ДЕПАРТАМЕНТ ОБРАЗОВАНИЯ ВОЛОГОДСКОЙ ОБЛАСТИ
БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВОЛОГОДСКОЙ ОБЛАСТИ
«ВОЛОГОДСКИЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

по организации внеаудиторной самостоятельной работы
по дисциплине ЕН.01. Элементы высшей математики

специальность
09.02.04 «Информационные системы (по отраслям)».

2017г

Рассмотрена на заседании предметной цикловой комиссии общепрофессиональных, специальных дисциплин и дипломного проектирования по специальностям 08.02.01 «Строительство и эксплуатация зданий и сооружений», 08.02.07 «Монтаж и эксплуатация внутренних сантехнических устройств, кондиционирования воздуха и вентиляции», 43.02.08 «Сервис домашнего и коммунального хозяйства»

Данные методические рекомендации предназначены для студентов специальности 09.02.04 «Информационные системы (по отраслям)» БПОУ ВО «Вологодский строительный колледж» при выполнении внеаудиторной самостоятельной работы.

В методических рекомендациях рассмотрены особенности организации внеаудиторной самостоятельной работы; задания для самостоятельной работы по дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики.

Перечень самостоятельных работ соответствует содержанию программы. Самостоятельная работа студентов повышает интеллектуальный уровень обучающихся, формирует умение самостоятельно находить нужную информацию, систематизировать, обобщать, что необходимо для профессиональной подготовки будущего специалиста. Навыки исследовательской работы по разделу профессионального модуля помогут студентам на старших курсах при выполнении и оформлении курсовых и дипломных проектов.

Методические рекомендации могут быть рекомендованы к использованию студентами и преподавателями БПОУ ВО «Вологодский строительный колледж».

Автор: Боровая Наталия Олеговна, преподаватель БПОУ ВО «Вологодский строительный колледж»

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В настоящее время актуальными становятся требования к личным качествам современного обучающегося – умению самостоятельно пополнять и обновлять знания, вести самостоятельный поиск необходимого материала, быть творческой личностью. Появляется новая цель образовательного процесса – воспитание личности, ориентированной на будущее, способной решать профессиональные задачи исходя из приобретенного учебного опыта и адекватной оценки конкретной ситуации.

Решение этих задач требует повышения роли самостоятельной работы обучающихся над учебным материалом, усиления ответственности преподавателя за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание их творческой активности и инициативы.

Методические указания для внеаудиторной самостоятельной работы составлены в соответствии с требованиями ФГОС специальности 09.02.04 Информационные системы (по отраслям); рабочей программы дисциплины ЕН.01 «Элементы высшей математики» .

Основными целями внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся являются:

- овладение общими и профессиональными компетенциями;
- формирование готовности к самообразованию, самостоятельности и ответственности;
- развитие творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ ВНЕАУДИТОРНОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

При выполнении внеаудиторных самостоятельных работ студентами студент должен:

- строго выполнять весь объем домашней подготовки, указанный преподавателем
- знать, что выполнение каждой работы проверяется преподавателем
- при работе с литературой, т.е. при изучении текста учебника, конспекта лекций, дополнительной литературы отвечать на вопросы подлежащие изучению, делать сообщения на занятиях, выступать на семинарах, конференциях; представлять рефераты, доклады и получать соответствующие оценки
- после прохождения каждой темы изучаемого материала готовиться к ответу на тестовые опросы с получением соответствующих оценок
- готовиться к выполнению практических работ, предусматривающих необходимое оформление
- показать готовность к решению задач по образцу и выполнить все практические работы независимо от того были ли пропущены какие-либо занятий по уважительным или неуважительным причинам, т.к. преподавателем в учебный журнал выставляется общая оценка за все практические работы.

Оформление списка используемой литературы

В данном разделе указывается основная и дополнительная учебная литература, необходимая для выполнения внеаудиторной самостоятельной работы, в соответствии с действующими нормами для научно-технической литературы.

В перечень основной литературы включаются учебники и учебные пособия, предусмотренные учебной программой с учетом последних изданий.

Перечень дополнительной литературы кроме учебников и учебных пособий состоит из печатных изданий, отражающих современный уровень развития соответствующих отраслей науки и техники, в том числе периодических изданий, их авторов (фамилия, инициалы), место и год издания. Год издания литературы для не ранее 5-ти лет от года составления программы.

Чтение текста (учебника, первоисточника, дополнительной литературы): составление плана текста.

Культура чтения – это понятие достаточно широкое, оно включает в себя: регулярность чтения, скорость чтения, виды чтения, умение работать с информационно – поисковыми системами и каталогами библиотек, рациональность чтения, умение вести различные виды записей. Чтобы овладеть как можно большим пластом литературного материала, необходимо быстро читать, но увеличение скорости чтения связано с осмыслением и запоминанием информации. Цели чтения:

- Информационно-поисковая – найти нужную информацию
- Усваивающая – понять информацию, и логику рассуждения
- Аналитико-критическая – осмыслить текст, определить к нему своё отношение
- Творческая – на основе осмысления информации дополнить и развить её

Виды чтения:

Библиографическое чтение – это просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журнальных статей за год и др. Цель такого чтения – по библиографическим описаниям найти источники, которые могут быть полезны в дальнейшей работе.

Просмотровое чтение, как и библиографическое, используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию. Обычно к нему прибегают сразу после работы с каталогами и списками литературы, поскольку с их помощью читатель может только предположить, что в книге или статье данного названия содержится интересующая информация. Для окончательного решения вопроса он должен просмотреть отобранные материалы, отдельные их части (оглавление, аннотацию, заключение), чтобы выяснить, действительно ли в них содержатся нужные сведения и насколько полно в каждом из источников они представлены. В результате такого просмотра устанавливается, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе.

Ознакомительное чтение подразумевает сплошное, достаточно внимательное прочтение отобранных статей, книг, их глав, отдельных страниц. Цель – познакомиться с характером информации в целом, уяснить, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение; провести сортировку материала на существенный и несущественный, выделить моменты, заслуживающие особого внимания. После такого чтения источник или откладывается как не содержащий новой и нужной информации, или оставляется для изучения.

Изучающее чтение предполагает доскональное освоение материала, отобранного в ходе ознакомления со статьями, книгами. В ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять и впитать всю предполагаемую информацию, реализуется установка на предельно полное понимание и усвоение материала.

Аналитико – критическое и творческое чтение – два вида чтения, близкие между собой. Первое из них предполагает направленный критический анализ информации; второе – поиск тех суждения, фактов, по которым высказываются собственные мысли.

Основное качество квалифицированного профессионального чтения – гибкость, требующая от читателя управлять сменой своих чувств и в зависимости от них переходить от одного вида чтения к другому.

Во время ознакомительного чтения сортируйте информацию на существенную, особо значимую, и второстепенную, на теоретическую и практическую, делайте пометки, условные обозначения, выписки отдельных мест текста, цитат на вкладных листах.

Полноценно извлекайте информацию, содержащуюся в научном тексте.

Ведите собственные словари терминов по различным областям знаний, эпизодически просматривайте эти записи. Освоение понятий той или иной области знаний улучшит восприятие и понимание научного текста и повысит скорость чтения.

Проведите мысленную обработку полученной информации: выделяйте исходную информацию и новую; сортируйте смысловые части по их значимости, группируйте по определённым признакам, выделяйте зависимости; соотносите извлечённую информацию с имеющимися знаниями; свёртывайте информацию путём обобщения.

План – это «скелет» текста, он компактно отражает последовательность изложенного материала. План как форма записи обычно значительно более подробно передаёт содержание части текста, чем оглавление книги или подзаголовки статей.

Форма записи в виде плана чрезвычайно важна для восстановления в памяти содержания прочитанного, для развития навыков чёткого формулирования мыслей, умения вести другие виды записей.

Если план должен стать самостоятельной формой записи, то его обрабатывают в процессе дальнейшего изучения источника.

Удачно составленный план говорит об умении анализировать текст, о степени освоения его содержания.

План улучшает записи (обнаруживает не последовательность, выявляет повторения), ускоряет переработку материала, помогает вести самоконтроль.

Формулирование пунктов плана – трудный процесс. Здесь нужна исключительная точность, очень вдумчивый подход буквально к каждому слову. Это можно сравнить с поиском заголовков – названий к произведениям.

Простой – это план, состоящий из общих заголовков, относящихся к крупным частям текста.

Сложный или развёрнутый – это план, включающий в виде параграфов и подпараграфов более дробные логические разделения текста.

Иногда в начале работы уже по характеру материала и целям составления плана видно, что он должен быть сложным, но порой это становится ясным не сразу. Поэтому стараться составить сложный план в один приём не всегда разумно. Здесь возможны два способа работы: или составить сначала краткий простой план и затем, вновь читая текст, написать сложный, подыскивая детализирующие пункты или сразу разработать подробнейший простой план, а далее преобразовать его в сложный, группируя пункты под общими для них заголовками.

Процесс обработки детально простого плана поможет лучше разобраться в содержании: ведь, объединяя, обобщают, а выбрасывая, выделяют главное, как бы фильтруя текст. Можно более рационально перейти к составлению плана: записывать пункты плана с большим интервалам и широкими полями, оставляя пространство для последующего совершенствования его. Полезно знать о недостатках такой формы записи, как план. План, как правило, говорит лишь о чём сказано в источнике, но не даёт сведений о том, что и как сказано, т.е. скупо упоминает о фактическом содержание.

Требования к результатам работы, оформлению работы, срокам сдачи

Это вид самостоятельной работы студента, содержащий информацию, дополняющую и развивающую основную тему, изучаемую на аудиторных занятиях. Ведущее место занимают темы, представляющие профессиональный интерес, несущие элемент новизны. Реферат может включать обзор нескольких источников и служить основой для доклада на определенную тему на семинарах, конференциях.

Регламент озвучивания реферата – 7-10 мин.

Затраты времени на подготовку материала зависят от трудности сбора информации, сложности материала по теме, индивидуальных особенностей студента и определяются преподавателем. Ориентировочное время на подготовку – 2- 4 ч, в зависимости от сложности исследуемой темы.

Роль преподавателя: идентична роли при подготовке студентом информационного сообщения, но имеет особенности, касающиеся:

- выбора источников (разная степень сложности усвоения научных работ, статей);
- составления плана реферата (порядок изложения материала);
- формулирования основных выводов (соответствие цели);
- оформления работы (соответствие требованиям к оформлению).

Роль студента: идентична при подготовке информационного сообщения, но имеет особенности, касающиеся:

- выбора литературы (основной и дополнительной);
- изучения информации (уяснение логики материала источника, выбор основного материала, краткое изложение, формулирование выводов);
- оформления реферата согласно установленной форме

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ВЫПОЛНЕНИЯ СТУДЕНТОМ ВНЕАУДИТОРНЫХ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ

К*ритерии оценки:*

- актуальность темы;
- соответствие содержания теме;
- глубина проработки материала;
- грамотность и полнота использования источников;
- соответствие оформления реферата требованиям.

***Оценка «5»* :**

- Студент свободно применяет знания на практике;
- Не допускает ошибок в воспроизведении изученного материала;

- Студент выделяет главные положения в изученном материале и не затрудняется в ответах на видоизмененные вопросы;
- Студент усваивает весь объем программного материала;
- Материал оформлен аккуратно в соответствии с требованиями;

Оценка «4» :

- Студент знает весь изученный материал;
- Отвечает без особых затруднений на вопросы преподавателя;
- Студент умеет применять полученные знания на практике;
- В условных ответах не допускает серьезных ошибок, легко устраняет определенные неточности с помощью дополнительных вопросов преподавателя;
- Материал оформлен недостаточно аккуратно и в соответствии с требованиями;

Оценка «3» :

- Студент обнаруживает освоение основного материала, но испытывает затруднения при его самостоятельном воспроизведении и требует дополнительных дополняющих вопросов преподавателя;
- Предпочитает отвечать на вопросы воспроизводящего характера и испытывает затруднения при ответах на воспроизводящие вопросы;
- Материал оформлен не аккуратно или не в соответствии с требованиями;

***Оценка «2»*:**

- У студента имеются отдельные представления об изучаемом материале, но все, же большая часть не усвоена;
- Материал оформлен не в соответствии с требованиями.

ПЕРЕЧЕНЬ ФОРМ ВНЕАУДИТОРНОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Раздел	**Наименование**	**Кол-во часов**
Тема 1.1. Матрицы и определители	1. Решить несколько дополнительных задач по теме, используя учебники. Результат работы - наличие конспекта с решением. 2. Рассмотреть по учебникам понятие ранга матрицы, понятие ступенчатой матрицы, нахождения ранга матрицы, теорему о ранге матрицы	7
Тема 1.2.Системы линейных уравнений	1. Решить несколько дополнительных задач по теме, используя учебники. Результат работы: наличие конспекта с решением. 2. Составить задачу практического содержания, которая решается с помощью системы линейных уравнений. Решить ее 3 способами. Результат работы - наличие решения в тетради. 2. Изучить вопросы: Историческая справка о математиках Гауссе и Крамере.	7

	Результат работы-доклады на занятиях	
Тема 1.3. Системы линейных неравенств	Составить задачу с практическим содержанием и решить алгебраически и графически. Результат работы: задача в тетради.	3
Тема 2.1. Векторы на плоскости и в пространстве.	Решить несколько дополнительных задач по теме, используя учебники. Результат работы: наличие конспекта с решением.	3
Тема 2.2. Прямая на плоскости. Кривые второго порядка	Решить несколько дополнительных задач по теме, используя учебники. Результат работы: наличие конспекта с решением.	5
Тема 3.1. Теория пределов. Непрерывность	Решить несколько дополнительных задач по теме, используя учебники. Результат работы: наличие конспекта с решением.	5
Тема 3.2. Дифференциальное исчисление одной действительной переменной	1. Решить несколько дополнительных задач по теме, используя учебники. Результат работы: наличие конспекта с решением. 2. Выполнить расчётно – графическую работу по исследованию функции и построению графика.	8
Тема 3.3.	1. Выполнение расчётно-графической работы по	9

Интегральное исчисление функции одной переменной	вычислению определённых интегралов различными способами (индивидуальные карточки-задания). Результат работы сдается на проверку преподавателю. 2. Решить несколько задач практического содержания, использую учебники, по вычислению площадей плоских фигур и нахождению объёмов тел. Результата работы - наличие конспекта.	
Тема 3.4. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	1. Решить несколько дополнительных задач по теме, используя учебники. Результат работы - наличие конспекта с решением. Рассмотреть по учебникам тему: Исследование на непрерывность функций нескольких переменных. Результат работы: наличие конспекта в тетради, подготовка сообщения и выступление на уроке (по желанию)	4
Тема 3.5. Интегральное исчисление функции нескольких действительных переменных	Решить несколько задач практического содержания, используя учебники, по вычислению площадей плоских фигур, объемов тел, массы плоских фигур,	5

	моментов инерции плоских фигур. Результат работы: наличие конспекта.	
Тема 3.6. Теория рядов	1. Решить несколько дополнительных задач по теме, используя учебники. Результат работы - наличие конспекта с решением. 2. Подготовиться к устному и письменному зачёту (устные вопросы и задачи выдаются преподавателем). Результат работы: сдача зачёта.	7
Тема 3.7. Обыкновенные дифференциальные уравнения.	1. Решить несколько дополнительных задач по теме, используя учебники. Результат работы - наличие конспекта с решением. 2. Рассмотреть по учебникам различные примеры дифференциальных уравнений: размножение бактерий, радиоактивный распад, движение материальной точки и др. Гармонические колебания. Результат работы: оформить конспект, подготовить доклады к выступлению на уроке (по желанию)	7

Тема 4.1. Основные понятия теории комплексных чисел	Подготовить историческую справку об истории возникновения комплексных чисел и о математиках, которые внесли вклад в развитие теории комплексных чисел. Результат работы: Наличие конспекта.	5
	ИТОГО:	**75**

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основные источники:

1. Гулиян Б.Ш. Математика. Базовый курс [Электронный ресурс]: учебник/ Гулиян Б.Ш., Хамидуллин Р.Я.— Электрон. текстовые данные.— М.: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2013.— 712 c.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/17023.html.— ЭБС «IPRbooks»
2. Березина Н.А. Высшая математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.А. Березина. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Научная книга, 2012. — 159 c. — 2227-8397. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/8233.html

Дополнительные источники:

1. Методические рекомендации по организации внеаудиторной самостоятельной работы студентов по дисциплине ЕН.01. Элементы высшей математики, 2017г.

Интернет – ресурсы:

1. Интернет-библиотека по математике. Форма доступа: http://ilib.mccme.ru

2. Учебная физико-математическая библиотека. Форма доступа: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm

3. Математическая библиотека. Форма доступа: http://www.math.ru/lib/formats

4. Общероссийский математический портал Math-Net.ru. Форма доступа: http://www.mathnet.ru

5. ЕГЭ по математике: подготовка к тестированию. Форма доступа: http://www.uztest.ru

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Тема 1.1 Матрицы и определители

Теоретические сведения и методические Рекомендации по решению задач.

Матрицей размером $m \times n$ называется совокупность $m \cdot n$ чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов. Эту таблицу обычно заключают в круглые скобки. Например, матрица может иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \pi & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & \sqrt{2} & 0 \\ 1.5 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

2×2 $\quad$ 3×3 $\quad$ 3×1 $\quad$ 1×1

Для краткости матрицу можно обозначать одной заглавной буквой, например, A или B.

В общем виде матрицу размером $m \times n$ записывают так

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа, составляющие матрицу, называются *элементами матрицы*. Элементы матрицы удобно снабжать двумя индексами a_{ij}: первый указывает номер строки, а второй – номер столбца. Например, a_{23} – элемент стоит во 2-ой строке, 3-м столбце.

Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной*, причём число ее строк или столбцов называется *порядком* матрицы. В приведённых выше примерах квадратными являются вторая матрица – её порядок равен 3, и четвёртая матрица – её порядок

Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется *прямоугольной*. В примерах это первая матрица и третья.

Различаются также матрицы, имеющие только одну строку или один столбец.

Матрица, у которой всего одна строка $A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n})$, называется *матрицей – строкой* (или строковой), а матрица, у которой всего один столбец, *матрицей – столбцом*.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается (0), или просто 0. Например,

$$0 = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 0), \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Главной диагональю квадратной матрицы назовём диагональ, идущую из левого верхнего в правый нижний угол.

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 3 & -1 \\ 0 & \underline{2} & -2 \\ 4 & 1 & \underline{3} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю, называется *треугольной* матрицей.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме, быть может, стоящих на главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной* матрицей. Например, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице, называется *единичной* матрицей и обозначается буквой Е. Например, еди**ничная матрица 3-го порядка** имеет вид $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ.

Равенство матриц. Две матрицы A и B называются равными, если они имеют одинаковое число строк и столбцов и их соответствующие элементы равны $a_{ij} = b_{ij}$. Так если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то $A=B$, если $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$ и $a_{22} = b_{22}$.

Транспонирование. Рассмотрим произвольную матрицу A из m строк и n столбцов. Ей можно сопоставить такую матрицу B из n строк и m столбцов, у которой каждая строка является столбцом матрицы A с тем же номером (следовательно, каждый столбец является строкой матрицы A с тем же номером). Итак, если

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \text{то}\quad B=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & \cdots & a_{m2} \\ . & . & . \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Эту матрицу B называют *транспонированной* матрицей A, а переход от A к B *транспонированием*.

Таким образом, транспонирование – это перемена ролями строк и столбцов матрицы. Матрицу, транспонированную к матрице A, обычно обозначают A^T.

Связь между матрицей A и её транспонированной можно записать в виде $a_{ij}^T = a_{ji}$.

Пример. Найти матрицу, транспонированную данной.

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$

2. $B=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B^T=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

Сложение матриц. Пусть матрицы A и B состоят из одинакового числа строк и одинакового числа столбцов, т.е. имеют одинаковые размеры. Тогда для того, чтобы сложить матрицы A и B нужно к элементам матрицы A прибавить элементы матрицы B, стоящие на тех же местах. Таким образом, суммой двух матриц A и B называется матрица C, которая определяется по правилу, например,

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b \end{pmatrix}$$

или

$$(c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$$

Примеры. Найти сумму матриц:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ - нельзя, т.к. размеры матриц различны.
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Легко проверить, что сложение матриц подчиняется следующим законам: коммутативному $A+B=B+A$ и ассоциативному $(A+B)+C=A+(B+C)$.

Умножение матрицы на число. Для того чтобы умножить матрицу A на число k нужно каждый элемент матрицы A умножить на это число. Таким образом, произведение матрицы A на число k есть новая матрица, которая определяется по правилу $kA = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \\ ka_{31} & ka_{32} \end{pmatrix}$ или $(c_{ij}) = (ka_{ij})$
.

Для любых чисел a и b и матриц A и B выполняются равенства:

1. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
2. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
3. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

Примеры.

1. $-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 2 & -4 & -8 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

2. Найти 2 Найти 2A-B, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$2A - B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 5 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

3. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}$. Найти $C=-3A+4B$.

Матрицу C найти нельзя, т.к. матрицы A и B имеют разные размеры.

Умножение матриц. Эта операция осуществляется по своеобразному закону. Прежде всего, заметим, что размеры матриц–сомножителей должны быть согласованы. Перемножать можно только те матрицы, у которых число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы (т.е. длина строки первой равна высоте столбца второй). *Произведением* матрицы A не матрицу B называется новая матрица $C=AB$, элементы которой составляются следующим образом:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}\end{pmatrix}$$

Таким образом, например, чтобы получить у произведения (т.е. в матрице C) элемент, стоящий в 1-ой строке и 3-м столбце c_{13}, нужно в 1-ой матрице взять 1-ую строку, во 2-ой – 3-й столбец, и затем элементы строки умножить на соответствующие элементы столбца и полученные произведения сложить. И другие элементы матрицы-произведения получаются с помощью аналогичного произведения строк первой матрицы на столбцы второй матрицы.

В общем случае, если мы умножаем матрицу $A = (a_{ij})$ размера $m\times n$ на матрицу $B = (b_{ij})$ размера $n\times p$, то получим матрицу C размера $m\times p$, элементы которой вычисляются следующим образом: элемент c_{ij} получается в результате произведения элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B и их сложения.

Из этого правила следует, что всегда можно перемножать две квадратные матрицы одного порядка, в результате получим квадратную матрицу того же порядка. В частности, квадратную матрицу всегда можно умножить саму на себя, т.е. возвести в квадрат.

Другим важным случаем является умножение матрицы–строки на матрицу–столбец, причём ширина первой должна быть равна высоте второй, в результате получим матрицу первого порядка (т.е. один элемент). Действительно,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \end{pmatrix}.$$

Примеры.

1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = AB.$

Найти элементы c_{12}, c_{23} и c_{21} матрицы C.

$$c_{12} = 0 - 2 + 3 = 1, \quad c_{23} = 0 + 0 + 1 = 1, \quad c_{21} = 0 - 3 + 1 = -2.$$

2. Найти произведение матриц.

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\3 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\\2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2 & 4+1\\3+2+2 & 6+1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\7 & 9\end{pmatrix}.$$

3. $$\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 1\\2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-2+2 & -3-2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -7\end{pmatrix}$$
.

4. $\begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$ - нельзя, т.к. ширина первой матрицы равна 2-м элементам, а высота второй – 3-м.

5. Пусть $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\3 & 1\end{pmatrix}.$

Найти AB и BA.

$$AB=\begin{pmatrix}0 & 2\\5 & 1\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}2 & 1\\8 & -1\end{pmatrix}.$$

6. $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$

Найти AB и BA.

$AB=\begin{pmatrix}-3\\-7\end{pmatrix}$, $B\cdot A$ – не имеет смысла.

ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.

Пусть дана матрица второго порядка – квадратная матрица, состоящая из двух строк и двух столбцов $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Определителем второго порядка, соответствующим данной матрице, называется число, получаемое следующим образом: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определитель обозначается символом

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Итак, для того чтобы найти определитель второго порядка нужно из произведения элементов главной диагонали вычесть произведение элементов по второй диагонали.

Примеры. Вычислить определители второго порядка.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=-8-15=-23$
2. $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=0+6=6$.
3. Вычислить определитель матрицы D, если D= $-A+2B$ и

$$A=\begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} -11 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 14 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 17 & 0 \end{pmatrix},\quad |D|=0.$$

Аналогично можно рассмотреть матрицу третьего порядка и соответствующий ей определитель.

Определителем третьего порядка, соответствующим данной квадратной матрице третьего порядка, называется число, обозначаемое и получаемое следующим образом:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, эта формула даёт разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки a_{11}, a_{12}, a_{13} и сводит вычисление определителя третьего порядка к вычислению определителей второго порядка.

Примеры. Вычислить определитель третьего порядка.

1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=8-3\cdot(-1)-4\cdot 2=3.$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1+2\cdot 4=9$$

Вариант 1.

1. Найдите матрицу C = A^2+ 2B, если A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Найдите: A · B – B · A, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, B $= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Вычислите: 3A · 2B, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, B $= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Найдите обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Вариант 2.

1. Найдите матрицу $C = A^2 + 2B$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Найдите: A · B – B · A, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, B $= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Вычислите: 3A · 2B, если $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Найдите обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Контрольные вопросы по теме.

1. Что называется матрицей?
2. Что называется матрицей-строкой, матрицей столбцом?
3. Какие матрицы называются прямоугольными, квадратными?
4. Какие матрицы называются равными?
5. Что называется главной диагональю матрицы?
6. Какая матрица называется диагональной?
7. Какая матрица называется единичной?
8. Какая матрица называется треугольной?
9. Что значит транспонировать матрицу?
10. Что называется суммой матриц?
11. Что называется произведением матрицы на число?
12. Как найти произведение двух матриц?
13. В чем состоит обязательное условие существования произведения матриц?
14. Что называется определителем матрицы?
15. Как вычислить определитель третьего порядка по схеме треугольников?
16. Что называется минором?
17. Что называется алгебраическим дополнением элемента определителя?
18. Как разложить определитель по элементам столбца или строки?
19. Перечислите свойства определителя.
20. Какая матрица называется невырожденной?
21. Какая матрица называется обратной по отношению к данной?

22.Каков алгоритм нахождения обратной матрицы?

Тема 1.2. Системы линейных уравнений

Теоретические сведения и методические рекомендации по решению задач.

Метод Крамера.

(Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$\det A \neq 0$;

Действительно, если какое- либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой- либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое- либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Теорема. (Правило Крамера):

Теорема. *Система из n уравнений с n неизвестными*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_i = \Delta_i/\Delta, \text{ где}$$

$\Delta = \det A$, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; Δ_1= $\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; Δ_2= $\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$; Δ_3= $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$;

$x_1 = \Delta_1/\det A$; $x_2 = \Delta_2/\det A$; $x_3 = \Delta_3/\det A$;

Пример. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = -25 – 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30.$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1$;

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 – 48) – (16 – 56) = -100 + 40 = -60.$$

$x_2 = \Delta_2/\Delta = 2$;

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(\,32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

$x_3 = \Delta_3/\Delta = 3.$

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Самостоятельная работа

Вариант – 1.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 8 \\ y - 3z = 3 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases};$$

Вариант –2.

$$\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ x + y - 2z = 6; \\ y + z = 7 \end{cases}$$

Вариант –3.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 9 \\ x - y + 3z = -1; \\ y - 2z = 4 \end{cases}$$

Вариант –4.

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 9 \\ 3x - y = 2z = 2; \\ y - 5z = 1 \end{cases}$$

Вариант –5.

$$\begin{cases} 5x - 2y + 3z = 1 \\ x + y - 5z = 3 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases};$$

Вариант –6.

$$\begin{cases} x + y - 3z = 5 \\ x - 2z = 0 \\ x + 2y - 6z = 8 \end{cases};$$

Вариант –7.

$$\begin{cases} y - 3z = 3 \\ 2x + y - 2z = 8; \\ x + y - 4z = 4 \end{cases}$$

Вариант –8.

$$\begin{cases} 2x + 3z = 7 \\ x - y + z = -3; \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$$

Вариант –9.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ x + y - 2z = 6; \\ y + 2z = 8 \end{cases}$$

Вариант –10.

$$\begin{cases} x = y + 5z = 1 \\ 2x + y - 3z = 7; \\ y - 3z = 3 \end{cases}$$

Вариант –11.

$$\begin{cases} 3x - y + 3z = 3 \\ x + 2y - 4z = 10. \\ y - z = 5 \end{cases}$$

Контрольные вопросы по теме.

1. Системы линейных алгебраических уравнений: основные понятия и определения.
2. Матричная запись СЛАУ.
3. Решение СЛАУ по формулам Крамера
4. Методом обратной матрицы
5. Методом Гаусса.
6. Общее решение СЛАУ.
7. Однородные СЛАУ, свойства их решений.
8. Условия существования ненулевых решений однородных СЛАУ.

Тема 1.3. Системы линейных неравенств.

Составить задачу с практическим содержанием и решить алгебраически и графически. Результат работы: задача в тетради.

Тема 2.1. Векторы на плоскости и в пространстве.

Задания для типового расчета

Даны координаты вершин треугольника ABC: A(-5; 0), B(7;9), C(5;-5).Требуется найти:

1. длину стороны AB
2. уравнение сторон AB и AC и их угловые коэффициенты;
3. внутренний угол A в радианах с точностью до 0,01;
4. координаты центра тяжести треугольника;

5. уравнение высоты CD;
6. Найти длину высоты CD;
7. уравнение и длину медианы AM
8. уравнение прямой проходящей через точку C параллельно прямой AB
9. уравнение окружности, для которой высота CD есть диаметр;
10. сделать чертеж.

Варианты заданий к типовому расчету:

№ варианта	***Координаты точек***		
	A	***B***	***C***
1	*(-7;2)*	*(5;11)*	*(3;-3)*
2	*(-5;-3)*	*(7;6)*	*(5;-8)*
3	*(-6;-2)*	*(6;7)*	*(4;-7)*
4	*(-8;-4)*	*(4;5)*	*(2;-9)*
5	*(0;-1)*	*(12;8)*	*(10;-6)*
6	*(-6;1)*	*(6;10)*	*(4;-4)*
7	*(-2;-4)*	*(10;5)*	*(8;-9)*
8	*(-3;0)*	*(9;9)*	*(7;-5)*
9	*(-9;-2)*	*(3;7)*	*(1;-7)*

10	*(-5;2)*	*(7;-7)*	*(5; 7)*
11	*(-7;5)*	*(5;-4)*	*(3;10)*
12	*(-7;1)*	*(5;-8)*	*(3;6)*
13	*(0;3)*	*(12;-6)*	*(10;8)*
14	*(-8;4)*	*(4;-5)*	*(2;9)*
15	*(-2;2)*	*(10;-7)*	*(8;7)*
16	*(1;2)*	*(13;-7)*	*(11;7)*
17	*(-4;1)*	*(8;-8)*	*(6;6)*
18	*(-7;-1)*	*(-5;-10)*	*(3;4)*
19	*(-3;3)*	*(9;-6)*	*(7;8)*
20	*(0;0)*	*(12;9)*	*(10;-5)*
21	*(-9;0)*	*(3;9)*	*(1;-5)*

Тема 2.2. Прямая на плоскости. Кривые второго порядка.

Вариант – 1.

1. В треугольнике ABC, BM – медиана, A(-1; 2; 2), B(2; -2; -1).

Найти: а) координаты точки C; б) длину стороны BC.

2. Вычислить угол между прямыми AB и CD, если A ($\sqrt{3}$; 1; 0), B(0; 0; $2\sqrt{2}$), C(0; 2; 0), D($\sqrt{3}$; 1; $2\sqrt{2}$).
3. Составьте уравнение окружности с центром в точке (-3; 0) и проходящей через
   точку (2; 4).

4. Составьте уравнение гиперболы, если её вершины находятся в точках (-3; 0) и (3; 0), а фокусы – в точках (-3$\sqrt{5}$; 0) и (3$\sqrt{5}$; 0).
5. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку M (-2; 3; 4) и параллельной плоскости x +2y -3z + 4= 0.

Вариант – 2.

1. В параллелограмме ABCD диагонали пересекаются в точке O, A (1; 3; -1), B (-2; 1; 0), O (0; 1,5; 0). Найдите: а) координаты точки C; б) длину стороны BC.
2. Вычислить угол между прямыми AB и CD, если A (6; -4; 8), B (8; -2;4), C (12; -6; 4), D(14; -6; 2).
3. Составьте уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках (0; -8) и (0; 8), а фокусы - в точках (-5; 0) и (5; 0).
4. Составьте уравнение гиперболы с фокусами на оси OX, если её действительная ось равна 26, а мнимая ось равна 42.
5. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку M (2; 1; 3) и параллельной вектору $\vec{k}\ \{-2; 2; 1\}$.

Вариант – 3.

1. В треугольнике ABC, BM – медиана, A (-2; 4; 4), B (4; -4; -12), M (2; 2; -2). Найти: а) координаты точки C; б) длину стороны BC.
2. Вычислить угол между прямыми BA и BC, если A (-1; 4; 1), B (3; 4; -2), C (5; 2; -1).
3. Составьте уравнение окружности с центром в точке (5; -7) и проходящей через точку (2; -3).
4. Составьте уравнение гиперболы, если её вершины находятся в точках (-3; 0) и (3; 0), а фокусы – в точках (-5; 0) и (5; 0).

5. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку М (2; 2; -2) и параллельной плоскости x +2y -3z = 0.

Вариант – 4.

1. В параллелограмме ABCD диагонали пересекаются в точке О, А (2; 6; -2), В (-4; 2; 0), О(0; 3; 0). Найдите: а) координаты точки С; б) длину стороны ВС.
2. Вычислить угол между прямыми АВ и CD, если А (3; -2; 4), В (4; -1;2), С(16; -3; 2), D(17; -3; 1).
3. Составьте уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках (0; -6) и (0; 6), а фокусы - в точках (-3; 0) и (3; 0).
4. Составьте уравнение гиперболы с фокусами на оси ОХ, если её действительная ось равна 24, а мнимая ось равна 40.
5. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку М (3; 2; 1) и параллельной вектору $\vec{k}\ \{-2; 3; 1\}$.

Контрольные вопросы по теме.

1. Что называется, уравнением прямой?
2. Каким уравнением описывается прямая на плоскости?
3. Как записывается каноническое уравнение прямой?
4. Запишите уравнения осей координат.
5. Запишите уравнения прямых, параллельных осям координат.
6. Сформулируйте правило составления уравнения прямой на плоскости.
7. Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом.
8. Сформулируйте условие параллельности прямых.
9. Сформулируйте условие перпендикулярности прямых.
10. Как найти угол между прямыми?
11. Каким уравнением описывается кривая на плоскости?
12. Запишите каноническое уравнение эллипса.
13. Что называется, эксцентриситетом эллипса? Какова его величина?

14. Чему равен эксцентриситет окружности?

15. Запишите каноническое уравнение гиперболы.

16. Запишите уравнение равносторонней гиперболы.

17. Запишите каноническое уравнение параболы, директрисы параболы.

Тема 3.1 Теория пределов. Непрерывность

Задание 1. Изучить материал : «Предел функции», «Два замечательных предела». Составить план и подготовить ответ по плану.

Задание 2. Составить таблицы:

а) основных элементарных функций и их графиков;

б) основных формул и правил нахождения пределов.

Задание 3. Найти пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{7x-5}{10+2x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{11x^2-78x+7}{2x^2-9x-35}$;

д) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x+3}{5x-7}$;

е) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+x-4}{3x^2-2x+5}$;

ж) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3-2x^2+3}{7x-4}$;

з) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{13x^2-2x+5}{x^4+6x+1}$.

Тема 3.2. Дифференциальное исчисление функций одной действительной переменной.

Теоретический материал и примеры применения производной к исследованию функции.

Общая схема исследования функции и построения её графика.

1. Находят область определения функции;
2. Проверяют функцию на четность и нечетность (заметим, что графики четных функций симметричны относительно оси (ОУ), а нечетных – относительно начала координат); проверяют функцию на периодичность;
3. Находят точки пересечения графика с координатными осями (ось ОХ имеет уравнение $y=0$, ось ОУ имеет уравнение $x=0$);
4. Находят асимптоты графика функции;
5. Исследуют функцию на монотонность и находят точки экстремума;
6. Находят интервалы выпуклости графика функции и точки его перегиба;
7. Строят график.

Для применения данной схемы, вспомним некоторые основные понятия и определения. Прямая $y=kx+b$ называется ***наклонной асимптотой*** для графика функции $y=f(x)$, если

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0 \qquad (1)$$

Числа k и b в уравнении асимптоты находятся из условий:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) \qquad (2)$$

Если $k=0$, то прямая $y=b$ называется ***горизонтальной асимптотой***.

Прямая $x=a$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y=f(x)$, если

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=\infty \quad \textit{или} \quad \lim_{x\to a+0}f(x)=\infty.$$

Заметим, что при нахождении вертикальных асимптот графика функции $y = f(x)$ в качестве точки a, через которую может проходить вертикальная асимптота, следует рассматривать точку разрыва данной функции.

Правило нахождения интервалов монотонности и точек экстремума:

1. Найти область определения функции.
2. Вычислить производную функции $f'(x)$;
3. Найти критические точки функции, т.е. точки в которых $f'(x) = 0$ или не существует;
4. Исследовать знак производной функции в интервалах, на которые разбивается область определения функции этими критическими точками;
5. Если в рассматриваемом интервале

   $f'(x) \prec 0$, то на этом интервале функция убывает;

   $f'(x) \succ 0$, то на этом интервале функция возрастает.
6. Если x_0 - критическая точка и при переходе через нее $f'(x)$ меняет знак с «+» на « - », то x_0 - точка максимума; если же она меняет знак с « - » на «+», то x_0 - точка минимума.

Правило нахождения интервалов выпуклости графика функции и точек перегиба:

1. Вычислить вторую производную функции $f''(x)$;
2. Найти у функции критические точки 2-го рода, т.е. точки в которых $f''(x) = 0$ или не существует;
3. Исследовать знак второй производной функции в интервалах, на которые разбивается область определения функции критическими точками 2-го рода;
4. Если в рассматриваемом интервале

$f''(x) \prec 0$, то на этом интервале график функции выпуклый вверх;

$f''(x) \succ 0$, то на этом интервале график функции выпуклый вниз;

5. Если x_0 - критическая точка 2-го рода и при переходе через нее $f''(x)$ меняет знак, то x_0 - точка перегиба.

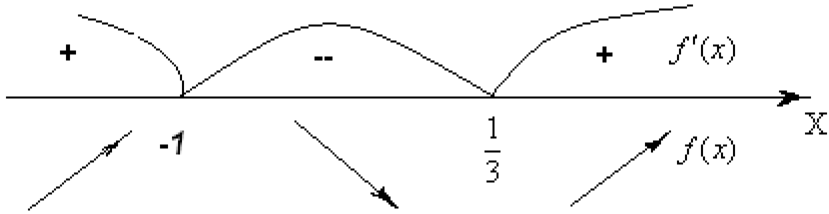
Пример 1: Исследовать функцию $y = x^3 + x^2 - x - 1$ и построить ее график.

Решение: исследуем функцию по схеме:

1. D(y)=R;
2. $y(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - (-x) - 1 = -x^3 + x^2 + x - 1 = -(x^3 - x^2 - x + 1)$ - функция не будет ни четной, ни нечетной; функция непериодическая;
3. Найдем точки пересечения с (OX): $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$. Перебирая делители свободного члена, находим целые нули функции: $x = -1$ *и* $x = 1$.

   Найдем точки пересечения графика функции с осью (OУ): если $x = 0$, то $y = -1$;
4. Асимптот нет;
5. Для нахождения интервалов монотонности функции найдем ее производную: $y' = 3x^2 + 2x - 1$. Найдем критические точки функции: $y' = 3x^2 + 2x - 1 = 0$. Получим: $x_1 = -1$ *и* $x_2 = \frac{1}{3}$.

   Найдем интервалы возрастания и убывания функции:



Из чертежа имеем, что функция возрастает на $(-\infty;-1)$ *и* $(\frac{1}{3};+\infty)$, убывает на $(-1;\frac{1}{3})$. Найдем экстремумы функции:

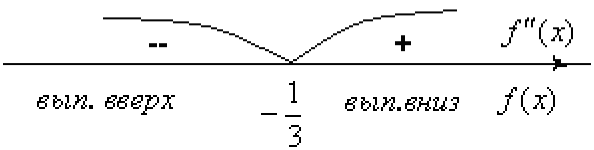
$\max f(x) = f(-1) = 0$. Значит, точка максимума имеет координаты $(-1;\,0)$

$\min f(x) = f(\frac{1}{3}) = -1\frac{5}{27}$. Значит, точка минимума имеет координаты $(\frac{1}{3};-1\frac{5}{27})$

6. Для нахождения интервалов выпуклости графика функции вычислим вторую производную: $y'' = 6x + 2$. Найдем критические точки 2 рода функции:

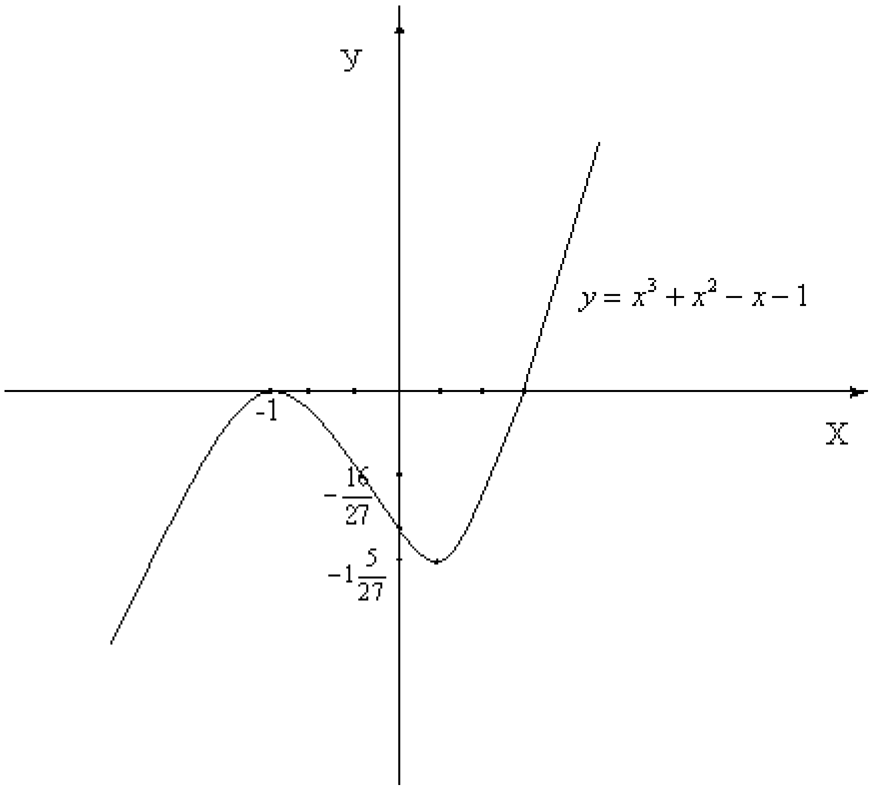
$6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$. Определим знак второй производной в интервалах, на которые разбивается область определения

19



Значит, график функции будет выпуклым вверх на $(-\infty;-\frac{1}{3})$ и выпуклым вниз на $(-\frac{1}{3};+\infty)$. Т.к. вторая производная меняет знак при переходе через точку $x=-\frac{1}{3}$, то в ней график будет иметь перегиб. Вычислим: $f(-\frac{1}{3})=-\frac{16}{27}$. Значит, точка перегиба $(-\frac{1}{3};-\frac{16}{27})$.

7. Построим график:



Пример 2. Построить график функции у = $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Решение:

1. Найдем область определения функции. Она задается условиями х ≠ 1, х ≠ -1 (при значениях х ≠ 1, х ≠ -1 знаменатель дроби обращается в нуль). Итак,

$$D(f)=(-\infty;1)(-1:1)(1;+\infty).$$

2. Исследуем функцию на честность:

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1}=\frac{x^2+1}{x^2-1}=f(\mathrm{x})$$

Значит, заданная функция четна, ее график симметричен относительно оси ординат, а потому можно для начала ограничиться построением ветвей графика при х ≥ 0.

3. Точек пересечения графика функции с осью ОХ нет,

Найдем точки пересечения графика функции с осью ОУ: если $x=0 \quad то \; y=-1$

20

4. Найдем асимптоты графика. Вертикальной асимптотой является прямая х = 1, поскольку при этом значении х знаменатель дроби обращается в нуль, а числитель отличен от нуля. Для отыскания горизонтальной асимптоты надо вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=1.$$

Значит, у = 1 – горизонтальная асимптота графика функции.

5. Найдем критические точки, точки экстремума и промежутки монотонности функции:

y′

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' = \frac{\left(x^2+1\right)'\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{2x\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

.

Критические точки найдем из соотношения $y' = 0$. Получаем $-4x = 0$, откуда находим, что $x = 0$. При $x < 0$ имеем $y' > 0$, а при $x > 0$ имеем $y' < 0$. Значит, $x = 0$ – точка максимума функции, причем

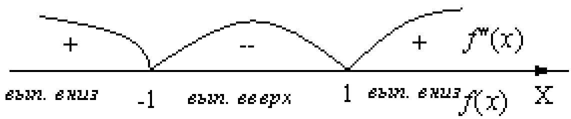
$y_{max} = f(0) = \dfrac{0^2+1}{0^2-1} = -1.$

При $x > 0$ имеем $y' < 0$, но следует учесть наличие точки разрыва $x = 1$. Значит, вывод о промежутках монотонности будет выглядеть так: на промежутке $[0;1)$ функция убывает, на промежутке $(1;+\infty)$ функция также убывает.

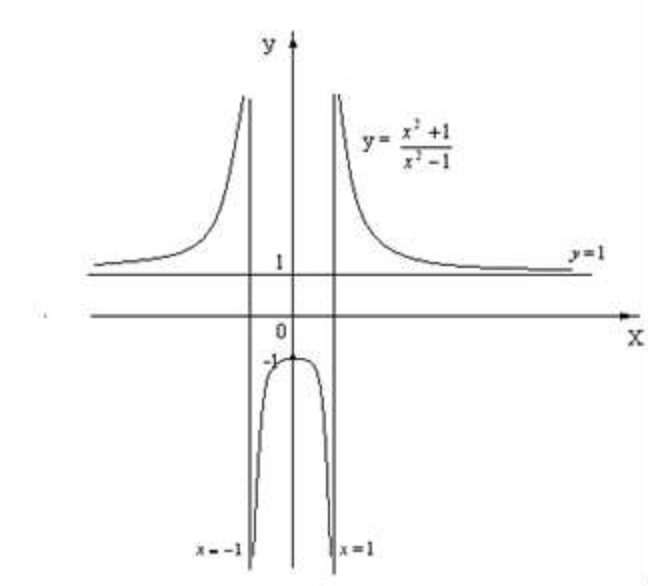
6. Вычислим вторую производную

$$f''(x) = \left(\frac{-4x}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{-4(x^2-1)^2+4x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{-4(x^2-1)+16x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

$f''(x)$ нигде не обращается в ноль, критическими точками будут только точки $x = \pm 1$. Определим знак $f''(x)$ в интервалах:



7. Отметим (0;-1) – точку максимума, построим прямые $y = 1$ – горизонтальную асимптоту, что $x = 1$ и $x = -1$– вертикальные асимптоты,



Вариант – 1.

1. Найти промежутки монотонности функции $y = e^x - x$.
2. Исследовать на экстремум функцию $y = x^3 - 6x^2$+9x+3.
3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 3$ на промежутке $[2; 3]$.
4. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 4$.

Вариант – 2.

1. Найти промежутки монотонности функции $y = \frac{2x}{e^x}$.
2. Исследовать на экстремум функцию $y = -x^3 - 3x^2$+24x-4.
3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$ на промежутке $[-1; 2]$.
4. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции $y = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 100$.

Вариант – 3.

1. Найти промежутки монотонности функции $y = 2xe^x$.

2. Исследовать на экстремум функцию $y = x^3 - 3x^2$-9x-4.
3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = -x^3 - 3x^2 + 9x - 2$ на промежутке $[-2; 2]$.
4. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 48x + 31$.

Вариант – 4.

1. Найти промежутки монотонности функции $y = e^{\frac{1}{x}} + 1$.
2. Исследовать на экстремум функцию $y = -x^3 + 6x^2$+15x+1.
3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$ на промежутке $[-4; 4]$.
4. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции

$y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10$.

Расчетно-графическая работа.

Исследуйте и постройте график данной функции.

Вариант – 1.

$y = 2x^3 - 6x + 5$.

Вариант – 2.

$y = x^3 - x^2 - x + 3$.

Вариант – 3.

$y = x^4 - 10x^2 + 9$.

Вариант – 4. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

Контрольные вопросы по теме.

1.Повторите определения возрастающей и убывающей функций. В чем заключается признак возрастания и убывания функций?

2.В чем заключаются необходимый и достаточный признаки существования экстремума? Перечислите порядок операций для отыскания максимума и минимума функции с помощью первой производной.

3.В чем различие между нахождением максимума и минимума функции и нахождением ее наибольшего и наименьшего значений?

4.Как пишется наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке?

5.Как определяются геометрически и по знаку второй производной выпуклость и вогнутость кривой?

6.Что называется точкой перегиба и каковы необходимый и достаточный признаки ее существования? Сформулируйте правило нахождения точки перегиба.

7.Какой схемой рекомендуется пользоваться при построении графика функции?

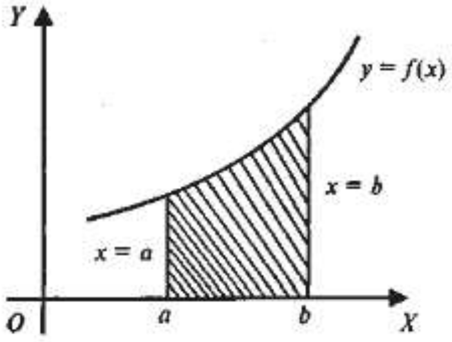
Тема 3.3. Интегральное исчисление функции одной переменной.

Теоретический материал и примеры вычисления определённого интеграла.

Геометрический смысл определённого интеграла

Площадь фигуры, ограниченной кривой $y = f\ (x)$, где $f\ (x) > 0$, осью OX и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 1), выражается определённым интегралом:

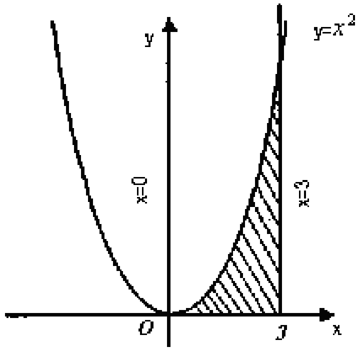
$$S = \int_a^в f(x)dx$$



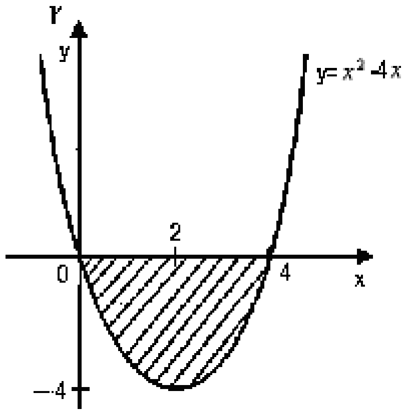
Примеры:

1. Определить площадь S фигуры, заключённой между ветвью кривой $y = x^2$, осью OX и прямыми $x = 0, x = 3$.

Решение: $S = \int\limits_0^3 x^2 dx = \left.\dfrac{x^3}{3}\right| = 9(кв.ед.)$



2) Найти площадь S фигуры, заключённой между осью OX и кривой $y = x^2 - 4x$



Решение: рассмотрим точки пересечения кривой $y = x^2 - 4x$ с осью OX:

$y = 0;$ $\Leftrightarrow$ $x^2 - 4x = 0$ $\Leftrightarrow$ $x\,(x - 4) = 0;$ $\Leftrightarrow$ $x_1 = 0$ или $x_2 = 4.$

Найдём производную функции $y' = 2x - 4,$ и точки экстремума:

$y' = 0$ $\Leftrightarrow$ $2x - 4 = 0;$ $\Leftrightarrow$ $x = 2;$ $y'' = 2 > 0;$ $\Leftrightarrow$ $x = 2$ – точка $min;$ $y(2) = -4.$

Искомая площадь ограничена сверху осью *OX*, снизу графиком функции $y = x^2 - 4x$, слева прямой $x = 0$, справа прямой $x = 4.$ Так как на отрезке $[0;\,4]$ $y < 0,$ то

$$S = \left|\int_0^4 \left(x^2 - 4x\right)dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2\right)\Big|_0^4\right| = \left|\frac{64}{3} - 32\right| = \left|21\frac{1}{2} - 32\right| = \left|-10\frac{2}{3}\right| = 10\frac{2}{3}$$

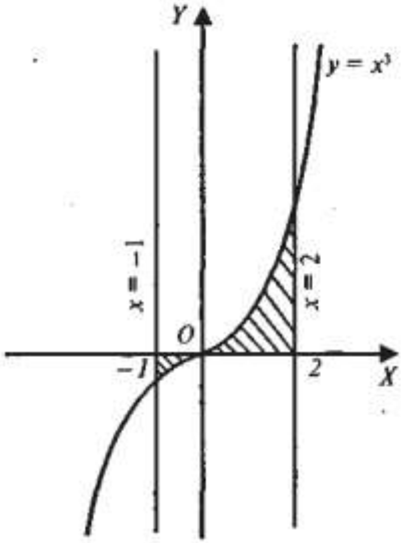
(кв.ед.)

3) Найти площадь фигуры, заключённой между линиями $y = x^3$, $x = -1.$ $x = 2$ и осью *OX*

Решение: найдем точки пересечения графика функции $y = x^3$ с осью OX:

$y = x^3;$ $y = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = 0;$ Вычислим производную функции: $y' = 3x^2;$ $y' = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = 0$. Найдем значение второй производной в точке $x=0$: $y'' = 6x;$ $y''(0) = 0.$ Вычислим $y''(-1) = -=6;$ $y''(1) = 6;$ $\Leftrightarrow$ Т.к. y'' меняет знак при переходе через $x = 0$ $\Leftrightarrow$ т. $(0;0)$ – точка перегиба. Искомая площадь состоит из двух частей, поэтому:

$$S = \int_0^2 x^3dx + \left|\int_{-1}^0 x^3dx +\right| = \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 + \left|\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^0\right| = 4 + \left|0 - \frac{1}{4}\right| = 4\frac{1}{4} \ (кв.ед.)$$



3. Расчетно-графическая работа

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями. Выполните рисунок.

Вариант – 1.

1. $y = -x^2 + 4; y = 0.$
2. $y = sinx; x = 0; y = 0.$
3. $y = x^2; y = 9.$

Вариант – 2.

1. $y = x^2 + 3; x = 0; x = 2;\ y = 0.$
2. $y = cosx; x = 0; x = \frac{\pi}{4}; y = 0.$
3. $y = -x^2 + 6; y = 2.$

Вариант – 3.

1. $y = x^2 - 2x; x = 2; x = 4;\ y = 0.$
2. $y = sinx; x = \frac{\pi}{6}; x = 3; y = 0.$
3. $y = x^2 + 2; y = x + 4.$

Вариант – 4.

1. $y = -x^2 + 4x; x = 2;\ y = 0.$
2. $y = cosx; x = -\frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{6}; y = 0.$
3. $y = x^2; y = x + 2.$

Контрольные вопросы по теме.

1. Что такое определенный интеграл?

2. Что в записи $\int_a^b f(x)$ означают: а) числа a и b; б) x; в) $f(x)$; г) $f(x)dx$?

3. Зависит ли приращение $F(b) - F(a)$ от выбора первообразной?

4. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.

5. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?

6. Перечислите все пять случаев применения определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур.
7. Может ли площадь криволинейной трапеции быть равна отрицательной величине, нулю и почему?
8. Приведите примеры физических и технических задач, которые можно решить с помощью определенного интеграла.

Тема 3.4. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Решить задания для самоподготовки стр.546 №1,4,5,7:

Гулиян Б.Ш. Математика. Базовый курс [Электронный ресурс]: учебник/ Б.Ш. Гулиян, Р.Я. Хамидуллин— Электрон. текстовые данные.— М.: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2013.— 712 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/17023.html.— ЭБС «IPRbooks»

Тема 3.5. Интегральное исчисление функции нескольких действительных переменных

Решить задания для самоподготовки стр.564 №1-5:

Гулиян Б.Ш. Математика. Базовый курс [Электронный ресурс]: учебник/ Б.Ш. Гулиян, Р.Я. Хамидуллин— Электрон. текстовые данные.— М.: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2013.— 712 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/17023.html.— ЭБС «IPRbooks»

Тема 3.6. Теория рядов

Теоретические сведения и методические рекомендации по решению задач.

Сходимость рядов. Признаки сравнения

Необходимый признак сходимости, вообще говоря, не гарантирует сходимости ряда. Сходимость или расходимость ряда устанавливается с помощью достаточных признаков. **Признаки абсолютной сходимости**

Признак сравнения

Если $\exists N_0 : |a_n| \leqslant b_n$ при $n \geqslant N_0$, то:

- если ряд $\sum b_n$ сходится, то ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно
- если ряд $\sum a_n$ расходится, то ряд $\sum b_n$ расходится

Согласно критерию Коши,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \geqslant N_0 \ \forall m \geqslant n \geqslant N : \left|\sum_{k=n}^{m} b_k\right| \leqslant \varepsilon .$$

Значит,

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{m} |a_k| \leqslant \sum_{k=n}^{m} b_k \leqslant \left|\sum_{k=n}^{m} b_k\right| \leqslant \varepsilon$$, и по критерию Коши ряд $\sum a_n$ сходится. Второе утверждение следует из первого, так как если бы ряд $\sum b_n$ сходился, то и ряд $\sum a_n$ сходился бы.

Признак сходимости рядов с монотонно убывающими членами

Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant 0$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$

Признаки Коши и Даламбера

Признак д'Аламбера

Ряд $\sum a_n$

1. Сходится абсолютно, если $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$
2. Расходится, если $\underline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$
3. Существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых $\underline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant 1 \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

Признак Коши

Пусть задан ряд $\sum a_n$ и $\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Тогда

1. Если $\alpha < 1$, то ряд сходится абсолютно
2. Если $\alpha > 1$, то ряд расходится
3. Существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых $\alpha = 1$

достаточные признаки сходимости или расходимости рядов.

Контрольные вопросы по теме.

1. Назовите свойства сходящихся рядов.
2. Сформулируйте необходимый признак сходимости ряда.
3. Назовите достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.
4. В чем заключается признак сравнения?
5. Сформулируйте признак сходимости Даламбера.
6. В чем заключается признак Коши и интегральный признак?
7. В чем отличие знакопеременного ряда от знакочередующегося?
8. Дайте определение абсолютно сходящегося ряда и условно сходящегося ряда
9. Сформулируйте признак Лейбница о сходимости знакопеременного ряда.
10. Понятие степенного ряда.
11. Ряд Тейлора.

12. Ряд Маклорена.

Числовые ряды. Признак Даламбера

Вариант – 1.

1. Найдите 4 первых члена ряда по заданному общему члену $a_n = \frac{1}{(2n+1)2^{n-1}}$.
2. Найдите формулу общего члена ряда:

а) $1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{3} + \cdots$;

б) $\frac{2}{5} + \frac{5}{7} + \frac{8}{9} + \cdots$.

3. Используя признак Даламбера, исследуйте сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5^n}$.

Вариант – 2.

1. Найдите 4 первых члена ряда по заданному общему члену $a_n = \frac{n+1}{(2n-1)3^{n-1}}$.
2. Найдите формулу общего члена ряда:

а) $\frac{5}{1} + \frac{9}{2} + \frac{13}{3} + \cdots$;

б) $\frac{4}{2} + \frac{7}{7} + \frac{10}{12} + \cdots$.

3. Используя признак Даламбера, исследуйте сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$.

Вариант – 3.

1. Найдите 4 первых члена ряда по заданному общему члену $a_n = \frac{3n+2}{(3n-1)2^{n-1}}$.
2. Найдите формулу общего члена ряда:

а) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} \dots$;

б) $\frac{2}{4} + \frac{4}{9} + \frac{6}{16} + \frac{8}{25} \dots$.

3. Используя признак Даламбера, исследуйте сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n(n+1)}$.

Вариант – 4.

1. Найдите 4 первых члена ряда по заданному общему члену $a_n = \frac{3n+1}{(n^2+1)3^{n-1}}$.
2. Найдите формулу общего члена ряда:

а) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \dots$;

б) $\frac{2}{1} + \frac{4}{4} + \frac{8}{9} + \frac{16}{16} \dots$.

3. Используя признак Даламбера, исследуйте сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$.

Признак Лейбница. Промежуток сходимости. Ряд Маклорена.

Вариант – 1.

1. Используя признак Лейбница, исследуйте сходимость знакочередующегося ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$.

2. Найдите промежуток сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$.
3. Разложите в ряд Маклорена функцию $f(x) = \ln(1+5x)$.

Вариант – 2.

1. Используя признак Лейбница, исследуйте сходимость знакочередующегося ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{4n-1}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n \cdot 3^n}$.

2. Найдите промежуток сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$.

3. Разложите в ряд Маклорена функцию $f(x) = \cos\frac{x}{3}$.

Вариант – 3.

1. Используя признак Лейбница, исследуйте сходимость знакочередующегося ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{6n-1}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$.

2. Найдите промежуток сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n} \cdot x^n$.
3. Разложите в ряд Маклорена функцию $f(x) = \mathrm{e}^{4x}$.

Вариант – 4.

1. Используя признак Лейбница, исследуйте сходимость знакочередующегося ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{3n+1}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(4n-1)^2}$.

2. Найдите промежуток сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(N+1)\cdot 3^n}$.
3. Разложите в ряд Маклорена функцию $f(x) sin5x$.

Тема 3.7. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Теоретический материал и примеры решения дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядков.

Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка y' = f(x,y) называется уравнением с разделяющимися переменными, если функцию f(x,y) можно представить в виде произведения двух функций, зависящих только от x и y:

$$f(x,y) = p(x)h(y),$$

где p(x) и h(y) − непрерывные функции.

Рассматривая производную y' как отношение дифференциалов $\frac{dy}{dx}$, перенесем dx в правую часть и разделим уравнение на h(y):

$$\frac{dy}{dx} = p(x)h(y), \Rightarrow \quad \frac{dy}{h(y)} = p(x)dx.$$

Разумеется, нужно убедиться, что h(y) ≠ 0. Если найдется число x0, при котором h(x0) = 0, то это число будет также являться решением дифференциального уравнения. Деление на h(y) приводит к потере указанного решения.

Обозначив $q(y) = \frac{1}{h(y)}$, запишем уравнение в форме:

$$q(y)dy = p(x)dx.$$

Теперь переменные разделены и мы можем проинтегрировать дифференциальное уравнение:

$$\int q(y)\,dy = \int p(x)\,dx + C,$$

где C − постоянная интегрирования.

Вычисляя интегралы, получаем выражение

$$Q(y) = P(x) + C,$$

описывающее общее решение уравнения с разделяющимися переменными.

Однородные уравнения

Определение однородного дифференциального уравнения

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

называется *однородным*, если правая часть удовлетворяет соотношению

$$f(tx, ty) = f(x, y)$$

для всех значений *t*. Другими словами, правая часть должна являться однородной функцией нулевого порядка по отношению к переменным *x* и *y*:

$$f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y).$$

Однородное дифференциальное уравнение можно также записать в виде

$$y' = f\left(\frac{x}{y}\right),$$

или через дифференциалы:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ − однородные функции одинакового порядка.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение линейного уравнения первого порядка
Дифференциальное уравнение вида
$y' + a(x)y = f(x),$
где a(x) и b(x) − непрерывные функции x, называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка.

Общий вид линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида y''+ρy'+qy=f(x), где ρ и q – вещественные числа, f(x) – непрерывная функция, называется линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка вида:

y''+ρy'+qy=0, (1) у которого правая часть f(x) равна нулю. Такое уравнение называется однородным.

Уравнение K2+ρK+q=0 , (2) называется характеристическим уравнением данного уравнения (1).

Характеристическое уравнение (2) является квадратным уравнением, имеющим два корня. Обозначим их через К1 и К2.

Общее решение уравнения (1) может быть записано в зависимости от величины дискриминанта D=ρ2–4q уравнения (2) следующим образом:

1. При D>0 корни характеристического уравнения вещественные и различные (К1≠К2), и общее решение имеет вид ……..$y=C1e^{x}+C2e^{-2x}$

2. При D=0 корни характеристического уравнения вещественные и равные (К1=К2=К), и общее решение имеет вид: …$y=Ax^2+Bx+C$…

3. Если D<0, то корни характеристического уравнения комплексные: , где – мнимая единица, и общее решение (К1=α+βi, К2=α–βi, β≠0), имеет вид y=eαx(C1 cosβx+C2 sinβx).

Решите дифференциальные уравнения.

Вариант – 1.

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{dx}{x-1}$;
2. $y' = x,$ если $y = 0$ при $x = 2$;
3. $(1 + x^3)dy = 3x^2ydx$.

Вариант – 2.

1. $e^x dx = 2ydy$;

2. $2ydx = (1 + x)dy,$ если $y(1) = 4$;
3. $(1 + x^2)$dy-2xydx=0.

Контрольные вопросы по теме.

1..Какое уравнение называется дифференциальным?
2.Какая функция называется решением дифференциального уравнения?
3. Какое решение дифференциального уравнения называется общим и какое называется частным?
4.Каков геометрический смысл общего и частного решений дифференциального уравнения?
5.Может ли дифференциальное уравнение иметь конечное число решений?
6.Что такое порядок дифференциального уравнения и как его определить?
7.Сколько постоянных интегрирования имеет общее решение дифференциального уравнения первого, третьего порядка?
8.Как проверить, правильно ли найдено решение дифференциального уравнения?
9.Чем отличается дифференциальное уравнение от алгебраического уравнения?
10.Назовите известные вам типы дифференциальных уравнений.
11.Каков общий вид дифференциальных уравнений первого порядка с разделенными и разделяющимися переменными?
12.Как решается уравнение с разделенными переменными?
13.Чем отличается уравнение с разделяющимися переменными от уравнения с разделенными переменными? Как разделяют переменные?
14.Каков алгоритм решения уравнения с разделяющимися переменными?
15.В чем заключается задача Коши? Каков его геометрический смысл?
16.Каков общий вид линейных дифференциальных уравнений первого порядка?

17.Какими величинами являются и от чего зависят коэффициенты p и q в линейном дифференциальном уравнении первого порядка?
18.С помощью какой подстановки решается линейное дифференциальное уравнение первого порядка и к какому уравнению сводится его решение?
19.Какой вид имеет простейшее дифференциальное уравнение второго порядка? Как оно решается?
20.Как определяется и как записывается в общем виде линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами?
21.Что такое характеристическое уравнение?

Тема 4.1. Основные понятия теории комплексных чисел

Подготовить историческую справку об истории возникновения комплексных чисел и о математиках, которые внесли вклад в развитие теории комплексных чисел.

Методические рекомендации по выполнению различных видов самостоятельной работы

1. Как работать с учебной и научной книгой. Методические рекомендации по составлению конспекта.

1) Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта;
2) Выделите главное, составьте план;
3) Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора;
4) Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.
5) Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

Конспект (от лат. *cons-pectum*– обзор, описание) – сложная запись содержания исходного текста, включающая в себя заимствования (цитаты) наиболее примечательных мест в сочетании с планом источника, а также сжатый анализ записанного материала и выводы по нему.

План (от лат. *planum*– плоскость) – первооснова, каркас какой-либо письменной работы, определяющие последовательность изложения материала.

План является наиболее краткой и потому самой доступной и распространенной формой записей содержания исходного источника информации. По существу, это перечень основных вопросов, рассматриваемых в источнике. План может быть простым и развернутым. Их отличие состоит в степени детализации содержания и, соответственно, в объеме.

Преимущество плана состоит в следующем.

Во-первых, план позволяет наилучшим образом уяснить логику мысли автора, упрощает понимание главных моментов произведения.

Во-вторых, план позволяет быстро и глубоко проникнуть в сущность построения произведения и, следовательно, гораздо легче ориентироваться в его содержании.

В-третьих, план позволяет – при последующем возвращении к нему – быстрее обычного вспомнить прочитанное.

В-четвертых, с помощью плана гораздо удобнее отыскивать в источнике нужные места, факты, цитаты и т. д.

<u>Критерии оценки</u> написания ***конспекта первоисточника***:

а) содержательность конспекта, соответствие плану;
б) отражение основных положений, результатов работы
в) автора, выводов;
г) ясность, лаконичность изложения мыслей студента;
д) наличие схем, графическое выделение особо значимой информации;
е) соответствие оформления требованиям;
ж) грамотность изложения;
з) конспект сдан в срок.

<u>Критерии оценки</u> составления ***опорного конспекта***:

а) соответствие содержания теме;
б) правильная структурированность информации;
в) наличие логической связи изложенной информации;
г) соответствие оформления требованиям;
д) аккуратность и грамотность изложения;
е) работа сдана в срок.

<u>Критерии оценки</u> составления ***сводной (обобщающей) таблицы*** по теме:

а) соответствие содержания теме;
б) логичность структуры таблицы;
в) правильный отбор информации;
г) наличие обобщающего (систематизирующего, структурирующего, сравнительного)
д) характера изложения информации;
е) соответствие оформления требованиям;
ж) работа сдана в срок.

2. Методические рекомендации по самостоятельному решению задач.

В первую очередь необходимо обратить внимание на теоретический материал, необходимый при решении задачи, переосмыслить его содержание на практике. Такой методический прием способствует успешному восприятию и осмыслению конкретной задачи, к осознанному применению теории на практике, будет способствовать закреплению ранее изученного материала, приобретенные математические знания станут более прочными.

При решении математической задачи можно выделить следующие этапы:

1) изучение условия задачи;
2) анализ решения задачи (поиск путей решения);
3) выбор оптимального пути решения задачи;
4) решение задачи;
5) исследование полученного результата.

Часто учащиеся опускают последний шаг приведенного алгоритма, что приводит к неверному результату.

При решении задач используются аналитический и синтетический методы.

При аналитическом методе решения задач учащиеся должны четко представлять, что анализ состоит в том, что рассуждения ведутся от искомого к данным. Ведущий вопрос – "Что надо знать, чтобы ответить на главный вопрос задачи?". Проводя анализ задачи, необходимо обращать внимание на то, что иногда условия задачи дают подсказку на очередной ведущий вопрос.

При синтетическом методе решения задач учащиеся должны понимать, что синтетические рассуждения – это рассуждения с последующим переходом (с помощью логических умозаключений) от данных условий задачи к ее заключению. Ведущий вопрос в этом случае – "Что мы можем узнать исходя из данных условий задачи?".

3. Методические рекомендации по подготовке информационного сообщения.

Подготовка информационного сообщения – это вид внеаудиторной самостоятельной работы по подготовке небольшого по объему устного сообщения для озвучивания на семинаре, практическом занятии. Сообщаемая информация носит характер уточнения или обобщения, несет новизну, отражает современный взгляд по определенным проблемам.

Сообщение отличается от докладов и рефератов не только объемом информации, но и ее характером – сообщения дополняют изучаемый вопрос фактическими или статистическими материалами. Оформляется задание письменно, оно может включать элементы наглядности (иллюстрации, демонстрацию).

Деятельность студента при подготовке информационного сообщения:

а) подбор и изучение литературы по теме;
б) составление плана или графической структуры сообщения;
в) выделение основных понятий;
г) введение в текст дополнительных данных, характеризующих объект изучения;
д) оформление текста письменно;
е) предоставление на контроль преподавателю и озвучивание в установленный срок.

<u>Критерии оценивания информационного сообщения:</u>

а) актуальность темы;
б) соответствие содержания теме;
в) глубина проработки материала;
г) грамотность и полнота использования источников;
д) наличие элементов наглядности.

4. Методические рекомендации по составлению презентаций

Требования к презентации

На первом слайде размещается:

название презентации;

автор: ФИО, группа, название учебного учреждения (соавторы указываются в алфавитном порядке);

год.

На втором слайде указывается содержание работы, которое лучше оформить в виде гиперссылок (для интерактивности презентации).

На последнем слайде указывается список используемой литературы в соответствии с требованиями, интернет-ресурсы указываются в последнюю очередь.

Оформление слайдов	
Стиль	необходимо соблюдать единый стиль оформления; нужно избегать стилей, которые будут отвлекать от самой презентации; вспомогательная информация (управляющие кнопки) не должны преобладать над основной информацией (текст, рисунки)
Фон	для фона выбираются более холодные тона (синий или зеленый)
Использование цвета	на одном слайде рекомендуется использовать не более трех цветов: один для фона, один для заголовков, один для текста; для фона и текста используются контрастные цвета; особое внимание следует обратить на цвет гиперссылок (до и после использования)
Анимационные эффекты	нужно использовать возможности компьютерной анимации для представления информации на слайде; не стоит злоупотреблять различными анимационными эффектами; анимационные эффекты не должны отвлекать внимание от содержания информации на слайде
Представление информации	
Содержание информации	следует использовать короткие слова и предложения;

	время глаголов должно быть везде одинаковым; следует использовать минимум предлогов, наречий, прилагательных; заголовки должны привлекать внимание аудитории
Расположение информации на странице	предпочтительно горизонтальное расположение информации; наиболее важная информация должна располагаться в центре экрана; если на слайде располагается картинка, надпись должна располагаться под ней.
Шрифты	для заголовков не менее 24; для остальной информации не менее 18; шрифты без засечек легче читать с большого расстояния; нельзя смешивать разные типы шрифтов в одной презентации; для выделения информации следует использовать жирный шрифт, курсив или подчеркивание того же типа; нельзя злоупотреблять прописными буквами (они читаются хуже, чем строчные).
Способы выделения информации	Следует использовать: рамки, границы, заливку разные цвета шрифтов, штриховку, стрелки рисунки, диаграммы, схемы для иллюстрации наиболее важных фактов
Объем информации	не стоит заполнять один слайд слишком большим объемом информации: люди могут единовременно запомнить не более трех фактов, выводов, определений. наибольшая эффективность достигается тогда, когда ключевые пункты отражаются по одному на каждом отдельном слайде.

Виды слайдов	Для обеспечения разнообразия следует использовать разные виды слайдов: с текстом, с таблицами, с диаграммами.

<u>Критерии оценки</u> создания ***материалов-презентаций***

а) соответствие содержания теме;
б) правильная структурированность информации;
в) наличие логической связи изложенной информации;
г) эстетичность оформления, его соответствие требованиям;
д) работа представлена в срок

5. Методические рекомендации по составлению тестов

Содержание тестового задания должно быть ориентировано на получение от тестируемого однозначного заключения.

Основные термины тестового задания должны быть явно и ясно определены.

Тестовые задания должны быть прагматически корректными и рассчитаны на оценку уровня учебных достижений обучающихся по конкретной области знаний.

Тестовые задания должны формулироваться в виде свернутых кратких суждений.

В содержании тестового задания определяющий признак должен быть необходимым и достаточным.

Следует избегать тестовых заданий, которые требуют от тестируемого развернутых заключений на требования тестовых заданий.

При конструировании тестовых ситуаций можно применять различные формы их представления, а также графические и мультимедийные компоненты с целью рационального предъявления содержания учебного материала.

Количество слов в тестовом задании не должно превышать 10-12, если при этом не искажается понятийная структура тестовой ситуации. Главным считается ясное и явное отражение содержания фрагмента предметной области.

Среднее время заключения обучающегося на тестовое задание не должно превышать 1,5 минуты.

6. Методические рекомендации по написанию письменных, научно - исследовательских работ студентов.

Написание письменных научно - исследовательских работ студентов решает ряд задач:

- обучение студентов самостоятельному поиску и отбору учебной и специальной научной литературы по предмету;
- привитие навыков реферирования научных статей по проблематике изучаемых дисциплин;
- выработка умения подготовки рефератов, докладов, выступлений и сообщений;
- приобретение опыта выступления с докладами на семинарских занятиях;
- систематизация, закрепление и расширение теоретических и практических знаний и навыков по изучаемым дисциплинам;
- приобщение студентов к решению проблемных вопросов по избранной теме работы;
- обучение студентов излагать материал в виде стройной системы теоретических положений, связанных логической последовательностью и подкрепленных примерами из практики.

Реферат

Реферат (от лат. ***refero***– докладываю, сообщаю) – краткое изложение содержания документа или его части, научной работы, включающее основные фактические сведения и выводы, необходимые для первоначального ознакомления с источниками и определения целесообразности обращения к ним.

Современные требования к реферату – точность и объективность в передаче сведений, полнота отображения основных элементов как по содержанию, так и по форме.

Цель реферата - не только сообщить о содержании реферируемой работы, но и дать представление о вновь возникших проблемах соответствующей отрасли науки.

В учебном процессе реферат представляет собой краткое изложение в письменном виде или в форме публичного доклада содержания книги, учения, научного исследования и т.п.

Иначе говоря, это доклад на определенную тему, освещающий её вопросы на основе обзора литературы и других источников.

Основные этапы работы над рефератом

В организационном плане написание реферата - процесс, распределенный во времени по этапам. Все этапы работы могут быть сгруппированы в три основные: подготовительный, исполнительский и заключительный.

Подготовительный этап включает в себя поиски литературы по определенной теме с использованием различных библиографических источников; выбор литературы в конкретной библиотеке; определение круга справочных пособий для последующей работы по теме.

Исполнительский этап включает в себя чтение книг (других источников), ведение записей прочитанного.

Заключительный этап включает в себя обработку имеющихся материалов и написание реферата, составление списка использованной литературы.

Написание реферата. Определен список литературы по теме реферата. Изучена история вопроса по различным источникам, составлены выписки, справки, планы, тезисы, конспекты. Первоначальная задача данного этапа - систематизация и переработка знаний. Систематизировать полученный материал - значит привести его в определенный порядок, который соответствовал бы намеченному плану работы.

Структура реферата

<u>Введение</u>

Введение - это вступительная часть реферата, предваряющая текст.

Оно должно содержать следующие элементы:

а) очень краткий анализ научных, экспериментальных или практических достижений в той области, которой посвящен реферат;

б) общий обзор опубликованных работ, рассматриваемых в реферате;

в) цель данной работы;

г) задачи, требующие решения.

Объем введения при объеме реферата, который мы определили (10-15 страниц), - 1,2 страницы.

Основная часть.

В основной части реферата студент дает письменное изложение материала по предложенному плану, используя материал из источников. В этом разделе работы формулируются основные понятия, их содержание, подходы к анализу, существующие в литературе, точки зрения на суть проблемы, ее характеристики.

В соответствии с поставленной задачей делаются выводы и обобщения. Очень важно не повторять, не копировать стиль источников, а выработать свой собственный, который соответствует характеру реферируемого материала.

Заключение.

Заключение подводит итог работы. Оно может включать повтор основных тезисов работы, чтобы акцентировать на них внимание читателей (слушателей), содержать общий вывод, к которому пришел автор реферата, предложения по дальнейшей научной разработке вопроса и т.п. Здесь уже никакие конкретные случаи, факты, цифры не анализируются.

Заключение по объему, как правило, должно быть меньше введения.

Список использованных источников.

В строго алфавитном порядке размещаются все источники, независимо от формы и содержания: официальные материалы, монографии и энциклопедии, книги и документы, журналы, брошюры и газетные статьи.

Список использованных источников оформляется в той же последовательности, которая указана в требованиях к оформлению рефератов.

Критерии оценки подготовки ***реферата***:

а) актуальность темы;
б) соответствие содержания теме;
в) глубина проработки материала;
г) грамотность и полнота использования источников;
д) соответствие оформления реферата требованиям.