – первообразная.

Этапы решения определенного интеграла:

1) Сначала находим первообразную функцию *F(X)* (неопределенный интеграл). Обратите внимание, что константа *C* в определенном интеграле *не добавляется.*
2) Подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию: *F(b)* .
3) Подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию: *F(a)* .
4) Рассчитываем разность *F(b) - F(a)* , то есть, находим число.

Пример 1: Вычислить интеграл $\int_0^1 e^{2x}dx$.

Решение: На основании таблицы основных интегралов и формулы имеем:

$$\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right).$$

Пример 2: Вычислить интеграл $\int_{-1}^{2}\left(x^2 + 2x + 1\right)dx$.

Решение: На основании таблицы основных интегралов имеем:

$$\int_{-1}^{2}\left(x^2 + 2x + 1\right)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + 2\cdot\frac{1}{2}x^2 + x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(\frac{1}{3}\cdot 2^3 + 2^2 + 2\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 + (-1)^2 + (-1)\right) = 9$$

Пример 3: Вычислить интеграл $\int_0^8\left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right)dx$.

Решение: На основании таблицы основных интегралов имеем:

$$\int_0^8\left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right)dx = \int_0^8\left(\sqrt{2\cdot\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}\right)dx = \sqrt{2}\int_0^8\sqrt{x}dx + \int_0^8\sqrt[3]{x}dx = \sqrt{2}\int_0^8 x^{\frac{1}{2}}dx + \int_0^8 x^{\frac{1}{3}}dx =$$

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right)\Bigg|_0^8 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\right)\Bigg|_0^8 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{8^3} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{8^4}\right) - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{0^3} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{0^4}\right) = 33\frac{1}{3}$$

Пример 4: Вычислить интеграл $\int_4^{4\sqrt{3}}\frac{dx}{16 + x^2}$.

Решение. На основании таблицы основных интегралов имеем:

$$\int_4^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{16+x^2} = \int_4^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{4^2+x^2} = \frac{1}{2} arctg \frac{x}{4}\Big|_4^{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(arctg \frac{4\sqrt{3}}{4} - arctg \frac{4}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(arctg\sqrt{3} - arctg 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{24}$$

Таблица интегралов.

1	$\int dx = x + C$;	9	$\int \sin x dx = -\cos x + C$;
2	$\int a dx = ax + C$;	10	$\int \cos x dx = \sin x + C$;
3	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$;	11	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$;
4	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C$;	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$
5	$\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$;	13	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2} arctg \frac{x}{a} + C$;
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;	14	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert \frac{a+x}{a-x} \right\rvert + C$;
7	$\int e^x dx = e^x + C$;	15	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$;
8	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;	16	$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$;

1 вариант

Задание № 1. Вычислите интегралы следующих функций:

1) $\int_{-\frac{2}{3}}^{1} x^3 dx$; 2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx$; 3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 3x}$; 4) $\int_1^2 (3x^2 - x + 5)dx$; 5) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3}$;

6) $\int_0^4 \sqrt{x}dx$; 7) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; 8) $\int_0^4 \left(x - 3\sqrt{x}\right)dx$; 9) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$; 10) $\int_0^4 \sqrt[3]{3x-4}dx$.

2 вариант

Задание № 1. Вычислите интегралы следующих функций:

1) $\int_{-1}^{2} x^4 dx$; 2) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; 3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 2x}$; 4) $\int_{0}^{1} e^x dx$; 5) $\int_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

6) $\int_{1}^{8} \sqrt[3]{x^2} dx$; 7) $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}$; 8) $\int_{1}^{9} \left(2x - \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx$; 9) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{5x-2}}$; 10) $\int_{0}^{4} \sqrt{3-4x} dx$.

3 вариант

Задание № 1. Вычислите интегралы следующих функций:

1) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x^2}$; 2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; 3) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$; 4) $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x}$; 5) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$; 6) $\int_{1}^{4} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$;

7) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 8) $\int_{1}^{2} (5x^3 + x^2 + 4x+) dx$; 9) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{4x}}$; 10) $\int_{0}^{4} \sqrt[3]{2x+5} dx$.

4 вариант

Задание № 1. Вычислите интегралы следующих функций:

1) $\int_{4}^{9} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 2) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$; 3) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\sin \frac{x}{2} dx$; 4) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^4}$; 5) $\int_{-2}^{3} (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1) dx$;

6) $\int_{0}^{1} e^{3x} dx$; 7) $\int_{5}^{5\sqrt{3}} \frac{dx}{25+x^2}$; 8) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; 9) $\int_{21}^{4} \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$; 10) $\int_{0}^{4} \sqrt{3x-4} dx$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5

По теме: «Вычисление площади плоской фигуры с помощью определенного интеграла»
Цель: научиться решать задачи на вычисление площади криволинейной плоской фигуры с помощью определенного интеграла.
Теория.
Определенный интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ - это предел, к которому стремится интегральная сумма $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, при стремлении к нулю длины наибольшего частичного отрезка.

$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, где a - нижний предел интегрирования, b - верхний предел интегрирования.

Для вычисления определенного интеграла служит *формула Ньютона-Лейбница:* $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$

Геометрический смысл определенного интеграла. Если интегрируемая на отрезке $[a;b]$ функция $y = f(x)$ неотрицательна, то $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции: $\int_a^b f(x)dx = S_{кр.тр.}$

Криволинейная трапеция - фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$, $x = b$.

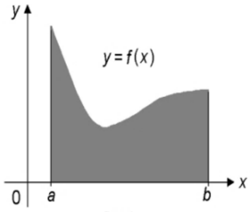
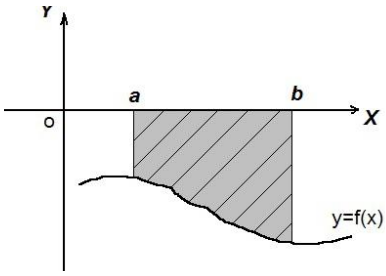


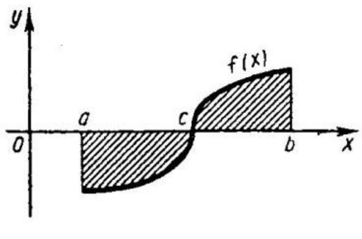
Рис. 1

<u>Возможны различные случаи расположения плоских фигур в координатной плоскости:</u>

1) Если криволинейная трапеция с основанием $[a;b]$ ограничена снизу кривой $y = f(x)$, то из соображений симметрии видно, что площадь фигуры равна $S_ф = -\int_a^b f(x)dx$ или $S_ф = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

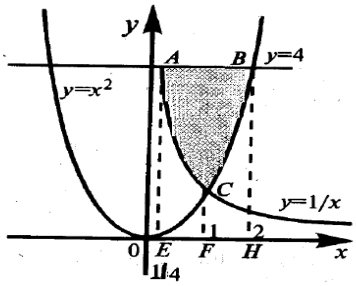


2) Если фигура ограничена кривой, которая принимает и положительные, и отрицательные значения. В этом случае, чтобы вычислить площадь искомой фигуры, необходимо разбить ее на части, тогда $S_ф = \left|\int_a^c f(x)dx\right| + \int_c^b f(x)dx$.



3) Если плоская фигура ограничена двумя кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, то ее площадь можно найти с помощью площадей двух криволинейных трапеций: $S_1 = \int_a^b f_1(x)dx$ и $S_2 = \int_a^b f_2(x)dx$. В данном случае площадь искомой фигуры можно вычислить по формуле: $S_ф = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx$.

$f_1(x)$



$f_2(x)$

Алгоритм решения задачи на вычисление площади фигуры, ограниченной заданными линиями:

1) Построить в одной координатной плоскости заданные линии.

2) Заштриховать фигуру, ограниченную данными линиями.

3) Определить пределы интегрирования (найти абсциссы точек пересечения кривых).

4) Вычислить площадь фигуры, выбрав необходимую формулу.

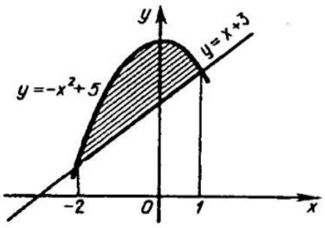
5) Записать ответ.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 5;\quad y = x + 3$.

Решение.

1) Построим параболу $y = -x^2 + 5$ и прямую $y = x + 3$ в координатной плоскости.

2) Выделим (заштрихуем) фигуру, ограниченную данными линиями



3) Найдем абсциссы точек пересечения параболы и прямой. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 5 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

$$-x^2 + 5 = x + 3$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x_1 = -2;\quad x_2 = 1.$$

4) Площадь фигуры найдем как разность площадей криволинейных трапеций, ограниченных параболой и прямой.

$$S_1 = \int_{-2}^{1} \left(-x^2 + 5\right) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 5x\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \left(-\frac{1^3}{3} + 5\cdot 1\right) - \left(-\frac{(-2)^3}{3} + 5\cdot(-2)\right) = -\frac{1}{3} + 5 - \frac{8}{3} + 10 = 12\left(ед^2\right)$$

$$S_2 = \int\limits_{-2}^{1}(x+3)dx = \left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \left(\frac{1^2}{2}+3\cdot 1\right)-\left(\frac{(-2)^2}{2}+3\cdot(-2)\right) = \frac{1}{2}+3-2+6 = 7{,}5\left(ед^2\right)$$

$$S_ф = S_1 - S_2 = 12 - 7{,}5 = 4{,}5\left(ед^2\right)$$

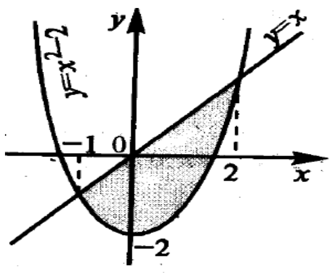
Ответ. $S_ф = 4{,}5\left(ед^2\right)$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2$ и $y = x$.

Решение.

1) Построим параболу $y = x^2 - 2$ и прямую $y = x$ в координатной плоскости.

2) Выделим (заштрихуем) фигуру, ограниченную данными линиями



3) Найдем абсциссы точек пересечения параболы и прямой. Для этого решим системы:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = x \end{cases}$$

$$x^2 - 2 = x$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x_1 = 2 \quad x_2 = -1$$

5) Площадь фигуры найдем как разность площадей криволинейных трапеций, ограниченных параболой и прямой.

$$S_1 = \int\limits_{-1}^{2}\left(x^2-2\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}-2x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(\frac{2^3}{3}-2\cdot 2\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}-2\cdot(-1)\right) = \frac{8}{3}-4+\frac{1}{3}-2 = 3-6 = -3(ед^2)$$

$$S_2 = \int\limits_{-1}^{2} xdx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{2^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2} = 2-\frac{1}{2} = 1{,}5(ед^2)$$

$$S_ф = S_2 - S_1 = 1{,}5-(-3) = 4{,}5\left(ед^2\right)$$

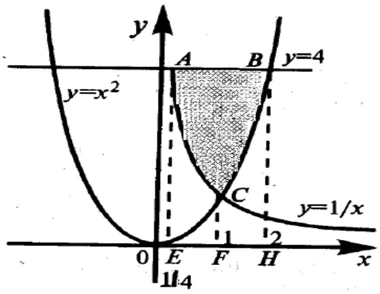
Ответ. $S_ф = 4{,}5\left(ед^2\right)$

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{x}$, $y=x^2$, $y=4$ в неотрицательной координатной четверти.

Решение.

1) Построим параболу $y=x^2$, гиперболу $y=\frac{1}{x}$, и прямую $y=4$ в координатной плоскости.

2) Выделим (заштрихуем) фигуру, ограниченную данными линиями.



3) Найдем абсциссы точек пересечения параболы и гиперболы. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=\frac{1}{x} \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} &x^2=\frac{1}{x} \\ &x^3=1 \\ &x=1 \end{aligned}$$

4) Найдем абсциссы точек пересечения параболы и прямой, гиперболы и прямой. Для этого решим уравнения $x^2=4$ и $\frac{1}{x}=4$. Получим $x=\pm 2$ и $x=\frac{1}{4}$.

5) Искомая площадь фигуры ABC равна разности между площадью прямоугольника ABHE и суммой площадей двух криволинейных трапеций ACFE и CBHF.

6) Вычислим площадь ABHE: AE = 4 (*ед),* EH = $4-\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}$ *(ед),* тогда $S_{ABHE}=4\cdot 3\frac{1}{4}=12(ед^2)$

7) Вычислим площадь ACFE: $S_{ACFE}=\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}=\ln 1-\ln\frac{1}{4}=\ln 1:\frac{1}{4}=\ln 4(ед^2)$

8) Вычислим площадь CBHF: $S_{CBHF}=\int\limits_{1}^{2}x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{1}^{2}=\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}(ед^2)$

9) Искомая площадь ABC:

$$S_{ABC}=S_{ABHE}-(S_{ACFE}+S_{CBHF})=12-\left(\ln 4+2\frac{1}{3}\right)\approx 12-(1{,}386+2{,}333)\approx 8{,}281\,(ед^2).$$

<u>1 вариант</u>

Задание № 1. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

1) $y = x^4, \quad y = 0, \quad y = -1, \quad y = 1;$

2) $y = x^3, \quad y = 8, \quad x = 1;$

3) $y = 4x - x^2, \quad y = 4 - x;$

4) $y = x^2 - 4x + 4, \quad y = 4 - x^2.$

2 вариант

Задание № 1. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

1) $y = x^4, \quad y = 1;$

2) $y = \dfrac{16}{x^2}, \quad y = 1, \quad y = 2x, \quad x = 4;$

3) $y = 2 - x^3, \quad y = 1, \quad x = -1, \quad x = 1;$

4) $y = x^2 - 2x + 4, \quad y = 2 + 6x - x^2.$

3 вариант

Задание № 1. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

1) $y = x^2 - 4x + 5, \quad y = 0, \quad x = 0, x = 4;$

2) $y = -x^2 - 4x, \quad y = 0, \quad y = -3, \quad x = -1;$

3) $y = x^2, \quad y = 2x;$

4) $y = x^2, \quad y = 2x - x^2.$

4 вариант

Задание № 1. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

1) $y = x^2 - 4x + 5, \quad y = 4;$

2) $y = -x^2 - 4x, \quad y = 1, \quad x = -3, \quad x = -1;$

3) $y = 6 - 2x, \quad y = 6 + x - x^2;$

4) $y = x^2, \quad y = x^3.$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 6

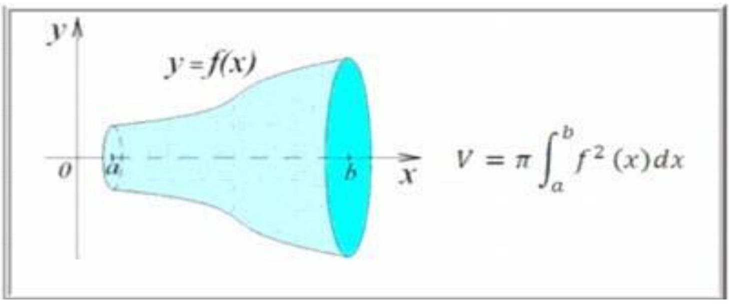
По теме: «Вычисление объема тела с помощью определенного интеграла»

Цель: научиться решать задачи на вычисление объема тела вращения с помощью определенного интеграла.

Теория.

Вычисление объема тела вращения вокруг оси *Ox*.

Пусть график функции $y = f(x)$ вращается вокруг оси Ox, образуя так называемую поверхность вращения. Определим объем тела, ограниченного этой поверхностью и плоскостями $x = a, x = b$.

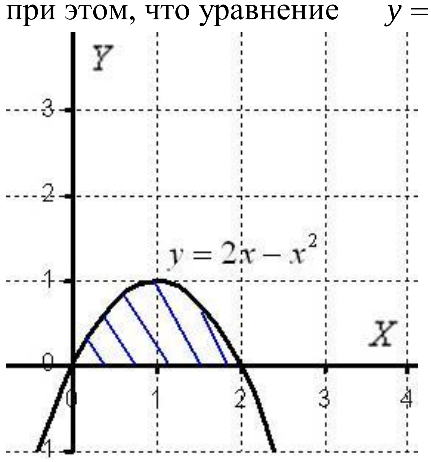


Объем тела вращения, образованного вращением графика *y=f(x)* вокруг оси *Ox,* может быть вычислен по формуле $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$.

Пример 1. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2, \quad y = 0$ вокруг оси Ox .

Решение.

Изобразим на чертеже плоскую фигуру, ограниченную линиями $y = 2x - x^2, \quad y = 0$, не забывая при этом, что уравнение $y = 0$ задает ось Ox :



Объем тела вращения можно вычислить по формуле:

$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$.

Плоская фигура ограничена графиком параболы $y = 2x - x^2$ сверху. Это и есть та функция, которая подразумевается в формуле.

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx = \pi \int\limits_1^2 \left(2x - x^2\right)^2 dx = \pi \int\limits_1^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)dx = \pi \left(4\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_1^2 =$$

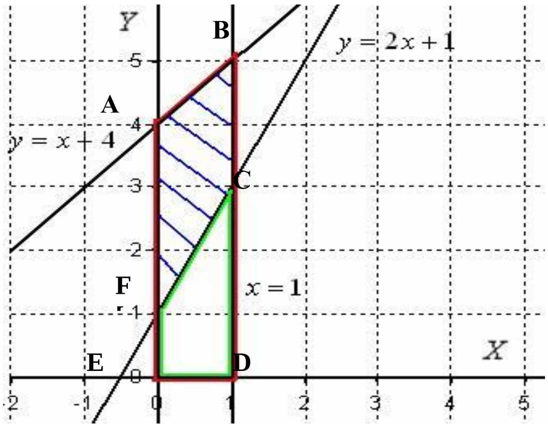
$$\pi \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_1^2 = \pi \left[\left(\frac{4 \cdot 2^3}{3} - 2^4 + \frac{2^5}{5} \right) - \left(\frac{4 \cdot 1^3}{3} - 1^4 + \frac{1^5}{5} \right) \right] \approx \pi\left[(10{,}67 - 16 + 10{,}4) -\right.$$

$$\left. -(1{,}33 - 1 + 0{,}2\right] \approx \pi(5{,}07 - 0{,}53) \approx 3{,}14 \cdot 4{,}54 \approx 14{,}256\,(ед^3).$$

Ответ: $V \approx 14{,}256$ *ед*^{3}.

Пример 2. Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = 2x + 1, \quad y = x + 4, \quad x = 0, \quad x = 1$.

Решение: Изобразим на чертеже плоскую фигуру, ограниченную линиями $y = 2x + 1, \quad y = x + 4, \quad x = 0, \quad x = 1$ не забывая при этом, что уравнение $x = 0$ задает ось Oy :



Искомая фигура ABCF заштрихована, при её вращении вокруг оси Ox получится тело с четырьмя углами. Объем тела вращения вычислим как *разность объемов тел*.

Сначала рассмотрим фигуру ABDE. При её вращении вокруг оси Ox получается усеченный конус. Обозначим объем этого усеченного конуса через V_1.

Рассмотрим фигуру FCDE. Если вращать данную фигуру вокруг оси Ox, то получится тоже усеченный конус, только чуть поменьше. Обозначим его объем через V_2. Тогда объем тела, полученного при вращении заштрихованной фигуры вокруг оси Ox, вычисляется по формуле: $V = V_1 - V_2$.

Используем формулу для нахождения объема тела вращения: $V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$

1) Фигура ABDE ограничена сверху прямой $y = x + 4$, поэтому:

$$V = \pi\int\limits_0^1 f^2(x)dx = \pi\int\limits_0^1 (x+4)^2 dx = \pi\int\limits_0^1 (x^2+8x+16)dx = \pi\left(\frac{x^3}{3} + 8\frac{x^2}{2} + 16x\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{x^3}{3} + 4x^2 + 16x\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \pi\left[\left(\frac{1^3}{3} + 4\cdot 1^2 + 16\cdot 1\right) - \left(\frac{0^3}{3} + 4\cdot 0^2 + 16\cdot 0\right)\right] \approx \pi[(0{,}33+4+16)-0] \approx 3{,}14\cdot 20{,}33 \approx 63{,}836\,ед^3$$

2) Фигура FCDE ограничена сверху прямой $y = 2x + 1$, поэтому:

$$V = \pi\int\limits_0^1 f^2(x)dx = \pi\int\limits_0^1 (2x+1)^2 dx = \pi\int\limits_0^1 (4x^2+4x+1)dx = \pi\left(4\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{4\cdot x^3}{3} + 2x^2 + x\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \pi\left[\left(\frac{4\cdot 1^3}{3} + 2\cdot 1^2 + 1\right) - \left(\frac{4\cdot 0^3}{3} + 2\cdot 0^2 + 0\right)\right] \approx \pi[(1{,}33+2+1)-0] \approx 3{,}14\cdot 4{,}33 \approx 13{,}596\ ед^3$$

3) Объем искомого тела вращения: $V = V_1 - V_2 \approx 63{,}836 - 13{,}596 = 50{,}24\ ед^3$.

Ответ: $V \approx 50{,}24\ ед^3$.

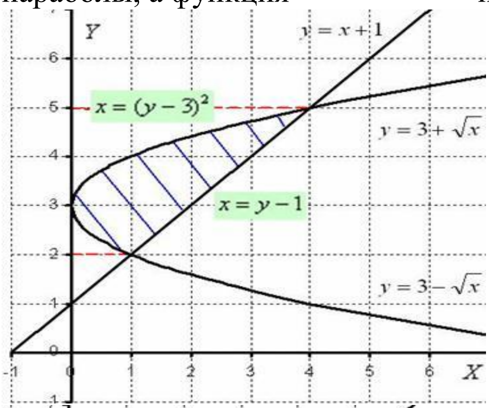
Вычисление объема тела вращения вокруг оси *Oy*.

Пусть график функции $x = \varphi(y)$ вращается вокруг оси Oy, образуя так называемую поверхность вращения. Определим объем тела, ограниченного этой поверхностью и плоскостями $y = c$, $y = d$.

Объем тела вращения, образованного вращением графика $x = \varphi(y)$ вокруг оси Oy, может быть вычислен по формуле $V = \pi\int\limits_c^d \varphi^2(y)dy$.

Пример 3. Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной данными линиями $y = 3 + \sqrt{x}, \quad y = 3 - \sqrt{x}, \quad y = x + 1$, вокруг оси Oy.

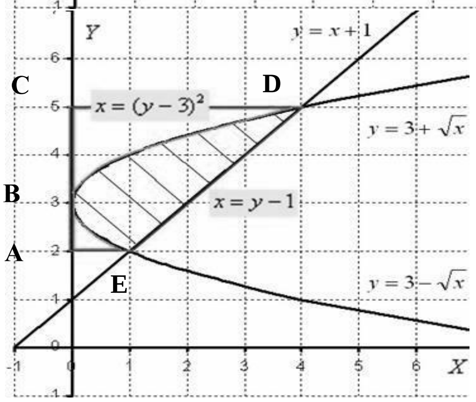
Решение: 1) Выполним чертёж. Легко заметить, что функция $y = 3 + \sqrt{x}$ задает верхнюю ветку параболы, а функция $y = 3 - \sqrt{x}$ – нижнюю ветку параболы. Нужная фигура BDE заштрихована.



перейдем к обратным функциям и интегрированию по оси Oy. Выразим «*x*» через «*y*»:

- $y = 3 + \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = y - 3 \Rightarrow x = (y-3)^2$;
- $y = 3 - \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = 3 - y \Rightarrow x = (3-y)^2 \Rightarrow x = (3-y)^2$:
- $y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1$.

Нужная фигура лежит на отрезке $[2; 5]$.



При этом на отрезке $[2; 5]$ прямая $x = y - 1$ расположена выше параболы $x = (y-3)^2$, а значит, площадь фигуры следует найти по уже знакомой вам формуле: $V = V_1 - V_2$.

Сначала рассмотрим фигуру ACDE. При её вращении вокруг оси Oy получается усеченный конус. Обозначим объем этого усеченного конуса через V_1.

Вращаем фигуру ABCDF вокруг оси Oy и обозначаем через V_2 объем полученного тела вращения.

Объем нашей фигуры равен разности объемов $V = V_1 - V_2$.

$$V_1 = \pi \int_0^1 \varphi^2(y)dy = \pi \int_2^5 (y-1)^2 dy = \pi \int_0^1 (y^2 - 2y + 1)dx = \pi \left(2\frac{y^3}{3} - 2\frac{y^2}{2} + y \right) \Bigg|_2^5 = \pi \left(\frac{2 \cdot y^3}{3} - y^2 + y \right) \Bigg|_2^5 =$$

$$= \pi \left[\left(\frac{2 \cdot 5^3}{3} - 5^2 + 5 \right) - \left(\frac{2 \cdot 2^3}{3} - 2^2 + 2 \right) \right] \approx \pi [(83{,}33 - 25 + 5) - (5{,}33 - 4 + 2)] \approx 3{,}14 \cdot (63{,}33 - 3{,}33) \approx$$

$$\approx 188{,}4 \; (ед^3).$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 \varphi^2(y)dy = \pi \int_2^5 ((y-3)^2)^2 dy = \pi \int_0^1 (y-3)^4 dx = \pi \frac{(y-3)^5}{5} \Bigg|_2^5 = \pi \left(\frac{(5-3)^5}{5} - \frac{(2-3)^5}{5} \right) \Bigg| =$$

$$= \pi \left(\frac{2^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} \right) = \pi \left(\frac{32}{5} + \frac{1}{5} \right) = \pi \cdot \frac{33}{5} \approx 3{,}14 \cdot 6{,}6 \approx 20{,}724 \; (ед^3).$$

Объем искомого тела вращения: $V = V_1 - V_2 \approx 188{,}4 - 20{,}724 = 159{,}676$ *ед³*.

Ответ: $V \approx 159{,}676$ *ед³*.

<u>1 вариант</u>

Задание № 1.

Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$.

Задание № 2.
Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной данными линиями $y = x^2, \quad y = x$, вокруг оси Oy.
Задание № 3.
Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 4.$
Задание № 4.
Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной данными линиями $y = x^3, \quad y = 8, \quad x = 0$, вокруг оси Oy.

<u>2 вариант</u>

Задание № 1.
Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 4, \quad x = 1$.
Задание № 2.
Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной данными линиями $y = 2x, \quad y = x + 3, \quad x = 0, \quad x = 1$, вокруг оси Oy.
Задание № 3.
Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}, \quad y = x^2.$
Задание № 4.
Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной данными линиями $y = \frac{6}{x}, \quad y = 1, \quad y = 6, \quad x = 0$, вокруг оси Oy.

<u>3 вариант</u>

Задание № 1.
Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 1$.
Задание № 2.
Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной данными линиями $y = x + 2, \quad y = 1, \quad x = 0, \quad x = 2$, вокруг оси Oy.
Задание № 3.
Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = 3 - x, \quad y = 0, \quad x = 0.$
Задание № 4.
Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной данными линиями $y = \frac{x^2}{2}, \quad y = 2\sqrt{2}, \quad x = 0$, вокруг оси Oy.

<u>4 вариант</u>

Задание № 1.
Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = 1 - x^2, \quad y = 0$.
Задание № 2.

Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной данными линиями $y=\sqrt{x}, \quad y=x$, вокруг оси Oy.

Задание № 3.

Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y=2\sqrt{x}, \quad y=0, \quad x=3$

Задание № 4.

Найти объем тела, полученного вращением плоской фигуры, ограниченной данными линиями $y=x^2, \quad y=4$, вокруг оси Oy.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7

«Элементы комбинаторики и теории вероятностей»

Цель: научиться решать задачи по комбинаторике, на классическое определение вероятности и теорем сложения и умножения вероятностей.

Теория.

1. Задачи, в которых производится подсчет всех возможных различных комбинаций, составленных из конечного числа элементов по некоторому правилу называются *комбинаторными.* Раздел математики, занимающийся их решением, называется комбинаторикой.

Размещением из n элементов по m называется любой упорядоченный набор из m различных элементов, выбранных из совокупности в n элементов. Число всевозможных размещений из n элементов по m в каждом равно $A_n^m=\dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Например: Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различные и нечетные?

Решение: т.к. нечетных цифр пять, а именно 1, 3, 5, 7, 9, то эта задача сводится к выбору и размещению на две разные позиции двух из пяти различных цифр, т.е. указанных чисел будет:

$A_5^2=\dfrac{5!}{(5-2)!}=\dfrac{5!}{3!}=\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3}=4\cdot5=20$. Ответ 20 двузначных чисел.

Перестановка – размещение из n элементов по n. Число перестановок из n элементов равно $P=n!$

Например: Составьте всевозможные перестановки из элементов множества А = $\{a, b, c, h\}$.

Решение: число элементов множества $n=4$. Составим перестановку $P=4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$. Ответ: 24 перестановки.

Сочетание - подмножество из m элементов множества n элементов, порядок которых не играет роли. Число сочетаний их n элементов по m в каждом равно $C_n^m=\dfrac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$.

Например: Сколькими способами читатель может выбрать две книжки из шести имеющихся? Решение: Число способов равно числу сочетаний из шести книжек по две, т.е. $m=2$, $n=6$. Тогда $C_6^2=\dfrac{6!}{2!\cdot(6-2)!}=\dfrac{6!}{2!\cdot4!}=\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{(1\cdot2)\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot4)}=15$. Ответ: 15 способами.

2. Основными понятиями в теории вероятностей являются понятия *события* и *вероятности события*. Под *событием* понимается такой результат эксперимента или наблюдения, который при реализации данного комплекса условий может произойти или не произойти. Обозначается событие большими буквами латинского алфавита А, В, С и т. д. если событие неизбежно произойдет при каждой реализации комплекса условий, то оно называется *достоверным*; если же оно не может произойти, то *невозможным.* Если событие при реализации комплекса условий может произойти, а может не произойти, то оно называется *случайным.*

Вероятностью события А называют отношение числа m исходов, благоприятствующих этому событию, к числу n всех равновозможных исходов, т. е. $P = \frac{m}{n}$.

Например: В ящике 15 шаров: 5 белых и 10 черных. Какова вероятность вынуть из ящика белый шар?

Решение: число всех шаров $n = 15$, число белых шаров $m = 5$. Тогда вероятность вынуть белый шар $P = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \approx 0,33$. Ответ: Р = 0,33 .

Например: В корзине 10 яблок: 6 красных и 4 желтых. Вынули два яблока. Какова вероятность того, что оба яблока красные?

Решение: число всех случаев – взять 2 яблока из 10 : $n = C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!\cdot(10-2)!} = 45$. Число благоприятствующих случаев взять 2 яблока из 6 красных: $m = C_{6}^{2} = \frac{6!}{2!\cdot(6-2)!} = 15$. Тогда вероятность достать 2 красных яблока $P = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.

Контрольные вопросы:

1. Что изучает комбинаторика?
2. Перечислите основные виды комбинаций.
3. Что называется перестановкой, размещением, сочетанием? Запишите их формулы.
4. Дайте классическое определение вероятности.
5. Какие события называются достоверным? невозможным? случайным?

1 вариант

Задание № 1. Решите задачи по комбинаторике:

1. В ящике 20 фруктов: 15 яблок и 5 груш. Какова вероятность вынуть из ящика апельсин?
2. Из пункта А в пункт В ведут 5 дорог. Колонну автомашин необходимо разделить и направить по трём дорогам из имеющихся пяти. Сколькими способами это можно сделать?
3. В местные органы самоуправления выбрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, заместителя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?
4. Вычислите C_{15}^{12}.

Задание № 2. Решите задачи по теории вероятностей.

1. В читальном зале имеется 6 учебников по теории вероятностей, из которых 3 в переплёте. Библиотекарь на удачу взял 2 учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в переплёте.
2. В ящике 10 деталей, среди которых 6 окрашенных. Из ящика извлекли 2 детали. Найти вероятность того, что все извлечённые детали окажутся окрашенными?
3. Произведя 100 выстрелов, стрелок попал в цель 86 раз. Найти вероятность попадания в цель данного стрелка.
4. В лотерее 100 билетов. Из них 50 выигрышных и 50 – невыигрышных. Куплено 2 билета. Какова вероятность того , что оба билета выигрышные?

2 вариант

Задание № 1. Решите задачи по комбинаторике:

1. Сколькими способами можно составить трёхцветный полосатый флаг, если имеется материал пяти цветов?
2. Сколькими способами можно распределить 12 классных комнат под 12 учебных кабинетов?

3. Из спортивного клуба, насчитывающего 15 членов, необходимо составить команду из 4 человек для участия в беге на 1000 м. Сколькими способами можно это сделать?
4. Вычислите C_{16}^{14}.

Задание № 2. Решите задачи по теории вероятностей.

1. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень первого стрелка – 0,7, а второго – 0,8. Найти вероятность того, что один из стрелков попадёт в мишень.
2. Среди 100 лотерейных билетов 5 выигрышных. Найти вероятность того, что2 выбранных билета будут выигрышными.
3. Студент знает 20 вопросов из 25. Найти вероятность того, что студент знает 2 предложенных ему экзаменатором вопроса.
4. В группе 25 студентов, среди которых 8 отличников. Найти вероятность того, что среди 6 отобранных студентов все отличники.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 8
По теме: «Случайная величина и её функция распределения»

Цель: научиться вычислять математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение, графически изображать функцию распределения.

Теория.

Случайные величины. Функция распределения и плотность распределения случайной величины.

Величина называется *случайной*, если в результате испытания она принимает одно заранее неизвестное значение из некоторого числового множества. Случайная величина называется *дискретной*, если она принимает значения из некоторого фиксированного конечного или счетного множества.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между её возможными значениями и их вероятностями. Закон распределения задается аналитически, графически или таблично.

Функцией распределения случайной величины X называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение меньшее x, т.е. $F(x) = P(\ X \rangle\ x\ )$.

Свойства функции распределения:

1. Значения функции распределения $F(x)$ принадлежат отрезку $[\,0;1\,]$; $0 \le F(x) \le 1$.
2. $F(x)$ - неубывающая функция, т.е. $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 \rangle x_1$.
3. Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(\ a\,;b\ )$, то $F(x)=0$ при $x \le a$ и $F(x)=1$ при $x \ge b$.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины называют первую производную $f(x)$ от функции распределения $F(x)$: $f(x) = F'(x)$.

Если известна функция плотности распределения $f(x)$, то функция распределения $F(x)$ находится по формуле: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Свойства плотности распределения:

1. $f(x)$ является неотрицательной функцией: $f(x) \ge 0$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины.

Математическим ожиданием M(X) дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех её возможных значений на их вероятности: для дискретной случайной величины X, принимающей значения $x_1, x_2, x_3,.....x_n$ с вероятностями соответственно $p_1, p_2, p_3, ...p_n$, имеем:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_n \cdot p_n.$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины называется величина

$$M(x) = \int_a^b x \cdot f(x)dx.$$

Дисперсией $D(x)$ *дискретной* случайной величины X называют величину, равную

$$D(x) = M(X^2) - \left(M(X) \right)^2.$$

Дисперсией $D(x)$ *непрерывной* случайной величины называется величина

$$D(x) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx - \left[M(X) \right]^2.$$

Средним квадратичным отклонением называется квадратный корень из дисперсии: $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$.

Пример 1: по заданному закону распределения дискретной случайной величины X найти её: 1) математическое ожидание; 2) дисперсию; 3) среднее квадратичное отклонение; 4) привести графическое изображение функции распределения.

X	17	21	29	31	35
p	0,4	0,1	0,2	0,1	0,2

Решение:

1) математическое ожидание: $M(X) = 17 \cdot 0{,}4 + 21 \cdot 0{,}1 + 29 \cdot 0{,}2 + 31 \cdot 0{,}1 + 35 \cdot 0{,}2 = 24{,}8$.
2) дисперсия: $D(x) = M(X^2) - \left(M(X) \right)^2$

Закон распределения случайной величины X^2:

X	17^2=289	21^2=441	29^2=841	31^2=961	35^2=1225
p	0,4	0,1	0,2	0,1	0,2

Тогда $M(X^2) = 289 \cdot 0{,}4 + 441 \cdot 0{,}1 + 841 \cdot 0{,}2 + 961 \cdot 0{,}1 + 1225 \cdot 0{,}2 = 773{,}1$.

$\left(M(X) \right)^2 = 24{,}8^2 = 615{,}4$

$D(X) = 773{,}1 - 615{,}4 = 98{,}06$.

3) среднее квадратичное отклонение: $\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{98{,}06} \approx 9{,}9$.
4) учитывая закон распределения случайной величины X имеем:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \le 7 \\ 0{,}4, & 17 \langle\, x \le 21 \\ 0{,}5, & 21 \langle\, x \le 29 \\ 0{,}7, & 29 \langle\, x \le 31 \\ 0{,}8, & 31 \langle\, x \le 35 \\ 1, & 35 \langle\, x \end{cases}$$

Пример 2: Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = c(4x^2 + 2x)$ в интервале $(0;1)$. Найти: 1) параметр c; 2) функцию распределения $F(x)$ случайной величины X; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию.

Решение: 1) плотность распределения должна удовлетворять условию: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 c(4x^2+2x)dx = c\int_0^1 (4x^2+2x)dx = c\left(4\cdot\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = c\left(4\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{2}\right) =$$

$$= c\left(\frac{4}{3}+1\right) = \frac{7}{3}c = 1$$

Отсюда находим $c = 1 : \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{3}{7}$.

2) функцию распределения $F(x)$ находим по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{3}{7}\left(4\cdot\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}\right) = \frac{4}{7}x^3+\frac{3}{7}x^2, & 0 \langle\, x \le 1 \\ 1, & 1 \langle\, x \end{cases}$$

3) математическое ожидание находим по формуле $M(x) = \int_a^b x \cdot f(x)dx$.

$$M(x) = \int_0^1 x\cdot\frac{3}{7}(4x^2+2x)dx = \frac{3}{7}\int_0^1 \left(4x^3+2x^2\right)dx = \frac{3}{7}\left(4\cdot\frac{x^4}{4}+2\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{7}\left(1+2\cdot\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{7}\cdot\frac{5}{3} = \frac{5}{7}.$$

4) дисперсию находим по формуле $D(x) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx - [\,M(X)\,]^2$.

$$D(x) = \int_0^1 x^2\cdot\frac{3}{7}(4x^2+2x)dx - [\,M(X)\,]^2 = \frac{3}{7}\int_0^1 (4x^4+2x^3)dx \;-\; \left[M\left(X^2\right)\right] =$$

$$\frac{3}{7}\left(4\cdot\frac{x^5}{5}+2\cdot\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 - \left[M\left(X^2\right)\right] = \frac{3}{7}\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{3}{7}\cdot\frac{13}{10} - \frac{25}{49} = \frac{39}{70} - \frac{25}{49} = \frac{273-250}{490} = \frac{23}{490}.$$

Контрольные вопросы:

1. Какая величина называется случайной?
2. Перечислите свойства функции распределения.
3. Что называется математическим ожиданием? Запишите формулу.
4. Что называется дисперсией? Запишите формулу.
5. Что называется средним квадратичным отклонением? Запишите формулу.

1 вариант

Задание №1.

По заданному закону распределения случайной величины Х найти её математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение, привести графическое изображение функции распределения.

X	11	16	20	25	30
p	0,4	0,1	0,3	0,1	0,1

Задание №2.

Случайная величина Х задана плотностью распределения $f(x) = c(x^2 + 4x)$ в интервале (0;1), вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти параметр *c*; функцию распределения случайной величины Х; математическое ожидание и дисперсию величины Х.

2 вариант

Задание №1.

По заданному закону распределения случайной величины X найти её математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение, привести графическое изображение функции распределения.

X	14	18	23	28	30
p	0,1	0,2	0,2	0,1	0,4

Задание №2.

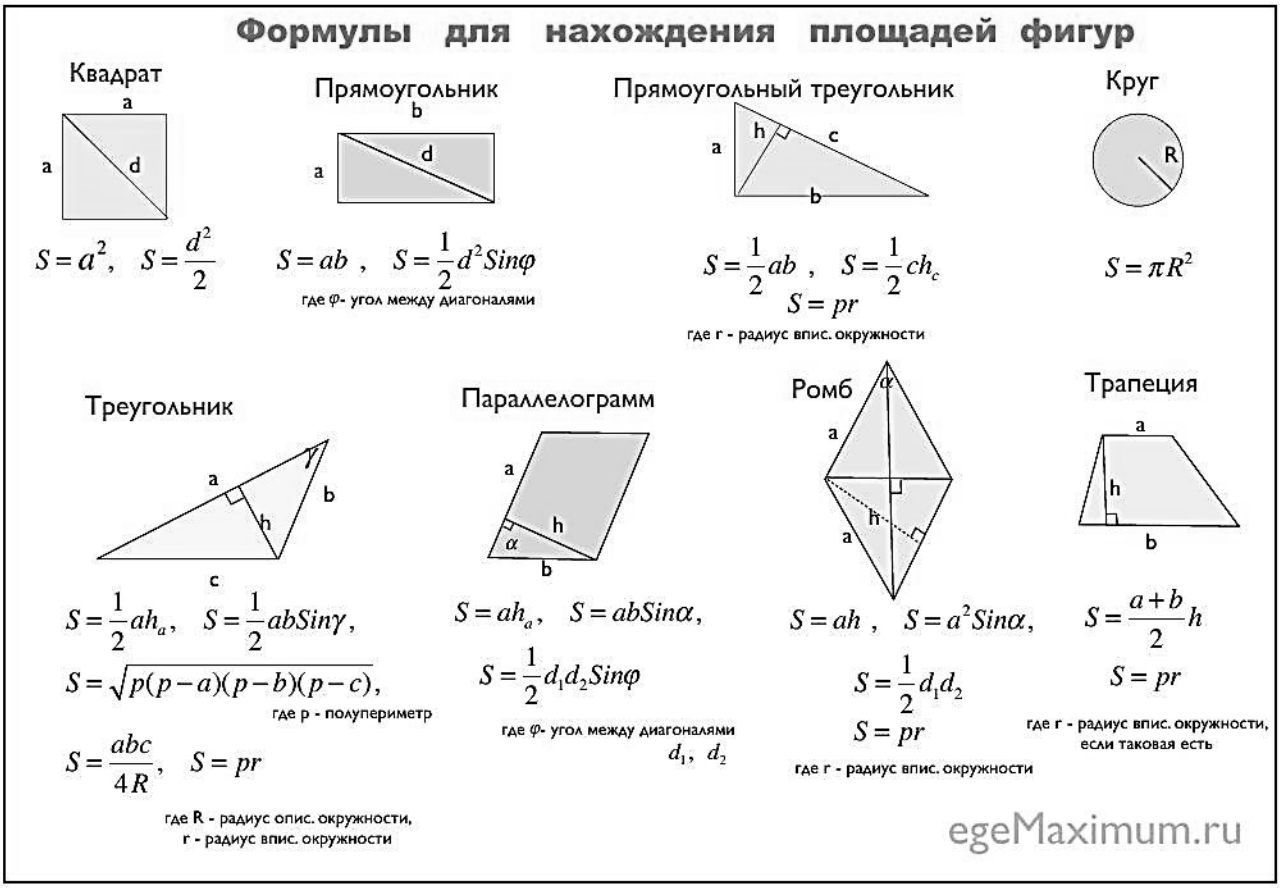
Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = c(1{,}5x^2 + 2x)$ в интервале (0;1), вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти параметр c; функцию распределения случайной величины X; математическое ожидание и дисперсию величины X.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 9

По теме: «Вычисление площадей плоских фигур»

Цель: повторить основные формулы площадей плоских фигур, закрепить навык вычисления площадей плоских фигур при решении задач практического содержания.

Теория.



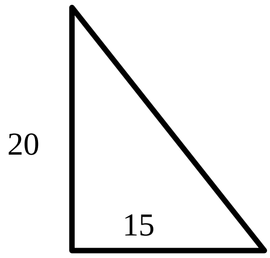
<u>**1 вариант.**</u>

Задание 1. Заказ на выполнение услуг по ремонту квартир.

Необходимо выяснить количество материала для выполнения заказа (выполнить расчѐты, используя формулы площадей); стоимость материалов; стоимость выполненных работ.

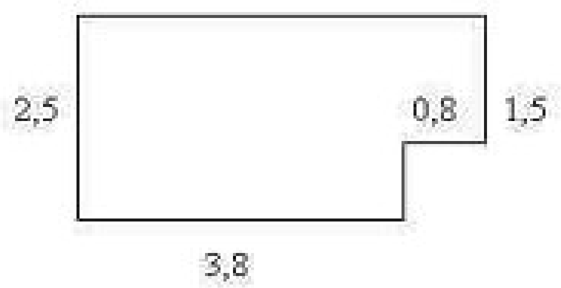
Комната имеет пол прямоугольной формы со сторонами 5м и 3,5м. Высота 2,5м. Необходимо выполнить следующее:

- Сделать навесные потолки. Для выполнения работы используют плитки квадратной формы со стороной 50см, по периметру – бордюр.
- Наклеить на стены обои. Используются обои шириной 50см, длина рулона 10м. Обрезки составляют 12%.
- Пол выстлать паркетом. Предлагается произвести настил паркетного пола, используя плитки, имеющие форму прямоугольных треугольников. Размеры в см указаны на рисунке.



Задание 2.

На рисунке представлен план столовой. Размеры даны в метрах. Требуется покрасить пол в два слоя. Расход краски – 80г/ м.



Прайс-лист цен строительных материалов

Наименование материала	Цена (в рублях)	Количество
Потолочная плитка	130	1 шт
Потолочный бордюр	6	1 шт – 1,2 метра
Краска половая	130	1 банка – 1 кг
Обои	850	1 рулон
Паркетные плитки: Треугольнику, Параллелограмм, Трапеция	 25 30 30	1 шт 1шт 1шт

2) Прейскурант цен на стоимость услуг (за 1 м 2)
- Настил линолеума -40 рублей.
- Настил паркета - 70 рублей.
- Покраска пола -30 рублей.
- Укладка кафеля - 120 рублей.
- Наклеивание обоев - 50 рублей.
- Ремонт потолка - 40 рублей.

Задание 3. Рассчитать нужное количество плитки для покрытия пола в кабинете начальника и необходимую для этого сумму денег, если цена одной плитки размером 0,7 м × 0,7 м равна 250 руб. Площадь пола 43,8 м2.

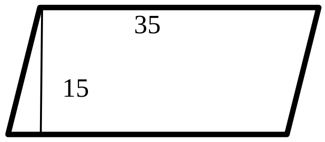
2 вариант.

Задание 1. Заказ на выполнение услуг по ремонту квартир.

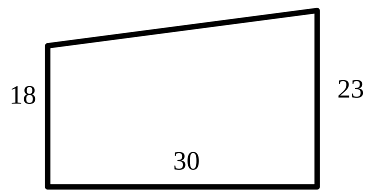
Необходимо выяснить количество материала для выполнения заказа (выполнить расчѐты, используя формулы площадей); стоимость материалов; стоимость выполненных работ.

Комната имеет пол прямоугольной формы со сторонами 5м и 3 м . Высота 2,2 м. Необходимо выполнить следующее:

- Сделать навесные потолки. Для выполнения работы используют плитки прямоугольной формы со сторонами 30 и 50 см, по периметру – бордюр.
- Наклеить на стены обои. Используются обои шириной 1 м, длина рулона 10,2 м. Обрезки составляют 12%.
- Пол выстлать паркетом. Предлагается произвести настил паркетного пола, используя плитки, имеющие форму параллелограммов. Размеры в см указаны на рисунке.



Задание 2. На рисунке представлен план столовой. Размеры даны в метрах. Требуется покрасить пол в два слоя. Расход краски – 80г/ м^2.



Прайс-лист цен строительных материалов

Наименование материала	Цена (в рублях)	Количество
Потолочная плитка	130	1 шт
Потолочный бордюр	6	1 шт – 1,2 метра
Краска половая	130	1 банка – 1 кг
Обои	850	1 рулон
Паркетные плитки: Треугольнику, Параллелограмм, Трапеция	 25 30 30	1 шт 1шт 1шт

3) Прейскурант цен на стоимость услуг (за 1 м 2)

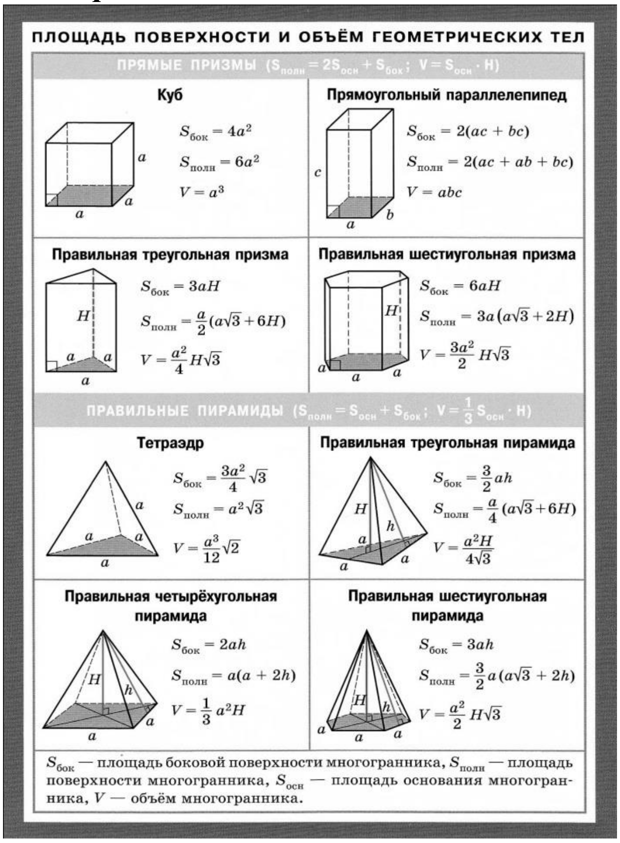
- Настил линолеума -40 рублей.
- Настил паркета - 70 рублей.
- Покраска пола -30 рублей.
- Укладка кафеля - 120 рублей.
- Наклеивание обоев - 50 рублей.
- Ремонт потолка - 40 рублей.

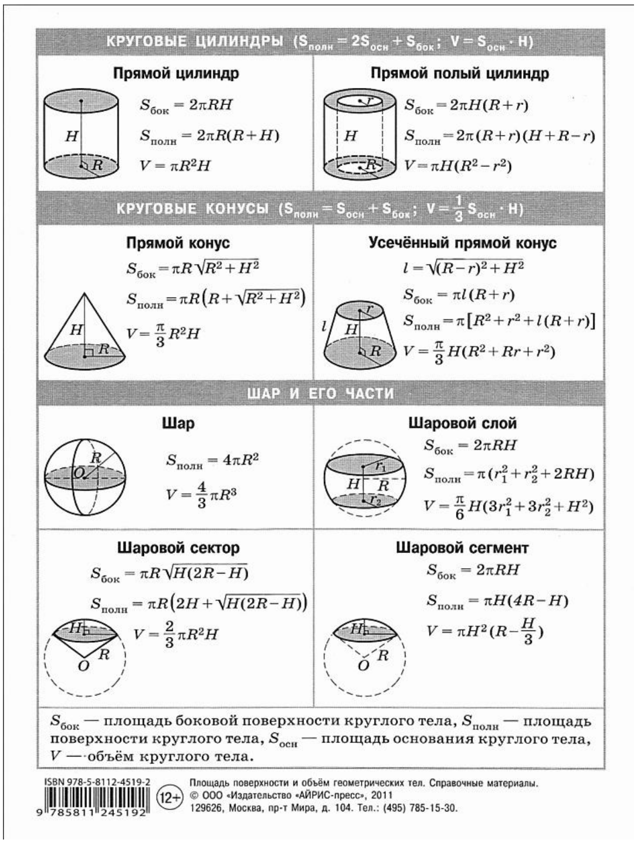
Задание 3. Рассчитать нужное количество краски для покраски стола в теннисном зале и необходимую для этого сумму денег, если на 1 м^2 требуется 230 г краски по цене 105 руб. за 1 кг. Площадь стола 45,9 м^2.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 10
По теме: «Вычисление площади поверхности и объема тела»

Цель: повторить формулы площади поверхности и объема многогранников и тел вращения, закрепить навык их вычисления при решении задач практического содержания.

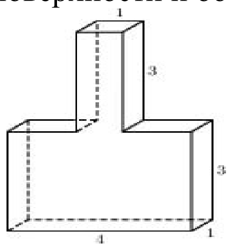
Теория.





1 вариант.

Задание 1. Найдите площадь поверхности и объем фигуры, изображенной на рисунке.



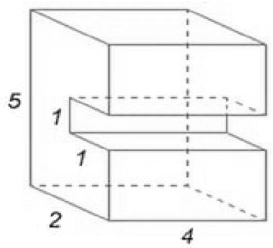
Задание 2. Сколько досок размером 5 х 0,15 х 0,04 м содержится в штабеле массой 343,2 кг, если плотность древесины 0,52 г/см^3 ?

Задание 3. Цилиндрическая емкость радиусом 38 см и высотой 86 см. на две трети заполнена маслом. Сколько литров масла можно долить в эту емкость? Сколько литров масла было первоначально?

Задание 4. Стог сена имеет форму цилиндра с коническим верхом. Радиус его основания 2,5 м, высота 4 м, причем цилиндрическая часть стога имеет высоту 2,2 м. Плотность сена 0,03 г/см^3. Определить массу стога сена.

2 вариант.

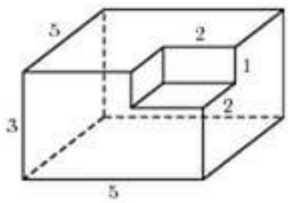
Задание 1. Найдите площадь поверхности и объем фигуры, изображенной на рисунке.



Задание 2. Сколько кубиков с ребром 3 см можно выплавить из свинцового бруска размерами 10 x 7 x 2 см?
Задание 3. 25 м медной проволоки имеют массу 100,7 г. Найдите диаметр проволоки (плотность меди 8, 94 г/см^3).
Задание 4. Сколько олифы потребуется для окраски внешней поверхности 100 ведер, имеющих форму усеченного конуса с диаметрами оснований 25 см и 30 см и образующей 27,5 см, если на 1 м^2 требуется 150 г олифы?

<u>3 вариант.</u>

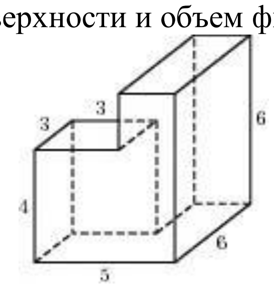
Задание 1. Найдите площадь поверхности и объем фигуры, изображенной на рисунке.



Задание 2. Чугунная труба имеет квадратное сечение, ее внешняя ширина 25 см, толщина стенок 3 см. Сколько весит погонный метр трубы? Считать плотность чугуна 7,3 г/см^3.
Задание 3. Свинцовая труба (плотность свинца 11,4 г/см^3) с толщиной стенок 4 мм имеет внутренний диаметр 13 см. Какова масса 25 м этой трубы?
Задание 4. Из круглого листа железа выштампован цилиндрический стакан диаметром 25 см и высотой 50 см. Предполагая, что площадь листа при штамповке не изменилась, найти диаметр листа.

<u>4 вариант.</u>

Задание 1. Найдите площадь поверхности и объем фигуры, изображенной на рисунке.



Задание 2. Полуцилиндрический свод подвала имеет 6 м длины и 5,8 м в диаметре. Сколько краски потребуется для окраски полной поверхности подвала при расходе 250г/м^2
Задание 3. Поверхность конического шпиля башни равна 250 м^2, диаметр основания 9 м. найдите высоту шпиля.
Задание 4. Найти объем чердака, поперечное сечение которого есть равнобедренный треугольник с основанием 5,6 м и высотой 3,5 м. Длина чердака 12 м.