Департамент образования Вологодской области

Бюджетное профессиональное образовательное учреждение Вологодской области

«ВОЛОГОДСКИЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»

Методические указания

по организации практических работ
по учебной дисциплине
«Математика: алгебра и начала анализа, геометрия»

Специальность

21.02.05 Земельно – имущественные отношения.

2017 г.

Рассмотрено и утверждено на заседании предметно-цикловой комиссии общеобразовательных дисциплин

Данные методические указания предназначены для студентов для специальности 21.02.05 Земельно – имущественные отношения БПОУ ВО «Вологодский строительный колледж» при выполнении практических работ.

Объем практической работы по дисциплине составляет 164 часа, из них 24 часа контрольных работ. Перечень практических работ соответствует содержанию программы дисциплины.

Методические рекомендации могут быть рекомендованы к использованию студентами и преподавателями БПОУ ВО «Вологодский строительный колледж».

Автор: Е. А. Севалева, преподаватель математики БПОУ ВО «Вологодский строительный колледж»

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические указания предназначены для студентов и служат пособием при выполнении практических работ, предусмотренных рабочим учебным планом специальности 21.02.05 Земельно – имущественные отношения и запланированных в рабочих программах.

Содержание и объем практических работ по дисциплине «Математика: алгебра и начала анализа, геометрия» соответствует требованиям ФГОС СПО, реализуемого в пределах ОПОП с учетом профиля получаемого профессионального образования.

Практические задания направлены на экспериментальное подтверждение теоретических положений и формирование учебных умений, они составляют важную часть подготовки по освоению дисциплины.

Результат выполнения практических заданий оценивается по пятибалльной системе. Критериями оценки служат отсутствие вычислительных ошибок, правильность выполнения, аккуратность оформления.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ

Приступая к выполнению практической работы, Вы должны внимательно прочитать цель и задачи занятия, ознакомиться с требованиями к уровню Вашей подготовки в соответствии с федеральными государственными стандартами, краткими теоретическими и учебно-методическими материалами по теме практической работы, ответить на вопросы для закрепления теоретического материала.

Все задания к практической работе Вы должны выполнять в соответствии с инструкцией, анализировать полученные в ходе занятия результаты.

Отчет о практической работе Вы должны выполнить по приведенному алгоритму, опираясь на образец.

Наличие положительной оценки по практическим работам необходимо для экзамена по дисциплине «Математика: алгебра и начала анализа, геометрия», поэтому в случае отсутствия на занятие по любой причине или получения неудовлетворительной оценки за практическую работу Вы должны найти время для ее выполнения или пересдачи.

В конце занятия преподаватель выставляет оценку, которая складывается из результатов наблюдения за выполнением практической части работы, проверки отчета, беседы в ходе работы или после нее.

Оценки за выполнение практических занятий выставляется по пятибалльной системе.

Условия и порядок выполнения работы:

1. Прочитать методические рекомендации по выполнению практической работы.
2. Ответить на вопросы, необходимые для выполнения заданий.
3. Изучить содержание заданий и начать выполнение.
4. Работу выполнить в тетрадях, оформив надлежащим образом.
5. Консультацию по выполнению работы получить у преподавателя или обучающегося, успешно выполнившего работу.
6 . Работа оценивается в целом, по итогам выполнения работы выставляется оценка

Пропущенные практические работы отрабатываются в дополнительное время.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

№ п/п	Наименование разделов, тем занятий
	Тема 1. Развитие понятия о числе.
1	Целые и рациональные числа. Действия с числами.
2	Входная контрольная работа за курс основной школы.
3	Рациональные дроби. Иррациональные числа. Множество действительных чисел. Действия с рациональными дробями и иррациональными числами.
4	Приближенные вычисления. Округление чисел. Абсолютная и относительная погрешность приближённого значения числа. Действия с приближенными величинами.
5	Понятие об иррациональных, комплексных числах.
	Тема 2. Показательная и логарифмическая функции.
6	Корень *n*-ой степени и его свойства.
7	Применение свойств корня *n* – ой степени.
8	Решение иррациональных уравнений.
9	Решение систем иррациональных уравнений.
10	Степень с целым и рациональным показателем показателями и её свойства.
11	Преобразование рациональных и иррациональных выражений.
12	Решение примеров. Контрольная работа по теме: ««Свойства корней и степеней».
13	Показательная функция.
14	Показательные уравнения.
15	Решение систем показательных уравнений.
16	Решение показательных уравнений. Решение систем показательных уравнений.
17	Показательные неравенства.
18	Решение показательных неравенств.
19	Логарифмы и их свойства.
20	Применение свойств логарифма.
21	Преобразование логарифмических выражений.
22	Логарифмическая функция.
23	Логарифмические уравнения.
24	Решение логарифмических уравнений.
25	Логарифмических неравенства.
26	Решение логарифмических неравенств.
27	Решение примеров. Контрольная работа по теме: «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства».
	Тема 3. Прямые и плоскости в пространстве.
28	Аксиомы стереометрии. Взаимное расположение прямых в пространстве.
29	Параллельные прямые в пространстве. Признак параллельности прямых.
30	Признак параллельности прямой и плоскости.
31	Признак параллельности плоскостей. Свойства параллельных плоскостей.
32	Признак перпендикулярности прямых. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Свойства перпендикулярных прямой и плоскости.
33	Перпендикуляр и наклонная. Теорема о трех перпендикулярах.
34	Признак перпендикулярности плоскостей. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

35	Изображение пространственных фигур на плоскости. Преобразование симметрии в пространстве. Движение в пространстве.
36	Углы между скрещивающимися прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями.
37	Решение задач. Контрольная работа по теме: «Прямые и плоскости в пространстве».
	Тема 4. Основы тригонометрии.
38	Радианная мера угла. Основные тригонометрические функции. Основные тригонометрические тождества.
39	Формулы приведения.
40	Решение примеров по теме: «Формулы приведения».
41	Формулы сложения.
42	Формулы суммы и разности тригонометрических функций.
43	Формулы двойного и половинного аргумента.
44	Преобразование тригонометрических выражений.
45	Решение примеров на преобразование тригонометрических выражений.
46	Решение примеров. Контрольная работа по теме: «Формулы тригонометрии».
	Тема 5. Координаты и векторы в пространстве.
47	Прямоугольная система координат в пространстве.
48	Решение примеров по теме: «Прямоугольная система координат в пространстве».
49	Параллельный перенос в пространстве.
50	Векторы в пространстве.
51	Действия над векторами в пространстве.
52	Решение задач по теме: «Действия над векторами в пространстве».
53	Уравнения сферы, плоскости и прямой.
54	Решение задач. Контрольная работа по теме: «Координаты и векторы в пространстве».
	Тема 6. Функции, их свойства и графики.
55	Тригонометрические функции и их графики.
56	Преобразование графиков.
57	Преобразование графиков тригонометрических функций.
58	Чётные и нечётные функции. Периодичность тригонометрических функций.
59	Возрастание и убывание функций. Экстремумы функции.
60	Решение задач по теме: «Возрастание и убывание функций. Экстремумы функции».
61	Исследование функций.
62	Исследование тригонометрических функций.
63	Решение примеров. Контрольная работа по теме: «Функции, их свойства и графики».
	Тема 7. Тригонометрические уравнения и неравенства.
64	Обратные тригонометрические функции.
65	Простейшие тригонометрические уравнения.
66	Решение простейших тригонометрических уравнений.
67	Тригонометрические уравнения, приводимые к квадратным уравнениям.
68	Однородные тригонометрические уравнения.
69	Решение систем тригонометрических уравнений.
70	Тригонометрические неравенства.
71	Решение тригонометрических неравенств.

72	Решение примеров. Контрольная работа по теме: «Тригонометрические уравнения и неравенства».
	Тема 8. Многогранники.
73	Многогранники. Призма.
74	Площадь поверхности и объем призмы.
75	Параллелепипед и его виды.
76	Площадь поверхности и объем параллелепипеда.
77	Пирамида. Площадь поверхности и объем пирамиды.
78	Усечённая пирамида. Площадь поверхности и объем усечённой пирамиды.
79	Сечения в кубе, призме, пирамиде.
80	Решение задач. Контрольная работа по теме: «Многогранники».
	Тема 9. Начала математического анализа. Производная функции и её применение.
81	Понятие производной. Правила вычисления производных.
82	Производные степенной, логарифмической функций.
83	Производные тригонометрической функций.
84	Производная сложной функции.
85	Геометрический смысл производной.
86	Уравнение касательной.
87	Механический смысл производной.
88	Признаки возрастания(убывания) функции.
89	Критические точки функции, максимумы и минимумы.
90	Применение производной к исследованию функций.
91	Решение примеров на исследование функций с помощью производной.
92	Решение примеров . Контрольная работа по теме: «Производная функции и её применение».
	Тема 10. Тела и поверхности вращения.
93	Цилиндр. Площадь поверхности и объем цилиндра.
94	Конус. Площадь поверхности и объем конуса.
95	Усечённый конус. Площадь поверхности и объем усечённого конуса.
96	Шар, сечение шара плоскостью. Площадь поверхности и объем шара и его частей.
97	Решение задач. Контрольная работа по теме: «Тела и поверхности вращения».
	Тема 11. Интеграл и его применение.
98	Первообразная и её основное свойство. Таблица первообразных. Правила нахождения первообразных.
99	Нахождение первообразных функций.
100	Определённый интеграл.
101	Вычисление определённого интеграла.
102	Площадь криволинейной трапеции.
103	Нахождение площади криволинейной трапеции с помощью определённого интеграла.
104	Решение примеров. Контрольная работа по теме: «Первообразная и интеграл».
	Тема 11. Комбинаторика.
105	Основные понятия комбинаторики.
106	Правила комбинаторики. Решение комбинаторных задач.
107	Решение комбинаторных задач.
108	Решение задач на перебор вариантов.
109	Формула бинома Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов.

	Треугольник Паскаля.
110	Решение примеров по теме: « Бином Ньютона»
	Тема 13. Элементы теории вероятностей и математической статистики.
111	Событие и его виды. Вероятность события.
112	Сложение и умножение вероятностей.
113	Дискретная случайная величина, закон ее распределения. Числовые характеристики дискретной случайной величины.
114	Представление данных.
115	Решение задач по теме: ««Элементы комбинаторики и теории вероятностей. Математическая статистика».
116	Решение задач. Контрольная работа по теме: ««Элементы комбинаторики и теории вероятностей. Математическая статистика».

ТЕМА 1. РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ О ЧИСЛЕ.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

Тема: Целые и рациональные числа. Действия с числами.

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Систематизировать знания, умения, навыки по теме.

2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- правила действий над обыкновенными дробями;
- правило сокращения дробей;
- формулы сокращенного умножения;
- способы разложения выражения на множители;

2. Выполнить задания практической работы.

3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Задания практической работы.

1. Найдите значение выражения:

а) $\left(6{,}72:\frac{3}{5}+1\frac{1}{8}\cdot 0{,}8\right):1{,}21-8\frac{3}{8}$;

б) $3{,}075:1{,}5-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{25}+3{,}26\right)-1{,}025$;

в) $\left(1{,}6-2\frac{1}{6}-\left(-\frac{41}{90}\right)\right)\cdot\left(-1\frac{3}{5}\right)+0{,}25:(-1{,}25)$;

г) $5\frac{1}{2}\cdot\left(4\frac{3}{20}-6{,}45:3\right)+1\frac{11}{17}\cdot\left(7\frac{5}{6}-3\frac{7}{12}\right)$;

д) $\left(8\frac{7}{15}-3\frac{3}{4}+4\frac{2}{5}-8\frac{7}{60}\right):\left(4\frac{1}{4}-2\frac{3}{4}\right)$;

е) $\dfrac{12\frac{4}{5}\cdot 3\frac{3}{4}-4\frac{4}{11}\cdot 4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3}\cdot 2\frac{4}{7}}+13\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{3}$.

2. Выполните действия:

а) $\dfrac{ab^2-ac^2}{b^2+2dc+c^2}:\dfrac{ab^2-2abc+ac^2}{5b+5c}$; б) $\dfrac{a^2+b^2}{6-6a}:\dfrac{a^4-b^4}{a^2-2a+1}$.

3. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^2-9}{x^2-25}:\dfrac{a^2-3a}{xy+5y}+\dfrac{3-y}{x-5}$; б) $\dfrac{3y-5z}{2x+3y}-\dfrac{6xy-9y^2}{4x^2-10xz}\cdot\dfrac{4x^2-25z^2}{4x^2-9y^2}$.

Задания самостоятельной работы.

1 вариант	**2 вариант**
1. Найдите значение выражения: а) $\left(2{,}314-\frac{1}{4}\right):0{,}02+\left(3\frac{3}{8}+1{,}425\right):6$ **;** б) $\dfrac{4\frac{4}{7}:2-\left(1:\frac{1}{25}-2{,}5:\frac{1}{10}\right)\cdot 8\frac{8}{17}}{1\frac{1}{3}:0{,}5+13\frac{1}{3}}$	**1.** Найдите значение выражения: а) $\dfrac{\left(2{,}4+1\frac{1}{2}\right)\cdot 2{,}5+\left(6\frac{1}{12}:6-1\frac{1}{72}\right):\left(8\frac{5}{7}-1\frac{5}{21}\right)}{54{,}75-4{,}5:0{,}1}$ б) $\left(2\frac{1}{4}-\frac{5}{6}\right):\left(3-\frac{1}{6}\right)+29{,}75:6{,}8-1{,}2:0{,}64$
2. Упростите выражение: $\left(2a-\frac{24ab}{2a+3b}+3b\right)\left(2a+\frac{24ab}{2a-3b}-3b\right)$	**2.** Упростите выражение: $1-\left(\frac{2}{3x-2}-\frac{2}{3x+2}\right)\left(3x-\frac{9x+2}{4}\right)$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

Тема: Действия с рациональными дробями и иррациональными числами.

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Действия с рациональными дробями и иррациональными числами».

2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- формулы сокращенного умножения;
- способы разложения числа на множители;
- свойства арифметического квадратного корня.

2. Выполнить задания практической работы.

3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Задания практической работы.

1. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{1}{15-2\sqrt{50}}+\dfrac{1}{15+2\sqrt{50}}$; б) $\dfrac{5}{4-\sqrt{11}}-\dfrac{4}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}-\dfrac{3}{3+\sqrt{7}}$;

в) $\frac{1}{3}\sqrt{27}\cdot\frac{1}{9}\sqrt{243}$; г) $2\sqrt{32}\cdot\sqrt{216}\cdot 3\sqrt{48}$;

д) $\sqrt{5}\left(3\sqrt{15}-\frac{1}{3}\sqrt{45}\right)$; е) $\dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{60}}-\dfrac{7\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}$; ж) $\dfrac{\sqrt{45}+\sqrt{21}}{\sqrt{15}+\sqrt{7}}$.

2. Сравните значения выражений:

а) $\dfrac{1}{4\sqrt{2}-1}-\dfrac{1}{4\sqrt{2}+1}$ и $\sqrt{0{,}04}$; б) $\dfrac{1}{5-\sqrt{3}}-\dfrac{1}{5+\sqrt{3}}$ и $\sqrt{0{,}16}$.

3. Упростите выражение:

а) $\dfrac{5\sqrt{ab}+b\sqrt{a}-a\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}+\sqrt{a}-\sqrt{b}$; б) $\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}+\dfrac{4x}{4-x}\right):\dfrac{2\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$.

4. Вычислите: а) $(2\sqrt{8}+0{,}5\sqrt{32})-\left(\dfrac{1}{3}\sqrt{18}-\sqrt{50}\right)-\left(8\sqrt{\dfrac{1}{2}}-1\right)$;

б) $(2{,}5\sqrt{98}-2{,}5\sqrt{8})-\left(\dfrac{1}{12}\sqrt{72}+\sqrt{200}\right)-\left(4\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)+3$

Задания самостоятельной работы.

1 вариант	**2 вариант**
1. Найдите значение выражения: а) $\dfrac{2}{5-3\sqrt{15}}+\dfrac{2}{5+3\sqrt{15}}$**;** б) $(\sqrt{6}-\sqrt{72})\cdot\sqrt{3}+6\sqrt{6}$; в) $\dfrac{5\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}-\dfrac{8\sqrt{10}}{5\sqrt{3}}$.	**1.** Найдите значение выражения: а) $\dfrac{3}{7-2\sqrt{10}}+\dfrac{3}{7+2\sqrt{10}}$; б) $\left(5\sqrt{8}-\dfrac{1}{3}\sqrt{10}-2\sqrt{18}\right):\dfrac{1}{3}\sqrt{2}$; в) $\dfrac{\sqrt{70}-\sqrt{30}}{\sqrt{35}-\sqrt{15}}$
2. Найдите значение выражения: а) $2\sqrt{5}-\sqrt{45}+\sqrt{3}$; б) $\dfrac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{24}}$; в) $2\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$	**2.** Найдите значение выражения: а) $2\sqrt{2}-\sqrt{18}+\sqrt{3}$; б) $\dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{20}}$; в) $3\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{10}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

Тема: Входная контрольная работа за курс основной школы.

Время выполнения: 2 ч.

Цель: проконтролировать знания студентов за курс основной школы.

Порядок выполнения работы:

1. Выполнить задания контрольной работы.

1 вариант	**2 вариант**
Задание 1. Вычислите: $\dfrac{3^7}{9^2}\cdot 3^{-2}$. **Задание 2.** Упростите выражение:	**Задание 1.** Вычислите: $\dfrac{4^{10}}{16^3}\cdot 4^{-3}$. **Задание 2.** Упростите выражение:

$\left(\frac{2+a}{a-2}-\frac{a}{a-2}\right):\frac{6a+4}{a^2-4}$. **Задание 3.** Найдите значение выражения: $\sqrt{27\cdot 6\cdot 50}$ **.** **Задание 4.** Решите уравнение: $11-2(7x-3)=9-9x$. **Задание 5.** Из формулы скорости газовых молекул выразите давление газа р: $$V=\sqrt{\frac{3p}{d}}$$ **Задание 6.** Решите систему неравенств: $\begin{cases}2x^2-7x+5\le 0\\ 2-x\succ 0\end{cases}$ **Задание 7.** Из 69 деревьев парка 23 берёзы. Сколько процентов берез в парке? **Задание 8.** Решить графически уравнение $\sqrt{x}=8-1{,}5x$.	$\left(\frac{a+5}{a-5}-\frac{a}{a+5}\right)\div\frac{3a+5}{a+5}$. **Задание 3.** Найдите значение выражения: $\sqrt{32\cdot 6\cdot 27}$ **.** **Задание 4.** Решите уравнение: $2x-3(x+4)=x+12$ **Задание 5.** Из формулы давления газа выразите скорость молекул v: $p=\frac{nmv^2}{3}$ **Задание 6.** Решите систему неравенств: $\begin{cases}2x^2+3x-14\ge 0\\ 3x+11\succ 0\end{cases}$ **Задание 7.** Из 85 деревьев парка 17 рябин. Сколько процентов рябин в парке? **Задание 8.** Решить графически уравнение: $x+1=\frac{2}{x}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

Тема: Приближенные вычисления. Округление чисел. Абсолютная и относительная погрешность приближённого значения числа.

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- понятие верного числа в широком и строгом смыслах;
- формулы абсолютной и относительной погрешностей;

2. Выполнить задания практической работы.

Приближенное значение величины. Абсолютная и относительная погрешности.

Решение практических задач, как правило, связано с числовыми значениями величин. Эти значения получаются либо в результате измерения, либо в результате вычислений. В большинстве случаев значения величин, которыми приходится оперировать, являются приближенными.

Пусть X - точное значение некоторой величины, а x - наилучшее из известных ее приближенных значений. В этом случае погрешность (или ошибка) приближения x определяется разностью X-x. Обычно знак этой ошибки не имеет решающего значения, поэтому рассматривают ее абсолютную величину: $e_x = |X - x|$. (1)

Величина e_x, называемая *абсолютной погрешностью* приближенного значения x, в большинстве случаев остается неизвестной, так как для ее вычисления нужно точное значение X. Вместе с тем, на практике обычно удается установить верхнюю границу абсолютной погрешности, т.е. такое (по возможности наименьшее) число для которого справедливо неравенство $\Delta x \geq |X - x|$. (2)

Число Δx в этом случае называется *предельной абсолютной погрешностью,* или *границей абсолютной погрешности приближения x.*

Таким образом, предельная абсолютная погрешность приближенного числа x - это всякое число Δx, не меньшее абсолютной погрешности e_x этого числа.

Неравенство (2) позволяет установить приближения к точному значению X по недостатку и избытку:

$$x - \Delta x \leq X \leq x + \Delta x, \qquad (3)$$

которые могут рассматриваться как одна из возможных пар значений соответственно нижней границы (НГ) и верхней границы (ВГ) приближения x:

$$НГ_x = x - \Delta x; \;\; ВГ_x = x + \Delta x. \qquad (4)$$

Во многих случаях значения границы абсолютной ошибки Δx, так же как и наилучшие значения приближения x**,** получаются на практике в результате измерений.

<u>*Пример 1:*</u> Пусть, например, в результате повторных измерений одной и той же величины x получены значения: 5,2; 5,3; 5,4; 5,3. В этом случае естественно принять за наилучшее приближение измеряемой величины среднее значение x=5,3. Очевидно также, что граничными значениями величины x в данном случае будут $НГ_X$= 5,2, $ВГ_X$ = 5,4, а граница абсолютной погрешности x может быть определена как половина длины интервала, образуемого граничными значениями $НГ_X$ и $ВГ_X$,

т.е. $x = \dfrac{5{,}4 - 5{,}2}{2} = 0{,}1.$

По абсолютной погрешности нельзя в полной мере судить о точности измерений или вычислений. Качество приближения характеризуется величиной *относительной погрешности,* которая определяется как отношение ошибки e_x к модулю значения X(когда оно неизвестно, то к модулю приближения x).

Предельной относительной погрешностью (или *границей относительной погрешности)* δx приближенного числа называется отношение предельной абсолютной погрешности к абсолютному значению приближения x:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|}. \qquad (5)$$

Формула (5) позволяет при необходимости выражать абсолютную погрешность через относительную:

$$\Delta x = |x| * \delta x. \qquad (6)$$

Относительную погрешность выражают обычно в процентах.

<u>*Пример 2:*</u> Определим предельные погрешности числа x=3,14 как приближенного значения π. Так как π = 3,1415926…., то $\Delta = |\pi\text{-}3{,}14| < 0{,}0015927 < 0{,}0016 = \Delta x$ по формуле связи получаем $\delta x = \dfrac{\Delta x}{|x|} = \dfrac{0{,}0016}{3{,}14} < 0{,}00051$ таким образом $\Delta x = 0{,}0016; \delta x = 0{,}00051 = 0{,}51\%$

Верные и значащие цифры. Запись приближенных значений.

Цифра числа называется *верной* (в широком смысле), если ее абсолютная погрешность не превосходит единицы разряда, в котором стоит эта цифра.

<u>*Пример 3:*</u> А). Пусть a = 2,91385, $\Delta a = 0.0097$. В числе a верны в широком смысле цифры 2, 9, 1.

Б) Возьмем в качестве приближения к числу π = 3,141592... число π' = 3,142. Тогда $|\pi - \pi'| < 0.001 = \Delta\pi'$, (рис.) откуда следует, что в приближенном значении π' = 3,142 все цифры являются верными.

Цифра числа называется *верной в строгом смысле,* если абсолютная погрешность этого числа не превосходит половины единицы разряда, в котором стоит эта цифра.

Вычисление погрешностей арифметических действий.

1. <u>Сложение и вычитание.</u> Предельной абсолютной погрешностью алгебраической суммы является сумма соответствующих погрешностей слагаемых: $\Delta(X+Y) = \Delta X + \Delta Y$
$\Delta(X-Y) = \Delta X + \Delta Y$.

<u>*Пример 4:*</u> Даны приближенные числа X = 34,38 и Y = 15,23 , все цифры верны в строгом смысле. Найти $\Delta(X-Y)$ и $\delta(X-Y)$. По формуле Ф.1 получаем:

$\Delta(X-Y) = 0{,}005 + 0{,}005 = 0{,}01$.

Относительную погрешность получим по формуле связи:

$$\delta(X-Y) = \frac{\Delta(X-Y)}{|X-Y|}; X-Y = 19{,}15 \quad \text{и} \quad \delta(X-Y) = \frac{0{,}01}{19{,}15} \approx 0{,}0005221 \le 0{,}0006 = 6\cdot 10^{-4}$$

2. <u>Умножение и деление.</u> Если $\delta X \ll |X|$ и $\delta Y \ll |Y|$, то имеет место следующая формула:

$\delta(X \cdot Y) = \delta(X/Y) = \delta X + \delta Y$.

<u>*Пример 5:*</u> Найти $\Delta(X\cdot Y)$ и $\delta(X\cdot Y)$ для чисел из предыдущего примера. Сначала с по мощью формулы Ф.2 найдем $\delta(X\cdot Y)$:

$$\delta X = \frac{0{,}005}{34{,}38} = 0{,}00015, \qquad \delta Y = \frac{0{,}005}{15{,}23} = 0{,}00033,$$

$\delta(X\cdot Y) = \delta X + \delta Y = 0{,}00015 + 0{,}00033 = 0{,}00048$

Теперь $\Delta(X\cdot Y)$ найдем с помощью формулы связи:

$\Delta(X\cdot Y) = |X\cdot Y|\cdot\delta(X\cdot Y) = |34{,}38 - 15{,}23|\cdot 0{,}00048 \le 0{,}26$.

3. <u>Возведение в степень и извлечение корня.</u> Если $\delta X \ll |X|$, то справедливы формулы

$$\delta(X^n) = n\cdot\delta X \quad ; \quad \delta(\sqrt[n]{X}) = \frac{\delta X}{n}$$

Задания практической работы.

1) Найдите сумму приближённых значений чисел: а = $6{,}54 \pm 0{,}005$; в = $16{,}022 \pm 0{,}0005$; с = $1{,}9646 \pm 0{,}00005$.
2) Вычислите сумму $a = \sqrt{5} + \sqrt{11}$, взяв приближённые значения корней с точностью до 0,001. Найдите $a, \Delta a, \varepsilon_a$.
3) Вычислите разность чисел 8,72 и 2,6532, границы абсолютных погрешностей которых равны 0,005 и 0,00005 соответственно.
4) Найдите произведение чисел $0{,}456 \pm 0{,}005$ и $3{,}35 \pm 0{,}005$ и относительную погрешность произведения.
5) Диаметр окружности равен $12{,}5 \pm 0{,}05$ (см). Полагая $\pi = 3{,}14$, вычислите длину окружности и найдите границу абсолютной погрешности.
6) Вычислите объём прямоугольного параллелепипеда по формуле $V = abc$, если a = 7,8, $в$ = 4,6, c = 9,3. Сколько верных цифр получится в ответе?
7) Вычислите $X = \dfrac{a}{b + c}$, если $a = 7{,}2 \pm 0{,}05$, $b = 3{,}46 \pm 0{,}03$, $c = 5{,}09 \pm 0{,}04$.
8) Найдите относительную погрешность частного приближенных значений чисел $a = 19{,}8 \pm 0{,}05$ и $в = 48{,}4 \pm 0{,}03$.
9) Найдите верные цифры частного приближенных значений чисел $a = 68{,}4 \pm 0{,}02$ и $в = 72{,}8 \pm 0{,}04$.
10) Найдите относительную погрешность при вычислении объёма куба, если приближённое значение длины ребра куба равно $3{,}8 \pm 0{,}05$.
11) Вычислите границу абсолютной погрешности при нахождении гипотенузы прямоугольного треугольника, катеты которого равны a =56,8 см и $в$ = 44,6 см.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

Тема: Понятие о комплексных числах.

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

2. сформировать умение выполнять арифметические действия с комплексными числами.

Порядок выполнения работы:

1. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов по теме: «Округление чисел. Абсолютная и относительная погрешность приближённого значения числа».

2. Повторить:

- понятие комплексного числа;
- действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

3. Выполнить задания практической работы.

Задания самостоятельной работы.

1 вариант	2 вариант
1. Округлите до первого справа верного разряда приближённое значение числа $2{,}134 \pm 0{,}05$.	1. Округлите до первого справа верного разряда приближённое значение числа $13{,}045 \pm 0{,}002$.
2. Найдите сумму приближённых значений чисел $1{,}268 \pm 0{,}02$ и $13{,}54 \pm 0{,}1$. Результат круглите до первого справа верного разряда.	2. Найдите сумму приближённых значений чисел $15{,}79 \pm 0{,}05$ и $3{,}014 \pm 0{,}1$. Результат круглите до первого справа верного разряда.
3. Какие цифры числа 2,35 (0,3%) являются верными ?	3. Какие цифры числа 1,58 (0,7%) являются верными ?

Теория.

Определение.

Комплексное число – это упорядоченная пара действительных чисел. Пример комплексного числа: (2, 4), это упорядоченная пара действительных чисел. Комплексные числа часто обозначают одной буквой, например, z = (a, b).

Действительное число a называется действительной частью комплексного числа z, действительная часть обозначается a = Re z. Действительное число b называется мнимой частью комплексного числа z, мнимая часть обозначается b = Im z.

Алгебраическая форма записи комплексного числа.

Запись в виде упорядоченных пар не слишком удобна. Общеупотребительной является алгебраическая форма записи. А именно:

$(a, b) = a + b \cdot i = a + bi$

$(1, 12) = 1 + 12 \cdot i = 1 + 12i$

$(-1, -12) = -1 - 12 \cdot i = -1 - 12i$

Знак i называется мнимой единицей и $i = (0, -1)$.

На алгебраическую форму записи распространяется уже известная нам терминология. А именно:

- в алгебраической форме записи комплексного числа a + bi, a называется действительной частью комплексного числа, bi называется мнимой частью комплексного числа.
- мнимая единица i равна корню квадратному из – 1, значит $i^2 = -1$.

Мнимая единица i даёт нам возможность извлекать квадратные корни из отрицательных чисел.

Умножение. Произведением комплексных чисел a + bi и c + di называется комплексное число: $(ac - bd) + (ad + bc)i$.

Это определение вытекает из двух требований:

1) числа a + bi и c + di должны перемножаться, как алгебраические двучлены,

2) число i обладает основным свойством: $i^2 = -1$.

Два комплексных числа a + bi и a – bi называются сопряжёнными комплексными числами.

Найдём произведение $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

Произведение двух сопряжённых комплексных чисел равно действительному положительному числу.

Деление. Разделить комплексное число a + bi (делимое) на другое c + di (делитель) – значит найти третье число e + fi (частное), которое будучи умноженным на делитель c + di, даёт в результате делимое a + bi. Если делитель не равен нулю, деление всегда возможно.

<u>Примеры решения задач по теме «Комплексные числа».</u>

1. Вычислить $(2 – 2i) + (3 + 4i)$.

$(2 – 2i) + (3 + 4i) = 2 + 3 – 2i + 4i = 5 + 2i$

2. Вычислить $(6 – 2i) – (3 – 5i)$.

$(6 – 2i) – (3 – 5i) = 6 – 3 – 2i + 5i = 3 + 3i$

3. Вычислить $(6 – 2i)\cdot(3 – 5i)$.

$(6 – 2i)\cdot(3 – 5i) = 6\cdot3 – 6\cdot5i – 3\cdot2i + 2\cdot5\cdot i^2 = 8 + 36i$

4. Вычислить $(2 – i)\mathbf{:}(3 – i)$.

$$\frac{2-i}{3-i}=\frac{2-i}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i}=\frac{(2-i)(3+i)}{10}=\frac{6+2i-3i+1}{10}=\frac{7-i}{10}=0{,}7-0{,}1i$$

5. Решить уравнение $x^2=-4$.

$x=\pm\sqrt{-4}$

$x=\pm\sqrt{4}\sqrt{-1}$

$x=\pm 2i$

6. Найти действительные числа x и y из уравнения

$(x+1)+(2-y)i=2+4i$

$$\begin{cases}x+1=2\\2-y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$$

7. Найти $(8 + i)\mathbf{:}(2 – 3i)$.

Решение. Перепишем это отношение в виде дроби, умножив её числитель и знаменатель на $2 + 3i$ и выполнив все преобразования, получим:

$$\frac{8+i}{2-3i}=\frac{8+i}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{13+26i}{13}=1+2i$$

Задачи для практической работы.

1. Выполните сложение комплексных чисел, выпишите вещественную и мнимую части полученных комплексных чисел:

а*) (5+3i)+(1+10i); б) (3+i)+(- 3- 8i); в) (- 6+2i)+(- 6 - 2i).*

2. Выполните действия:

а) (2-3i)+(5+6i)+(-3-4i); б) (1-i)-(7-3i)-(2+i)+(6-2i).

3. Выполните умножение комплексных чисел:

а) $(6-3i)\cdot 2i$ *; б)* $\sqrt{5}i\cdot 4\sqrt{5}i$ *; в) (5+3i)(2-5i); г) (3+4i)(3-4i).*

4. Выполните деление комплексных чисел:

а) $\frac{1}{i}$ *; б)* $\frac{1}{1-i}$ *; в)* $\frac{1-i}{1+i}$*; г)* $\frac{3-2i}{1+3i}$.

5. Решите уравнения:

а) $x^2+9=0$; *г)* $x^2+2x+10=0$;

б) $x^2-3x+10=0$; *д)* $x^4+16=0$;

в) $x^2-2x+10=0$; *е)* $x^2+100=0$.

ТЕМА 2. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

Тема: Корень *n*-ой степени и его свойства.

Время выполнения: 2ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Сформировать умение выполнять действия с корнем *n*-ой степени.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- понятие корня *n*-ой;
- свойства корня *n*-ой.

2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Пусть $a\ge 0,\ n\in N.\ n\ne 0$,тогда существует единственное неотрицательное число x такое, что выполняется равенство $x^n=a$. Это число называется *арифметическим корнем n-й степени* из неотрицательного числа и обозначается $\sqrt[n]{a}$. При этом число a называется *подкоренным числом*, а число n - *показателем корня*.

При $k,n\in N,\ n\ne 1,\ k\ne 1$ справедливы следующие *свойства корней*:

1. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ 4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$

2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ 5. $\sqrt[nm]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^k}$

3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}$

Пример 1. Извлечение корня из произведения (вынесение множителя из-под знака корня):

а) $\sqrt[3]{a^3b^9}=\sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{b^9}=ab^3$.

б) $\sqrt[4]{16x^4y}=\sqrt[4]{16}\sqrt[4]{x^4}\sqrt[4]{y}=2x\sqrt[4]{y}=2xy^{\frac{1}{4}}$.

Пример 2. Вычислите:

а) $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^5=\sqrt[3]{(a^2)^5}=\sqrt[3]{a^{10}}$.

б) $\sqrt[8]{x^3}\cdot\sqrt[12]{x^7}=\sqrt[8\cdot3]{x^{3\cdot3}}\cdot\sqrt[12\cdot2]{x^{7\cdot2}}=\sqrt[24]{x^9}\cdot\sqrt[24]{x^{14}}=\sqrt[24]{x^9\cdot x^{14}}=\sqrt[24]{x^{23}}$

в) $\sqrt[5]{y\sqrt[3]{y^2}}:\sqrt[5]{y^3\sqrt{y^4}}=\sqrt[5]{\sqrt[3]{y^3\cdot y^2}}:\sqrt[5]{\sqrt{(y^3)^2\cdot y^4}}=\sqrt[5\cdot3]{y^5}:\sqrt[5\cdot2]{y^6\cdot y^4}=\sqrt[15]{y^5}:\sqrt[10]{y^{12}}=$

$$\sqrt[15]{y^5}:\sqrt[10]{y^{12}}=\sqrt[15\cdot 2]{(y^5)^2}:\sqrt[10\cdot 3]{(y^{12})^3}=\sqrt[30]{y^{10}}:\sqrt[30]{y^{36}}=\frac{\sqrt[30]{y^{10}}}{\sqrt[30]{y^{36}}}=\sqrt[30]{\frac{y^{10}}{y^{36}}}=\sqrt[30]{\frac{1}{y^{26}}}=\frac{1}{\sqrt[30]{y^{26}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[15]{y^{13}}}$$

<u>Пример 3.</u> Упростите выражение $\sqrt[3]{7-\sqrt{48}}\cdot\sqrt[3]{7+\sqrt{48}}$.

Решение:

Запишем все под одним знаком корня третьей степени. Применим формулу разности квадратов двух выражений.

$$\sqrt[3]{7-\sqrt{48}}\cdot\sqrt[3]{7+\sqrt{48}}=\sqrt[3]{(7-\sqrt{48})(7+\sqrt{48})}=\sqrt[3]{7^2-(\sqrt{48})^2}=\sqrt[3]{49-48}=\sqrt[3]{1}=1$$

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 204 : выполнить задания: № 383, 384, 390, 392, 393, 394, 415.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7

Тема: Применение свойств корня n – ой степени.

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Корень n – ой степени.».

2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- понятие корня n-ой;
- свойства корня n-ой.

2 Выполнить задания практической работы.

3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

Пусть $a\ge 0,\quad n\in N.\quad n\ne 0$,тогда существует единственное неотрицательное число x такое, что выполняется равенство $x^n=a$. Это число называется *арифметическим корнем n-й степени* из неотрицательного числа и обозначается $\sqrt[n]{a}$. При этом число a называется *подкоренным числом*, а число n - *показателем корня*.

При $k,n\in N,\ n\ne 1,\ k\ne 1$ справедливы следующие *<u>свойства корней</u>*:

1. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ 4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$

2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ 5. $\sqrt[nm]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^k}$

3. $(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}$

Задания практической работы.

1. Найдите значение выражения:

   а) $\sqrt[3]{-27}$; б) $\sqrt[4]{625}$; в) $\sqrt[7]{-128}$; г) $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$.

2. Решите уравнение:

   а) $x^4=-16$; б) $x^3=125$; в) $x^4=64$; г) $x^5=-\frac{1}{243}$

3. Вычислите: а) $\sqrt[3]{1000\cdot 27\cdot 8}$; б) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$; в) $\sqrt[5]{0{,}4^5\cdot 5^5}$; г) $\frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}}$.

4. Вычислите: а) $\sqrt[3]{64\cdot 125\cdot 729}$; б) $\sqrt[5]{\frac{243}{32}}$; в) $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^6\cdot 12^6}$; г) $\frac{\sqrt[4]{20}}{\sqrt[4]{\frac{5}{4}}}$.

5. Вычислите: а) $\sqrt[4]{0{,}0081\cdot 0{,}0016\cdot 625}$; б) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$; в) $\sqrt[3]{16^3\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^3\cdot 0{,}125}$; г) $\frac{\sqrt[4]{112}}{\sqrt[4]{7}}$.

6. Какое из чисел больше:

   а) $\sqrt[7]{128}$ *или* $\sqrt[5]{4}$; *б)* $\sqrt[8]{26}$ *или* $\sqrt[4]{5}$; *в)* $\sqrt[5]{5}$ *или* $\sqrt[3]{3}$; *г)* $\sqrt[3]{7}$ *или* $\sqrt[6]{50}$.

Задания самостоятельной работы.

Тест по теме: «Корень n – ой степени и его свойства».	
1 вариант	**a. вариант** **b.**
1. Вычислите: $\sqrt{256}+\sqrt[3]{343}$. 1) 21 2) 25 3) 23 4) 32 2. Вычислите: $9\cdot\sqrt[4]{16}-\sqrt[3]{125}:\sqrt[5]{242}$. 1) 3 2) $16\frac{1}{3}$ 3) $16\frac{2}{3}$ 4) $-\frac{49}{3}$ 3. Выполните действия $\left(\sqrt[4]{a^3}\right)^2 : a^{\frac{3}{2}}$. 1) $a^{-\frac{9}{8}}$ 2) 0 3) a^3 4) 1 4. Упростите выражение $\sqrt[3]{16a^2b^3}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}a^4b^9}$ 1) $\frac{2b}{a}$ 2) $2a^2b^4$ 3) $2a^4b^2$ 4) $8a^6b^{12}$ 5. Упростите выражение $\frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}\cdot 8}$. 1) $1\frac{3}{8}$ 2) 40 3) $\frac{5}{8}$ 4) $8\sqrt{5}$ 6. Упростите выражение $\sqrt[3]{4\sqrt{4m^6}}$. 1) $2m^2$ 2) $2m$ 3) $2m^{\frac{1}{2}}$ 4) $2m^3$ 7. Сократите дробь $\frac{\sqrt[6]{y^2}-4}{\sqrt[6]{y}+2}$.	1. Вычислите: $\sqrt{25}+\sqrt[4]{81}$. 1) 14 2) 106 3) 8 4) $\sqrt[4]{66}$ 2. Вычислите: $4\cdot\sqrt{48}+\sqrt{27}:\sqrt[3]{27}$. 1) 29 2) $17\sqrt{3}$ 3) 17 4) $5\sqrt{48}$ 3. Выполните действия $\frac{\sqrt[5]{b^7}\cdot\sqrt[7]{b^{25}}}{\sqrt[7]{b^{11}}}$. 1) $b^{\frac{3}{7}}$ 2) $b^{\frac{32}{11}}$ 3) $b^{\frac{5}{17}}$ 4) $b^{\frac{17}{5}}$ 4. Упростите выражение $\sqrt[3]{\sqrt{729a^{12}}}$. 1) $9a^2$ 2) $3a^4$ 3) $9a^4$ 4) $3a^2$ 5. Упростите выражение $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}\cdot 2}$. 1) $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{1}{6}$ 3) $2\sqrt{3}$ 4) 1,5 6. Упростите выражение $\sqrt[3]{3\sqrt{81t^{12}}}$. 1) $3t^2$ 2) $3m^4$ 3) $9t^2$ 4) $3t^3$ 7. Сократите дробь $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-2\sqrt{ab}+b}$. 1) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ 3) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 4) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

1) $\frac{1}{\sqrt[6]{y}+2}$ 2) $\sqrt[6]{y}+2$ 3) $\frac{1}{\sqrt[6]{y}-2}$ 4) $\sqrt[6]{y}-2$ 8. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[4]{x^3}-25\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}-5\sqrt[4]{x}}$ при $x = 16$. 1) - 3 2) 7 3) 9 4) - 1	8. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[3]{x}-5\sqrt[3]{y}}{25\sqrt[3]{y^2}-\sqrt[3]{x^2}}$ при $x = 8$, $y = 27$. 1) $\frac{1}{17}$ 2) $-\frac{13}{73}$ 3) $\frac{13}{73}$ 4) $-\frac{1}{17}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8

Тема: Решение иррациональных уравнений.

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Решение иррациональных уравнений».

2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- понятие корня n-ой;
- свойства корня n-ой.

2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Иррациональными называют уравнения в которых неизвестная величина находится под знаком корня определенного степени. Простейшие иррациональные уравнения решаются или подъемом в степень или заменой . Сложные иррациональные уравнения сводятся к предыдущим некоторыми искусственными методами **.**

Стоит отметить, что при решении иррациональных уравнений необходимо определять область допустимых значений. Кроме того следует производить проверку, подставляя найденные значения неизвестных в исходное уравнение, поскольку при возведении в степень мы увеличиваем степень уравнения что может привести к появлению посторонних корней.

<u>Пример 1.</u> Найти решение уравнения $\sqrt{3x+7}=4$.

Решение: Находим область допустимых значений $\sqrt{3x+7}\geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{7}{3}$.

Возводим обе части уравнения в квадрат и решаем:

$3x+7=16$

$3x=16-7$

$3x=9$

$x=3$.

Получили решение $x=3$.

<u>Пример 2</u>. Найти решение уравнения $\sqrt{6-2x}=6$.

Решение: ОДЗ для уравнения: $\sqrt{6-2x} \geq 0 \;\Rightarrow\; 6-2x \geq 0 \;\Rightarrow\; x \leq 3, \quad x \in (-\infty; 3]$.

Раскрываем иррациональность уравнения и находим:

$6-2x=36$

$-2x=36-6$

$-2x=30$

$x=-15$

Он принадлежит области допустимых значений , то есть - является решением.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}=1$.

Решение:

Находим область допустимых значений: $\begin{cases}\sqrt{2x+1} \geq 0\\ \sqrt{x} \geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x+1 \geq 0\\ x \geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x \geq -1\\ x \geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x \geq -\dfrac{1}{2}\\ x \geq 0\end{cases}$

ОДЗ: $x \in [0; +\infty)$.

По описанной схеме возводим обе части в квадрат, чтобы избавиться от иррациональности: $2x+1+x-2\sqrt{2x+1}\sqrt{x}=1$.

Переносим все слагаемые кроме корней в правую часть и упрощаем:

$-2\sqrt{2x+1}\sqrt{x}=1-2x-1-x$

$-2\sqrt{2x+1}\sqrt{x}=-3x$

Для раскрытия иррациональности снова выполняем возведения в квадрат и упрощение:

$-2\sqrt{2x+1}\sqrt{x}=-3x$

$4(2x+1)x=9x^2$

$8x^2+4x=9x^2$

$8x^2-9x^2+4x=0$

$-x^2+4x=0$

$x(4-x)=0$

$x=0 \quad 4-x=0$

$x=4$

Оба корня принадлежат области допустимых значений . Эту проверку следует выполнять всегда , иначе получите больше корней чем нужно. Итак, решением будут значения $x=0, \quad x=4$.

Пример 4. Решить уравнение $x-1=\sqrt{2x+6}$.

Решение:

Находим область допустимых значений:

$\begin{cases}\sqrt{2x+6} \geq 0\\ x-1 > 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x+6 \geq 0\\ x > 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2x \geq -6\\ x > 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x \geq -3\\ x > 1\end{cases}$

ОДЗ: $x \in (1; +\infty)$.

По описанной схеме возводим обе части в квадрат, чтобы избавиться от иррациональности:

$(x-1)^2 = 2x+6$

$x^2 - 2x + 1 = 2x + 6$

$x^2 - 4x - 5 = 0$

Решим полученное квадратное уравнение и получим корни $x = -1, \quad x = 5$.

Проверка показывает, что из этих двух чисел корнем данного уравнения является лишь число 5. Число —1 является посторонним корнем.

Ответ. Данное уравнение имеет единственный корень $\boldsymbol{x} = 4$.

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 208 : выполнить задания: № 417 (а, б), 418 (а, б), 419 (а, б), 420 (а, б), 422 (а, б).

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9

Тема: Решение систем иррациональных уравнений.

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Сформировать умение решать системы иррациональных уравнений.

Порядок выполнения работы:

1. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов по теме: «Решение иррациональных уравнений».

2. Повторить:

- понятие корня *n*-ой;
- свойства корня *n*-ой.

3. Выполнить задания практической работы.

Задания самостоятельной работы.

Тест по теме: «Простейшие иррациональные уравнения».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Решите уравнение: $7 - \sqrt{x+1} = 2$. 1) 24 2) -24 3) 26 4) -26 2. Решите уравнение: $\sqrt{6+x} \cdot \sqrt{6-x} = x$ 1) $\pm 3\sqrt{2}$ 2) $3\sqrt{2}$ 3) $-3\sqrt{2}$ 4) 18 3. Решите уравнение: $\sqrt{x^2 - 56} = \sqrt{-x}$. 1) 7; -8 2) -8 3) 7 4) 8; -7 4. Решите уравнение: $\sqrt{2x^2 - 7x + 21} - x = 1$ 1) -5; -4 2) 5; 4 3) -5; 4 4) 5; -4 5. Решите уравнение: $\sqrt{4+x} \cdot \sqrt{5-x} = 2\sqrt{2}$.	1. Решите уравнение: $5 + \sqrt{x-1} = 3$. 1) 3 2) корней нет 3) 5 4) -3 2. Решите уравнение: $\sqrt{7-x} \cdot \sqrt{7+x} = x$. 1) $\pm\frac{7\sqrt{2}}{2}$ 2) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ 3) $-\frac{7\sqrt{2}}{2}$ 4) корней нет 3. Найдите сумму корней уравнения: $\sqrt{x^2+3} - \sqrt{4x} = 0$. 1) 2 2) -2 3) 1 4) 4 4. Решите уравнение: $\sqrt{3x+7} - 3 = x$.

1) -4; 3 2) 4; -3 3) -4 4) 3	1) 1; 2 2) -1; -2 3) -1; 2 4) 1;-2 5. Решите уравнение: $\sqrt{2x-1}+2=x$. 1) 5; 1 2) -5; -1 3) 5 4) 1

Теория.

Решить систему уравнений $\begin{cases} 2\sqrt{x-y}+\sqrt[4]{x+2y}=4 \\ \sqrt{x-y}\cdot\sqrt[4]{x+2y}=2 \end{cases}$

Решение. Чтобы избавиться от иррациональности введем новые переменные. Пусть

$\begin{cases} u=\sqrt{x-y} \\ v=\sqrt[4]{x+2y} \end{cases}$ ……… (1),

тогда первоначальная система примет вид: $\begin{cases} 2u+v=4 \\ uv=2 \end{cases}$.

Решая полученную систему, например методом подстановки находим: $u=1; \quad v=2$.

Подставим найденные значения в систему (1), получим: $\begin{cases} 1=\sqrt{x-y} \\ 2=\sqrt[4]{x+2y} \end{cases}$.

Возведя обе части первого уравнения в квадрат, второго – в четвертую степень, получим систему: $\begin{cases} 1=x-y \\ 16=x+2y \end{cases}$, откуда находим: $x=6; \quad y=5$

Ответ: (6; 5)

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 208 : выполнить задания: № 426 (а, б), 427 (а,б)

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 10

Тема: Степень с целым и рациональным показателем показателями и её свойства.

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Степень с целым и рациональным показателем показателями и её свойства».

2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:
   - понятие степени с целым и рациональным показателем показателями;
   - свойства степени с целым и рациональным показателем показателями.
2. Выполнить задания практической работы.
3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

<u>Степень с рациональным показателем</u>

Пусть $a > 0$, $b > 0$, r, s - любые рациональные числа. Тогда степень с любым рациональным показателем обладает следующими свойствами.

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.
2. $a^r : a^s = a^{r-s}$.
3. $(a^r)^s = a^{rs}$.
4. $a^r \cdot b^r = (ab)^r$.
5. $\dfrac{a^r}{b^r} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^r$.

<u>Пример 1.</u> Сократите дробь $\dfrac{25+5m^{\frac{1}{3}}+m^{\frac{2}{3}}}{25-m} = \dfrac{5^2+5m^{\frac{1}{3}}+(m^{\frac{1}{3}})^2}{5^3-(m^{\frac{1}{3}})^3}$.

Решение:

$$\frac{25+5m^{\frac{1}{3}}+m^{\frac{2}{3}}}{25-m} = \frac{5^2+5m^{\frac{1}{3}}+(m^{\frac{1}{3}})^2}{5^3-(m^{\frac{1}{3}})^3} = \frac{5^2+5m^{\frac{1}{3}}+(m^{\frac{1}{3}})^2}{(5-m^{\frac{1}{3}})(5^2+5m^{\frac{1}{3}}+(m^{\frac{1}{3}})^2)} = \frac{1}{5-m^{\frac{1}{3}}}.$$

<u>Пример 2.</u> Найдите значение выражения $16^{0,5}-\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0,75}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$.

Решение:

$$16^{0,5}-\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} = 16^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}+(-2)^1 = \sqrt{16}-(16)^{\frac{3}{4}}-2 = 4-\sqrt[4]{16^3}-2 =$$

$$= 2-(\sqrt{16})^3 = 2-(2)^3 = 2-8 = -6$$

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 213 : выполнить задания: № 431, 433, 434 (а, б), 437 (а, б).

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Степень с рациональным показателем и её свойства».	
1 вариант	**2 вариант**
1) Вычислите: $\left(64^{\frac{2}{3}}+125^{\frac{1}{3}}-625^{\frac{1}{4}}\right)^{0,5}$.	1) Вычислите: $\left(\left(3^{-\frac{1}{4}}\right)^8+\left(\frac{3}{2}\right)^0\right)^{-2}$.

2) Вычислите: $\dfrac{3\cdot 2^7\cdot 4^5\cdot\left(\dfrac{1}{32}\right)^2+\dfrac{2^5}{4}}{245}$. 3) Вычислите: $\left(6^{2,5}\cdot 36^{-1}\right)^2-\left(5^{\frac{1}{4}}\cdot 25^{\frac{3}{8}}\right)$.	2) Вычислите: $\dfrac{\left(\dfrac{7}{6}\right)^4\cdot 18^8\cdot\dfrac{42^{-3}}{3^5}-6^3}{51}$. 3) Вычислите: $3^{\frac{1}{3}}\cdot 27^{\frac{1}{2}}\cdot 9^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}-\dfrac{2^{\frac{1}{5}}}{(-64)^{\frac{1}{5}}}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 11

Тема: Преобразование рациональных и иррациональных выражений.

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Научиться выполнять преобразование рациональных, иррациональных, степенных выражений с использованием формул сокращенного умножения, основных свойств корней и степеней.

2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- понятие степени с целым и рациональным показателем показателями;
- свойства степени с целым и рациональным показателем показателями.

2 Выполнить задания практической работы.

3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

<u>*Степень с рациональным показателем*</u>

Пусть $a > 0$, $b > 0$, r, s - любые рациональные числа. Тогда степень с любым рациональным показателем обладает следующими свойствами.

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.
2. $a^r : a^s = a^{r-s}$.
3. $(a^r)^s = a^{rs}$.
4. $a^r \cdot b^r = (ab)^r$.
5. $\dfrac{a^r}{b^r} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^r$.

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 214 : выполнить задания: № 435, 438, 439, 441

Задания самостоятельной работы.

1 вариант	2 вариант
1) Вычислите: $(2^{-\frac{1}{2}})^{-6}-(0{,}125)^{-1}+(2^{\frac{1}{2}})^{0}$. 2) Вычислите: $\left((5^{\frac{7}{4}})^{\frac{8}{7}}-\dfrac{(2^{-3})^{-2}}{32}\right)\cdot 46^{-1}$. 3) Вычислите: $\sqrt[3]{\dfrac{12}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{63^2-27^2}{5}}}$. 4) Вычислите: $\sqrt{27+10\sqrt{2}}\cdot\sqrt{27-10\sqrt{2}}$. 5) Вычислите: $(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{28}+\sqrt[3]{16})$. 6) Вычислите значение выражения $\dfrac{\sqrt[3]{n\sqrt{n}}+\sqrt{n\sqrt[3]{n}}}{4n\sqrt{n}\cdot(1+\sqrt[6]{n})}$ *при* $n=\dfrac{5}{64}$.	1) Вычислите: $\left(4\cdot(4^{\frac{3}{2}})^{-\frac{4}{3}}+3\cdot\left(\dfrac{1}{0{,}125}\right)^{-1}\right)^{-1}$ 2) Вычислите: $\dfrac{\left(\dfrac{1}{12}\right)^{2}\cdot 4^{8}\cdot\left(\dfrac{3}{16}\right)^{2}-0{,}1^{-2}}{15\cdot 0{,}5^{-1}}$. 3) Вычислите: $\sqrt{58+\sqrt{\dfrac{44^2-26^2}{35}}}$. 4) Вычислите: $\sqrt{10+\sqrt{19}}\cdot\sqrt{10-\sqrt{19}}$. 5) Вычислите: $\sqrt[3]{\sqrt{91}+3\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{91}-3\sqrt{3}}$. 6) Вычислите значение выражения $(\sqrt[8]{a^2+2a\sqrt{5}+5}+\sqrt[4]{a+\sqrt{5}})\cdot\sqrt[4]{a-\sqrt{5}}$ *при* $a=\sqrt{630}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 12

Тема: Контрольная работа по теме: «Свойства корней и степеней».

Время выполнения: 2 ч.

Цель: проконтролировать знания студентов по теме: «Свойства корней и степеней».

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:
   - понятие степени с целым и рациональным показателем показателями;
   - свойства степени с целым и рациональным показателем показателями.
2. Выполнить задания контрольной работы.

Контрольная работа по теме: «Свойства корней и степеней».	
1 вариант	**2 вариант**
1) Найдите значение выражения: а). $\left(\sqrt[3]{2^2\cdot\sqrt{2}}\right)^{\frac{6}{5}}$; б). $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot(2-\sqrt{3})$; в). $\dfrac{2\sqrt{x}}{x-4}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$ *при* $x=9$. 2) Решите уравнения:	Найдите значение выражения: а) $\left(\sqrt{3^3\cdot\sqrt[3]{3}}\right)^{\frac{3}{5}}$; б) $\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\cdot(1+\sqrt{2})$; в) $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}-3}-\dfrac{6}{x^{\frac{2}{3}}-9}$ *при* $x=8$. 2) Решите уравнения:

а). $(y^2-1)^{\frac{1}{3}}=2$; б). $\sqrt{x+12}=x$; в). $\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{1-3x}=x+5$; г). $x^2+x+2\sqrt{x^2+x}=0$; д). $\sqrt{3+\sqrt{5-x}}=\sqrt{x}$.	а). $(y^2-19)^{\frac{1}{4}}=3$; б). $\sqrt{7-x}=x-1$; в). $\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{1-4x}=x+8$; г). $x^2-3x+2\sqrt{x^2-3x}=0$; д). $\sqrt{1+\sqrt{3x+1}}=\sqrt{x}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 13

Тема: Показательная функция.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Показательная функция и её свойства».

2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить свойства степени с целым и рациональным показателем показателями.

2. Выполнить задания практической работы.

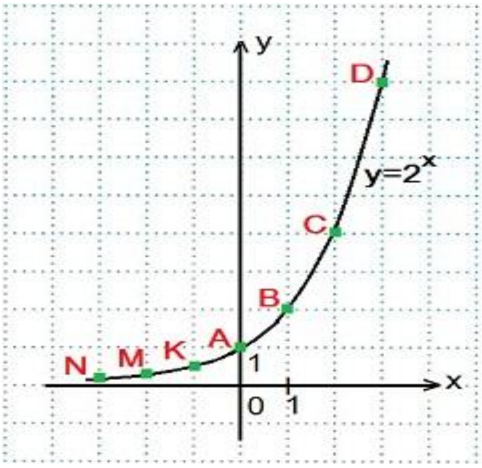
Теория.

- Функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, x – любое число, называют *показательной функцией.*
- Область определения показательной функции: D (y)=R – множество всех действительных чисел.
- Область значений показательной функции: E (y)=R_+ - множество всех положительных чисел.
- Показательная функция $y = a^x$ возрастает при $a > 1$.
- Показательная функция $y = a^x$ убывает при $0 < a < 1$.

Справедливы все свойства степенной функции:

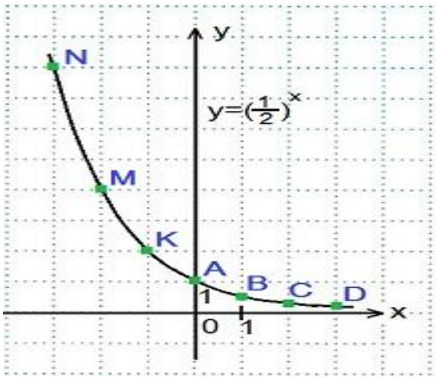
$a^0 = 1$	$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^y$
$a^1 = a$	$(a / b)^x = a^x / b^y$
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$a^{-x} = 1 / a^x$
$a^x : a^y = a^{x-y}$	$(a / b)^{-x} = (b / a)^x$.
$(a^x)^y = a^{xy}$	

Пример 1: Построить график функции $y=2^x$. Найдем значения функции при x = 0, x = ± 1, x = ±2, x = ±3.



Большему значению аргумента x соответствует и большее значение функции y.
Функция $y = 2^x$ возрастает на всей области определения D (y) = R, так как основание функции 2 > 1.

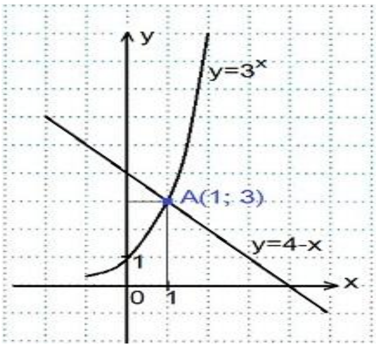
Пример 2: Построить график функции $y=({}^1/_2)^x$. Найдем значения функции при x = 0, x = ± 1, x = ± 2, x = ± 3.



Большему значению аргумента **x** соответствует меньшее значение функции **y**. Функция $y=({}^1/_2)^x$ убывает на всей своей области определения: D (y)=R, так как основание функции $0 < ({}^1/_2) < 1$.

Пример 3: Решить графически уравнение: $3^x = 4 - x$.

Решение: В одной координатной плоскости построим графики функций: $y = 3^x$ и $y = 4 - x$.



Графики пересеклись в точке A(1; 3).

Ответ: 1.

Пример 4: Найти область значений функции: 1) $y = -2^x$; 2) $y = ({}^1/_3)^x + 1$; 3) $y = 3^{x+1} - 5$.

Решение.

1) $y = -2^x$

Область значений показательной функции $y=2^x$ – все положительные числа, т.е. $0 < 2^x < +\infty$. Значит, умножая каждую часть двойного неравенства на (-1), получаем: $-\infty < -2^x < 0$.

Ответ: $E(y) = (-\infty; 0)$.

2) $y = ({}^1/_3)^x + 1$;

$0 < ({}^1/_3)^x < +\infty$, тогда, прибавляя ко всем частям двойного неравенства число **1**, получаем:

$0+1 < ({}^1/_3)^x + 1 < +\infty + 1$;

$1 < ({}^1/_3)^x + 1 < +\infty$.

Ответ: $E(y)=(1; +\infty)$.

3) $y = 3^{x+1} - 5$.

Запишем функцию в виде: y $=3^x \cdot 3 - 5$.

$0 < 3^x < +\infty$;   умножаем все части двойного неравенства на 3:

$0 \cdot 3 < 3^x \cdot 3 < (+\infty) \cdot 3$;

$0 < 3^x \cdot 3 < +\infty$; из всех частей двойного неравенства вычитаем 5:

$0 – 5 < 3^x \cdot 3 – 5 < +\infty - 5$;

$— 5 < 3^x \cdot 3 – 5 < +\infty$.

Ответ: E(y)=(-5; +∞).

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 219 : выполнить задания: № 445, 446, 453, 457

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 14

Тема: Показательные уравнения.

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Показательные уравнения».

2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить свойства показательной функции.

2. Выполнить задания самостоятельной работы.

3. Выполнить задания практической работы.

Задания самостоятельной работы.

1 вариант	2 вариант
Постройте график функции $y = 3^x - 4$	Постройте график функции $y = 2^x + 1$
Решить графически уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 = x^3 + 2$	Решить графически уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^x + 1 = x^2 - 2$
Найдите область значений функции $y = 2^x + 1$	Найдите область значений функции $y = 3^x - 4$

Теория.

<u>Пример 1.</u> Найдите корень уравнения $4^{1-2x} = 64$.

Решение: Необходимо сделать так, чтобы в левой и правой частях были показательные выражения с одним основанием. 64 мы можем представить как 4 в степени 3.

Получим: $4^{1-2x} = 4^3$. Основания равны, можем приравнять показатели:

$1 – 2x = 3$

$– 2x = 2$

$x = -1$

Проверка:

$4^{1-2(-1)} = 64$

$4^{1+2} = 64$

$4^3 = 64$

64 = 64

Ответ: –1

Пример 2. Найдите корень уравнения $3^{x-18} = 1/9$.

Решение:

$$3^{x-18} = \frac{1}{3^2}$$

Известно, что $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$. Значит $3^{x-18} = 3^{-2}$. Основания равны, можем приравнять показатели:

x – 18 = – 2

x = 16

Проверка: $3^{16-18} = 1/9$

$3^{-2} = 1/9$

1/9 = 1/9

Ответ:16

Пример 3. Решите уравнение $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x - 88 = 0$.

Решение: преобразуем уравнение $(2^x)^2 \cdot 2 - 5 \cdot 2^x - 88 = 0$ и используем подстановку $t = 2^x$.

Уравнение тогда принимает вид: $2 \cdot t^2 - 5 \cdot t - 88 = 0$.

Решим полученное квадратное уравнение и получим корни $t_1 = 8, \quad t_2 = -5{,}5$.

Переходя к обратной подстановке, получаем $2^x = 8$ и $2^x = -5{,}5$

Второе уравнение корней не имеет, поскольку показательная функция строго положительна на всей области определения. Решаем второе:

$$2^x = 8 \;\Rightarrow\; 2^x = 2^3 \;\Rightarrow\; x = 3$$

Ответ: $x = 3$.

Пример 4. Решите уравнение $3^x - 3^{x-2} = 24$.

Решение: $3^x - 3^{x-2} = 24$

$$3^x - \frac{3^x}{3^2} = 24$$

$$3^x\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) = 24$$

$$3^x\left(1 - \frac{1}{9}\right) = 24$$

$$3^x \cdot \frac{8}{9} = 24$$

$$3^x = 24 : \frac{8}{9}$$

$$3^x = 24 \cdot \frac{9}{8}$$

$$3^x = 27$$

$$3^x = x^3$$

$$x = 3$$

Ответ: $x = 3$.

Пример 5. Решите уравнение $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

Решение: обе части исходного уравнения можно поделить на $\left(\frac{1}{5}\right)^x$. Данный переход будет являться равносильным, поскольку это выражение больше нуля при любом значении x (показательная функция строго положительна на своей области определения). Тогда уравнение принимает вид:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x : \left(\frac{1}{5}\right)^x = 1$$

$$\left(\frac{1}{4} : \frac{1}{5}\right)^x = 1$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^x = 1$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^x = \left(\frac{5}{4}\right)^0$$

$$x = 0$$

Ответ: $x = 0$.

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 222 : выполнить задания: № 460, 461 (а, в), 463 (а, в), 464 (а, в), 468 (а, в), 469.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 15

Тема: Решение показательных уравнений. Решение систем показательных уравнений.

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Показательные уравнения. Систем показательных уравнений».

2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить способы решения показательных уравнений.

2. Выполнить задания самостоятельной работы.

3. Выполнить задания практической работы.

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Показательные уравнения».	
Вариант	**2 вариант**
Решите уравнения: 1). $3^{x^2-x} = 9$; 2). $2^{x-1} + 2^{x+2} = 36$; 3). $25^x + 10 \cdot 5^{x-1} - 3 = 0$; 4). $2^x \cdot 5^{x+2} = 2500$.	Решите уравнения: 1). $2^{x^2-3x} = \frac{1}{4}$; 2). $5^x - 5^{x-2} = 600$; 3). $9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$; 4). $7^{x+1} \cdot 2^x = 98$.

Теория.

Пример 1: Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ 3^{2x-y} = 3 \end{cases}$.

Решение: $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ 3^{2x-y} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x + 2^{2x-1} = 12 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} 2^x + \frac{1}{2} \cdot 2^{2x} = 12 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \left| \ 2^x = t \ \right| \Rightarrow \begin{cases} t + \frac{1}{2} \cdot t^2 = 12 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 + 2t = 24 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 + 2t - 24 = 0 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

Решим полученное квадратное уравнение и получим $t_1 = -6, \quad t_2 = 4$.

Уравнение замены $2^x = -6$ решений не имеет. Корнем уравнения $2^x = 4$ является число $x = 2$. Если $x = 2$, то $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.

Ответ: (2; 3)

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 223 : выполнить задания: № 465, 471

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 16

Тема: Решение систем показательных уравнений.

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Системы показательных уравнений».

2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить способы решения показательных уравнений.

2. Выполнить задания практической работы.

3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Задания практической работы.

1) а). $2^{3-x} = 16$; б). $3^{4-x} = 27$.

2) а). $\sqrt{17^{x+2}} = 17$; б). $\left(\frac{1}{5\sqrt{5}}\right)^x = \sqrt[3]{5}$.

3) а). $(0{,}125)^{2-\frac{x}{3}} = 16$; б). $4^{2x} \cdot 4^5 = 4^{-3x}$.

4) а). $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{x}{2}}$; б). $\left(\frac{3}{7}\right)^x = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x}{2}}$.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 289 : выполнить задание № 191

Задания самостоятельной работы.

1 вариант.	**2 вариант.**
Решите систему уравнений: $\begin{cases} 3^x + 3^y = 12 \\ 6^{x+y} = 216 \end{cases}$ $\begin{cases} 3^{2y-x} = \dfrac{1}{81} \\ 3^{x-y+2} = 27 \end{cases}$	Решите систему уравнений: 1. $\begin{cases} 3^{x+y} = 128 \\ 5^{3x-2y-3} = 1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{5}\right)^{4x-y} = 25 \\ 7^{9x-y} = 7 \end{cases}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 17

Тема: Показательные неравенства.

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Показательные неравенства».

2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить способы решения показательных уравнений.
2. Выполнить задания практической работы.
3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

Показательными неравенствами называются неравенства вида $a^{f(x)} > a^{q(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

- Показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{q(x)}$ равносильно неравенству того же смысла $f(x) > q(x)$, если $a > 1$;
- Показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{q(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла $f(x) < q(x)$, если $a < 1$

Пример 1: Решите неравенство $7^{2x-9} > 7^{3x-6}$.

Решение: так как основание $a = 7 > 1$, то неравенство равносильно неравенству того же смысла

$7^{2x-9} > 7^{3x-6}$

$2x - 9 > 3x - 6$

$2x - 3x > 9 - 6$

$-x > 3$

$x < -3$

Ответ: $x \in (-\infty; -3)$

Пример 2: Решите неравенство $0{,}5^{7-3x} < 4$.

Решение: преобразуем данное неравенство:

$$0{,}5^{7-3x} < 4$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{7-3x} < 2^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{7-3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

так как основание $a = \frac{1}{2} < 1$, то неравенство равносильно неравенству противоположного смысла $\left(\frac{1}{2}\right)^{7-3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$$7 - 3x < -2$$

$$-3x < -2 - 7$$

$$-3x < -9$$

$$x > 3$$

Ответ: $x \in (3; +\infty)$

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 222 : выполнить задания: № 466, 467(а, в), 472 (а, в), 473 (а, в), 474 (а, в).

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Показательные уравнения и неравенства».	
1 вариант	**2 вариант**
1) Решите неравенство $0{,}3^7 > 0{,}3^{x^2+6x}$. 2) Найдите наибольшее целое решение неравенства $(\sqrt{10}-2)^{x+10} < (\sqrt{10}-2)^{10-x}$ 3) Найдите наименьшее целое число, принадлежащее множеству решений неравенства $2^{x+4} > \frac{1}{32}$. 4) Найдите все значения *x*, при которых значение функции $f(x) = 5^x$ не меньше соответствующего значения функции $q(x) = 5^{x+2}$.	1) Решите неравенство $5^{x^2+10x} > \frac{1}{5^9}$. 2) Найдите наибольшее целое решение неравенства $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2x+3} < \left(\frac{\pi}{2}\right)^{x+1}$ 3) Найдите наибольшее целое число, принадлежащее множеству решений неравенства $3^{2x+1} > \left(\frac{1}{81}\right)^{3-x}$. 4) Найдите все значения *x*, при которых значение функции $f(x) = 3^x$ не меньше соответствующего значения функции $q(x) = 9^x$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 18

Тема: Решение показательных неравенств.

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Показательные неравенства».

2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить способы решения показательных уравнений.

2. Выполнить задания практической работы.

3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

Показательными неравенствами называются неравенства вида $a^{f(x)} > a^{q(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

- Показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{q(x)}$ равносильно неравенству того же смысла $f(x) > q(x)$, если $a > 1$;
- Показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{q(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла $f(x) < q(x)$, если $a < 1$

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 222 : выполнить задания: 472 (б, г), 473 (б, г), 474 (б, г).

1. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

а) $(\sqrt{2}-1)^{2x+5} > (\sqrt{2}-1)^{-x-7}$; б) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{x-1} > \left(\frac{\pi}{3}\right)^{11-2x}$.

2. Найдите наименьшее целое число, принадлежащее множеству решений неравенства:

а) $0{,}2^{3-x} \le \frac{1}{25}$; б) $0{,}25^{x+1{,}5} < 8$.

3. Решите неравенство:

а) $3{,}5^{x^2-5x} > 3{,}5^{-6}$; б) $0{,}9^{x^2+x} \le 0{,}9^{12}$.

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Показательные неравенства».	
1 вариант	**2 вариант.**
Решите неравенство: 1. $5^{-x} \le 625$; 2. $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-1} \ge \frac{3}{4}$;	Решите неравенство: 1. $3^{-x} > 81$; 2. $\left(\frac{5}{7}\right)^{3x+4} \ge \frac{25}{49}$;

3. $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x^2+8x-4} \le 1$; 4. $4^x + 4^{x+1} \ge 5$; 5. $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 \rangle 0$	3. $7^{x^2-2x-8} \ge 1$; 4. $5^x + 5^{x+1} \ge 6$; 5. $4^{2x} - 5 \cdot 4^x + 4 \le 0$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 19

Тема: Логарифмы и их свойства.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме «Логарифмы и их свойства».

2. Сформировать умение вычислять логарифм числа, применять свойства логарифма.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить свойства логарифма.

2 Выполнить задания практической работы.

Теория.

Логарифмом числа *b* по основанию *a* называется такая степень числа *c*, что $a^c = b$. Обозначение: $c = \log_a b$. С помощью математической символики это определение можно выразить так: $\log_a b = c \overset{\text{опр.}}{\Leftrightarrow} a^c = b$.

В выражении $\log_a b$ по определению предполагается, что $a > 0$, $b > 0$, $a \ne 1$. Число *a* называется основанием логарифма, число *b* – под логарифмическим выражением.

Если $a = 10$, то $\log_{10} b$ называется *десятичным логарифмом* и обозначается $\lg x$.

Если $a = e$, то $\log_e b$ называется *натуральным логарифмом* и обозначается $\ln x$.

Свойства логарифмов. (Для любых a; a > 0; a ≠ 1 и для любых x; y > 0).

1. $a^{\log_a b} = b$ - основное логарифмическое тождество
2. $\log_a 1 = 0$
3. $\log_a a = 1$
4. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
5. $\log_a xy = \log_a x - \log_a y$
6. $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$
7. $\log_a x^p = p \log_a x$
8. $\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x, \quad при\ k \ne 0$
9. $\log_a x = \log_{a^c} x^c$
10. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ - формула перехода к новому основанию
11. $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$

Примеры: 1) $\log_6 18 + \log_6 2 = \log_6(18 \cdot 2) = \log_6 36 = 2$

2) $\log_{12}48+\log_{12}4=\log_{12}\left(\frac{48}{4}\right)=\log_{12}12=1$

3) $\frac{\log_3 4}{\log_3 16}=\frac{\log_3 2^2}{\log_3 2^4}=\frac{2\log_3 2}{4\log_3 2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

4) $\frac{2\log_2 3}{\log_4 3}=\frac{2\log_2 3}{\log_{2^2} 3}=\frac{2\log_2 3}{\frac{1}{2}\log_2 3}=4$

5) $\log_5 3=\frac{\log_7 3}{\log_7 5}$

6) $\log_2 7=\frac{1}{\log_7 2}$

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 227 : выполнить задания: № 483, 484, 486, 488, 489, 495, 497, 492.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 20

Тема: Применение свойств логарифма.

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме «Логарифмы и их свойства».
2. Сформировать умение вычислять логарифм числа, применять свойства логарифма.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить свойства логарифма.
2. Выполнить задания практической работы.
3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

Логарифмом числа b по основанию a называется такая степень числа c, что $a^c=b$.

Обозначение: $c=\log_a b$. С помощью математической символики это определение можно выразить так: $\log_a b=c \overset{\text{опр.}}{\Leftrightarrow} a^c=b$.

Свойства логарифмов. (Для любых a; a > 0; a ≠ 1 и для любых x; y > 0).

1. $a^{\log_a b}=b$ - основное логарифмическое тождество
2. $\log_a 1=0$
3. $\log_a a=1$
4. $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$
5. $\log_a xy=\log_a x-\log_a y$
6. $\log_a\frac{1}{x}=-\log_a x$
7. $\log_a x^p=p\log_a x$
8. $\log_{a^k} x=\frac{1}{k}loq_a x,\quad при\ k\neq 0$

9. $log_a x = log_{a^c} x^c$

10. $\log_a x = \dfrac{loq_b x}{loq_b a}$ - формула перехода к новому основанию

11. $\log_a x = \dfrac{1}{loq_x a}$

Задания практической работы.

1. Вычислите:

а) $\log_{81} 13 \cdot \log_{13} 27$; б) $\log_3(\log_2 5 \cdot \log_5 8)$; в) $\log_2 3 \cdot \log_{27} 64$.

2. Найдите значение выражения:

а) $5^{\log_{5\sqrt{5}} 27}$; б) $10^{\lg 3 - \lg 2}$; в) $10^{2-\lg 2} - 25^{\log_5 6}$.

3. Вычислите:

а) $(\log_7(5\sqrt{2}+1)+\log_7(5\sqrt{2}-1)):0{,}5$; б) $\log_2\sqrt{5}+\frac{1}{2}\log_2\frac{4}{5}$;

в) $\log_5 16 - \log_5 4 + \log_5 \frac{25}{4}$.

4. Вычислите:

а) $\log_{\frac{1}{5\sqrt[3]{5}}} 25\sqrt{5}$; б) $\log_{\frac{9}{4}} \frac{2}{9}\sqrt{6}$; в) $\log_{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{9}{16}$.

5. Найдите значение выражения:

а) $\log_3\log_3\log_3 3^{27}$; б) $\log_3 7^{-\log_7 3}$; в) $3(1+9^{\log_3 7})^{\log_{50} 3}$.

6. Вычислите:

а) $\log_5 28 - \frac{3}{2}\log_5\sqrt[3]{49} + 2\log_5 0{,}1$; б) $\frac{7}{5}\log_{\frac{2}{5}}\sqrt[7]{32} - \log_{\frac{2}{5}} 5$; в) $\dfrac{\log_{13} 7 - \log_{13} 14}{\log_{13} 16}$.

7. а) Известно, что $\log_b a = 2$. Найдите $\log_{a^5} b$.

б) Известно, что $\log_b a = 2, \quad \log_a c = 4$. Найдите $\log_{ac} b$.

в) Известно, что $\log_a b = 2, \quad \log_c b = 3$. Найдите $\log_{(ac)^2} b$.

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Логарифм числа и его свойства».	
1 вариант	**3 вариант**
1. Вычислите: а) $\log_{256} 32$; б) $\log_5 625 + \log_2 0{,}5^6$; в) $\left(\log_3 2 + 3\log_3\frac{1}{4}\right):(\log_3 20 - \log_3 5)$; г) $\sqrt{3} + \log_{\sqrt{3}} 54 - \log_{\sqrt{3}} 18\sqrt{3}$; д) $10^{4-3\lg 5}$.	1. Вычислите: а) $\log_4 32 + 0{,}5$; б) $\left(\frac{1}{10}\right)^{\lg 5 - 2}$; в) $\log_{\frac{1}{3}}\log_3 27$; г) $\log_5 23 + \log_5\frac{10}{23} + \log_5 12{,}5$; д) $\frac{2}{15}(1+4^{\log_2 8})^{\log_{65} 15}$.

2. Сократите дробь $\frac{\log_{12} 3}{\log_{\sqrt{12}} 9}$. 3. Известно, что $\log_5 2 = a, \quad \log_5 3 = b$. Найдите $\log_5 150$. 4. найдите число z его логарифму: $\log_{61} z = \log_{61} \lg 1000 + \log_{61} 17$.	2. Сократите дробь $\frac{\log_3 18}{\log_2 3}$. 3. Известно, что $\log_2 3 = a$. Найдите $\log_{\sqrt{3}} 8$. 4. Найдите число z его логарифму: $\log_{23} z = \log_{23} \lg 100 + \log_{23} \frac{1}{2}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 21

Тема: Преобразование логарифмических выражений.

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме «Логарифмы и их свойства».
2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить свойства логарифма.

2 Выполнить задания практической работы.

3 Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

Логарифмом числа *b* по основанию *a* называется такая степень числа *c*, что $a^c = b$.
Обозначение: $c = \log_a b$. С помощью математической символики это определение можно выразить так: $\log_a b = c \overset{\text{опр.}}{\Leftrightarrow} a^c = b$.

Свойства логарифмов. (Для любых a; a > 0; a ≠ 1 и для любых x; y > 0).

1. $a^{\log_a b} = b$ - основное логарифмическое тождество
2. $\log_a 1 = 0$
3. $\log_a a = 1$
4. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
5. $\log_a xy = \log_a x - \log_a y$
6. $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$
7. $\log_a x^p = p \log_a x$
8. $\log_{a^k} x = \frac{1}{k} loq_a x, \quad при\ k \neq 0$
9. $\log_a x = \log_{a^c} x^c$
10. $\log_a x = \frac{loq_b x}{loq_b a}$ - формула перехода к новому основанию
11. $\log_a x = \frac{1}{loq_x a}$

Задания практической работы.

1. Вычислите: а) $\log_2 5 \cdot \log_{25} 8$; б) $\log_{13} 128 \cdot \log_{32} 13$.

2. Найдите значение выражения: а) $\log_2 \log_3 \sqrt[16]{3}$; б) $\log_{\sqrt[3]{3}} \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$.

3. Вычислите: а) $\log_{\frac{1}{5}}(3\sqrt{3}+\sqrt{2})+\log_{\frac{1}{5}}(3\sqrt{3}-\sqrt{2})$;

б) $\log_2(\sqrt{3}+2)-2\log_2(\sqrt{3}+1)$.

4. Вычислите: а) $\log_{4\sqrt[4]{2}} 16\sqrt{2}$; б) $\log_{\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}} 9$.

5. Найдите значение выражения: а) $121^{0,5\log_{11}0,25}$; б) $2^{2-\log_2 5}+\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 5}$.

6. Вычислите: а) $\log_2(\log_3 2,25+\log_3\log_2 16)$; б) $\log_5\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\log_9\sqrt{5}$.

7. а) Известно, что $\log_b a=2$. Найдите $\log_a b^3$. б) Известно, что $\log_b a=2$. Найдите $\log_{a^4} b$.

Задания самостоятельной работы.

Тест по теме: «Преобразования логарифмических выражений».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Вычислите: $\log_2 20-\log_2\frac{5}{16}$. 1) 2,5 2) 5 3) 6 4) 8 2. Упростите: $2^{\log_2 7}\cdot(0,5)^{\log_{0,5}2}$. 1) 3,5 2) 7 2) 3) 14 4) - 3,5 3. Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{3}}a$, если $\log_3\frac{1}{\sqrt{a}}=9$. 1) 18 2) - 27 2) 3) 4,5 4) - 3 4. Упростите выражение: $n^2\cdot n^{5\log_n\sqrt{n}}$. 1) n^5 2) $n^{4,5}$ 2) 3) $n^{7,5}$ 4) $n^{10,5}$ 5. Вычислите: $\log_6 7\cdot\log_{49}8-\log_3\sqrt[7]{3}$. 1) $\frac{13}{7}$ 2) 1 2) 3) $\frac{1}{7}$ 4) $\frac{5}{14}$ 6. Вычислите: $\sqrt{3^{4+\log_3 4}}$.	1. Вычислите: $\log_3 6-\log_3\frac{2}{27}$. 1) 2 2) 3 3) 4 4) - 2 2. Упростите: $(0,2)^{-1+\log_5 0,2}$. 1) 0,2 2) 1 3) 5 4) 25 3. Найдите значение выражения $\log_{0,5}c$, если $\log_2\sqrt[8]{c}=4$. 1) - 2 2) 8 3) 16 4) - 32 4. Упростите выражение: $b^2\cdot b^{-4\log_{b^4}b^2}$ 1) b^{-6} 2) b^{-4} 3) 1 4) b^4 5. Вычислите: $\log_3 9\cdot\log_{27}3+\log_2\sqrt[5]{2}$. 1) $\frac{13}{15}$ 2) 3.2 3) $\frac{8}{15}$ 4) 2.2 6. Вычислите: $\sqrt{8^{2-\log_{\frac{1}{3}}9}}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 22

Тема: Логарифмическая функция.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме «Логарифмическая функция».

2. Сформировать навык построения графика логарифмической функции.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить свойства логарифмической функции.

2. Выполнить задания практической работы.

3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

Функцию вида $y = \log_a(x)$, где *a* любое положительное число не равное единице, называют логарифмической функцией с основанием *a*.

Основные свойства логарифмической функции:

1. Областью определения логарифмической функции будет являться все множество положительных вещественных чисел. Для краткости его еще обозначают R+.

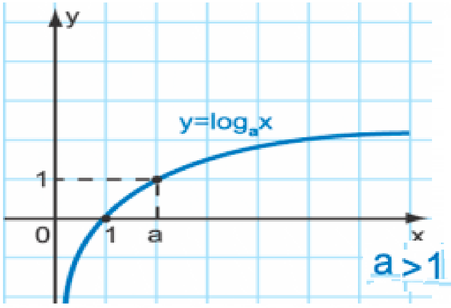
2. Областью значения логарифмической функции будет являться все множество вещественных чисел.

3. Если основание логарифмической функции a > 1, то на всей области определения функции возрастает. Если для основания логарифмической функции выполняется следующее неравенство 0 < *a*.

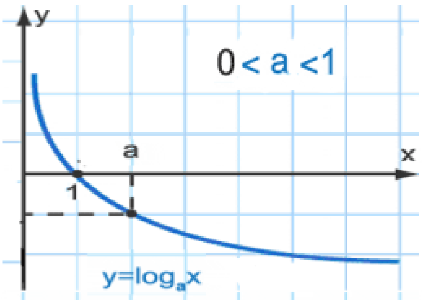
4. График логарифмической функции всегда проходит через точку (1;0).

5. Возрастающая логарифмическая функция, будет положительной при x > 1, и отрицательной при 0 < x < 1.

6.



На рисунке представлен график возрастающей логарифмической функции - (*a* > 1)



На рисунке представлен график убывающей логарифмической функции - (0 < *a* < 1)

7. Функция не является четной или нечетной. Логарифмическая функция – функция общего вида.

8. Функция не имеет точек максимума и минимума.

Пример 1: Сравнить числа $loq_{11}110$ и $loq_{13}180$.

Решение. Используем тот факт, что логарифмические функции с основанием 11 и 13 монотонно возрастают. Поэтому

$$loq_{11}110 \langle\, loq_{11}121 = loq_{11}11^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad loq_{11}110 \langle\, 2$$

$$loq_{13}180 \rangle\, loq_{13}169 = loq_{13}13^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad loq_{13}180 \rangle\, 2$$

Тогда $loq_{11}110 \langle\, loq_{13}180$

Пример 2: Сравнить числа $loq_2 3$ и $loq_3 7$.

Решение: Используем тот факт, что логарифмические функции с основанием 2 и 3 монотонно возрастают. Поэтому, умножив оба логарифма на 3, получим:

$$3loq_2 3 = loq_2 3^3 = loq_2 27 < loq_2 32 = loq_2 2^5 = 5 \quad \Rightarrow \quad loq_2 3 < 5$$

$$3loq_3 7 = loq_3 7^3 = loq_3 343 > loq_3 243 = loq_3 3^5 = 5 \quad \Rightarrow \quad loq_3 7 > 5$$

$$loq_2 3 < loq_3 7$$

Пример 3: Найдите область определения функции $loq_a(x^2 - 16)$.

Решение:

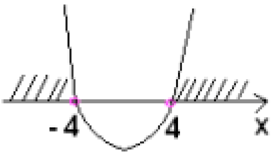
$loq_a(x^2 - 16)$

$x^2 - 16 > 0$

$y = x^2 - 16$

$x^2 - 16 = 0$

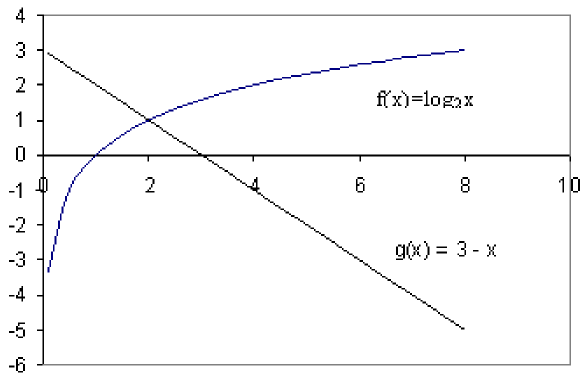
$x_1 = -4;\ x_2 = 4$



Решением данного неравенства есть множество точек $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$

Пример 4: Решить графически уравнение: $loq_2 x = 3 - x$.

Решение:



построим по точкам графики двух функций $y = loq_2 x$ и $y = 3 - x$ и найдём абсциссу точек пересечения графиков.

Ответ: $x = 2$

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 231 : выполнить задания: № 499 (а; б), 500 (а; б), 501, 503, 505, 507(а; б).

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Логарифмическая функция».	
1 вариант	**2 вариант**
1.Построить график функции $y = \log_3 x$. 2.Решить графически уравнение $\log_2 x = x + 1$ 3.Найти область определения функции $y = \log_{\frac{1}{2}}(-x) + 2$.	1.Построить график функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. 2.Решить графически уравнение $\log_2 x = 2 - x$ 3.Найти область определения функции $y = \log_4 x + 1$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 23

Тема: Логарифмические уравнения.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Логарифмические уравнения».

2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить свойства логарифмической функции.

2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Пример 1. Решить уравнение: $\log_4(x+3) = 3$

Решение:

Для того, чтобы решить уравнение достаточно вспомнить определение логарифма: из равенства $\log_b a = c$ следует $b^c = a$.

Применим его: $4^3 = x+3$

$$64 = x+3$$

$$x = 64-3$$

$$x = 61$$

Замечание: единственное ограничение, которое накладывается на значение переменной: аргумент логарифма должен быть больше нуля, т.е. $x+3 \rangle 0 \;\Rightarrow\; x \rangle -3$. Полученное значение $x = 61$ подходит.

Ответ: $x = 61$

Пример 2. Решить уравнение $\log_2(5-6x) = \log_2 5 + \log_2 6$.

Решение: используя свойство логарифма, преобразуем правую часть уравнения:

$\log_a b + \log_a c = \log_a b \cdot c$.

Получим:

$$\log_2(5-6x) = \log_2 5 + \log_2 6$$

$$\log_2(5-6x) = \log_2 5 \cdot 6$$

$$\log_2(5-6x) = \log_2 30$$

$$\begin{cases} 5-6x \rangle 0 \\ 5-6x = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x \rangle -5 \\ -6x = 30-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \langle -\dfrac{5}{6} \\ -6x = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \langle -\dfrac{5}{6} \\ x = -\dfrac{25}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \langle -\dfrac{5}{6} \\ x = -4\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Корень $x = -4\frac{1}{6}$ удовлетворяет неравенству, следовательно, является ответом.

Ответ: $x = -4\frac{1}{6}$

Пример 3. Решить уравнение $\log_5(2x+3) = \log_5(x+1)$.

Решение: Это уравнение определено для тех значений *x,* при которых выполнены неравенства:

$$\begin{cases} 2x+3 \rangle 0 \\ x+1 \rangle 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \rangle -3 \\ x \rangle -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \rangle -1{,}5 \\ x \rangle -1 \end{cases}$$

Для этих x данное уравнение равносильно уравнению $2x+3=x+1$

$$2x-x=1-3$$

$$x=-2$$

Число x = - 2 не удовлетворяет неравенствам, следовательно, данное уравнение решений не имеет.

Ответ: решений нет.

<u>*Пример 4.*</u> Решить уравнение $\log_4(2x-1)=2+\log_4(x-2)$.

Решение:

Преобразуем правую часть уравнения, заменив число 2: $2=\log_4 4^2=\log_4 16$

и применив свойство логарифма: $\log_4(2x-1)=\log_4 16+\log_4(x-2)$

$$\log_4(2x-1)=\log_4 16\cdot(x-2)$$

$$\log_4(2x-1)=\log_4(16x-32)$$

Это уравнение определено для тех значений *x,* при которых выполнены неравенства:

$$\begin{cases}2x-1\rangle 0\\16x-32\rangle 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x\rangle 1\\16x\rangle 32\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\rangle 0{,}5\\x\rangle 2\end{cases}$$

Для этих x данное уравнение равносильно уравнению

$$2x-1=16x-32$$

$$2x-16x=1-32$$

$$-14x=-31$$

$$x=\frac{31}{14}$$

$$x=2\frac{3}{14}$$

Число $x=2\frac{3}{14}$ удовлетворяет обоим неравенствам, следовательно, является решением данного уравнения.

Ответ: $x=2\frac{3}{14}$

<u>*Пример 5.*</u> Решить уравнение $17^{\log_{17}(3x+5)}=14$.

Решение: Преобразуем правую часть уравнения, используя основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b}=b$.

Получим:

$$17^{\log_{17}(3x+5)}=14$$

$$3x+5\ =14$$

$$3x=14-5$$

$$3x=9$$

$$x=3$$

Помним, что аргумент логарифма должен быть больше нуля,

т.е. $3x+5\rangle 0\ \Rightarrow\ 3x\rangle -5\Rightarrow x\rangle -\frac{5}{3}\Rightarrow x\rangle -1\frac{2}{3}$. Полученное значение x = 3 подходит.

Ответ: x = 3.

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 235 : выполнить задания: № 514 (а, б), 519 (а, б), 520 (а, б), 518 (б,г).

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 24

Тема: Решение логарифмических уравнений.

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Решение логарифмических уравнений».

2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- Свойства логарифма.
- Способы решения логарифмических уравнений.

2 Выполнить задания практической работы.

3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Задания практической работы.

1. Решите уравнения:

а) $\log_5(x+60)=1$; б) $\log_7(4x+3)=\log_7(x+6)$;

в) $\log_8(2x+62)=2+\log_8 x$; г) $\log_2(5-6x)=\log_2 5+\log_2 6$;

д) $17^{\log_{17}(5x-2)}=8$;

2. Найдите наибольший корень уравнения $\ln(x^2+2x)=\ln(12-2x)$.

3. Пусть x_0 - наибольший корень уравнения $\lg(2x^2-5x)=\lg(15x-42)$.

Найдите $7-\frac{1}{7}x_0$.

4. Найдите сумму абсцисс общих точек графиков функций $f(x)=13^{\log_{13}(x-7)}$, $g(x)=x^2-14x+49$.

Задания самостоятельной работы.

Тест по теме: «Простейшие логарифмические уравнения».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Решите уравнение: $\log_3\ x-2\ \ =2.$ 1) 10 2) 8 3) 4 4) 11 2. Решите уравнение: $\log_3\ 2x-4\ \ =$ $\log_3(x+7).$ 1) 2 2) - 7 3) 11 4) 1 3. Решите уравнение: $0{,}1^{\log_{0,1}(3x-1)}=2.$ 1) 2 2) 3 3) 0 4) 1 4. Решите уравнение: $\log_4\ x-3\ \ -1=$	1. Решите уравнение: $\log_2\ x-3\ \ =2.$ 1) 7 2) 3 3) 11 4) 4 2. Решите уравнение: $\log_4\ 2x-1\ \ =$ $\log_4(3x-3).$ 1) 4 2) 0,5 3) 1 4) 2 3. Решите уравнение: $0{,}8^{\log_{0,8}(5x-1)}=4.$ 1) 4 2) 1 3) 0,8 4) - 1 4. Решите уравнение: $\log_{\frac{\ }{3}}\ x-2\ \ +2=$

$\log_4(x-6)$. 1) 4 2) 2 3) 7 4) 5 5. Укажите промежуток, содержащий корень уравнения $\log_\pi 13 - \log_\pi\ x - 2\ = \log_\pi 2$. 1) $1; 8$ 2) $-3; 0$ 3) $0{,}5;\ 8{,}5$ 4) $9;\ 10{,}5$ 6. Найдите сумму корней уравнения $\frac{5}{2}\log_3 x + \log_9 x = 3$. 1) 9 2) 1 3) 2 4) 3 7. Какому промежутку принадлежит произведение корней уравнения $\lg\ x^2 - 4x + 10\ = \lg(14x - x^2 - 30)$? 1) $-40; -20$ 2) $-20; 0$ 3) $19; 20$ 4) $40; 60$	$\log_{\overline{3}} x$. 1) $\overline{3}$ 2) 3 3) 9 4) 2 5. Укажите промежуток, содержащий корень уравнения $\log\ x^2 - 1\ = 1$. 1) $-\infty; -3$ 2) $-2; 2$ 3) $0; 2$ 4) $4; 10$ 6. Найдите сумму корней уравнения $\frac{7}{2}\log_2 x + \log_4 x = 4$. 1) 2 2) 1 3) 4 4) 5 7. Какому промежутку принадлежит сумма всех различных корней уравнения $x^2 - 6 = 2^{\log_2(6-x)}$? 1) $-9; -1$ 2) $-1; 3$ 3) $4; 7$ 4) $13; 15$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 25

Тема: Логарифмические неравенства.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Логарифмические неравенства».

2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить свойства логарифмической функции.
2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

<u>Пример 1.</u> Решите неравенство $\log_3(5-2x) \rangle -2$.

Решение: Согласно методике решения простейших логарифмических неравенств, первым действием необходимо уравнять основания логарифмов, в данном случае представить правую часть в виде логарифма с требуемым основанием: $-2 = loq_3 3^{-2} = loq_3 \frac{1}{9}$

Получаем неравенство: $\log_3(5-2x) \rangle loq_3 \frac{1}{9}$

Поскольку основание логарифма больше единицы, в эквивалентной системе знак неравенства сохранится:

$$\begin{cases} 5 - 2x > \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x > \frac{1}{9} - 5 \\ \frac{1}{9} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x < \frac{44}{9} \\ \frac{1}{9} > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < \frac{22}{9} \\ \frac{1}{9} > 0 \end{cases}$$

Ответ: $x \in \left(2\frac{4}{9}; +\infty\right)$

Пример 2. Решите неравенство $\log_{\pi}(x+1) + loq_{\pi} x \leq \ loq_{\pi} 2$

Решение:

Используя свойство логарифма, преобразуем левую часть неравенства:

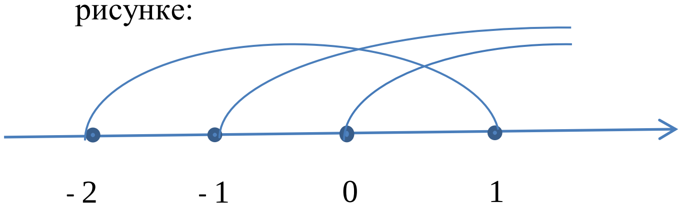
$\log_{\pi}(x+1) \cdot x \leq \ loq_{\pi} 2$

$\log_{\pi}(x^2 + x) \ \leq \ loq_{\pi} 2$

Поскольку основание логарифма больше единицы, в эквивалентной системе знак неравенства сохранится и, с учетом ОДЗ, получим систему:

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x > 0 \\ x^2 + x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 0 \\ x^2 + x - 2 \leq 0 \end{cases}$$

Корни квадратного уравнения, стоящего в левой части, согласно теореме Виета $x_1 = -2, \quad x_2 = 1$. Имеем параболу, ветви которой направлены вверх. Интересующие нас значения находятся между корней уравнения $x \in [-2; 1]$. Решение системы показано на рисунке:



Ответ: $x \in (0;1]$

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 235 : выполнить задания: № 516 (а, б), 517, 525 (а, б), 526 (а, б), 527 (а, б).

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 26

Тема: Решение логарифмических неравенств.

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Решение логарифмических неравенств».

2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- Свойства логарифма.
- Способы решения логарифмических неравенств.

2 Выполнить задания практической работы.

3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Задания практической работы.

1. Решите неравенство: $\log_4 x \ \leq \ 1.$

2. Укажите множество решений неравенства: $\log_{\frac{1}{5}} x \rangle -2$.

3. Укажите множество решений неравенства: $\log_{0,2} \frac{x}{7} \langle\ 0$.

4. Найдите наибольшее целое *x*, при котором выполняется неравенство $\log_{8,1} x \rangle \log_{8,1}(5x-8)$.

5. Найдите наименьшее целое *x*, при котором выполняется неравенство $\log_3(16-12x) \le \log_3 4x$.

6. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\log_{0,4}(3{,}5x-0{,}5)}$.

7. При каких значениях *x* график функции $y = \log_{\sqrt{2}}(5x-3)$ лежит ниже прямой $y = 4$?

8. При каких значениях *x* точки графика функции $y = \ln(4x-1)$ лежат не ниже точек графика функции $y = \ln(2x+1)$?

Задания самостоятельной работы.

Тест по теме: «Логарифмические неравенства».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Решите неравенство: $\log_2 x \le 4$. 1) $[16; +\infty)$ 2) $(-\infty; 16]$ 3) $(0; 16]$ 4) $[0; 16]$ Укажите множество решений неравенства: $\log_{0,1} x \rangle -\frac{1}{2}$. 1) $(0; \sqrt{10})$ 2) $(0; +\infty)$ 3) $(-\infty; \sqrt{10})$ 4) $(-\infty; \frac{1}{\sqrt{10}})$ Найдите наибольшее целое *x*, при котором выполняется неравенство $\log_4 x \rangle \log_4(3x-4)$. 1) 0 2) 1 3) 4 4) таких *x* нет Найдите наименьшее целое *x*, при котором выполняется неравенство $\log_2(8-6x) \le \log_2 2x$. 1) 2 2) -1 3) 1 4) 0 Найдите область определения функции $y = \sqrt{\log_7(x^2+1{,}5x)}$. 1) $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ 2) (-2; 0,5)	1. Решите неравенство: $\log_3 x \le 2$. 1) $(0; 2]$ 2) $(0; 9]$ 3) $(0; 8]$ 4) $(-\infty; 9]$ 2. Укажите множество решений неравенства: $\log_{0,2} x \rangle -1$. 1) $(0; 5)$ 2) $(5; +\infty)$ 3) $(-\infty; 5)$ 4) $(-\infty; 0{,}2)$ 3. Найдите наименьшее целое *x*, при котором выполняется неравенство $\log_{\frac{1}{4}} x \rangle \log_{\frac{1}{4}}(5x-4)$. 1) 1 2) 0 3) 2 4) 3 4. Найдите наименьшее целое *x*, при котором выполняется неравенство $\log_3(x-1) \ge 1+\log_3 2$. 1) 7 2) 1 3) 6 4) 8 5. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\log_6(4x+1)}$. 1) $\left(\frac{1}{2}; 6\right)$ 2) $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ 3) $[0; +\infty)$ 4) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$

3) $(-\infty; -2)$ 4) $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ При каких значениях x график функции $y=\log_{\sqrt{3}}(2x-3)$ лежит ниже прямой $y=4$? 1) $(1{,}5;\ 6)$ 2) $(0;\ 6)$ 3) $(6; +\infty)$ 4) $(-\infty; 1{,}5)$	6. При каких значениях x график функци $y=\log_{0,3}(2x-3)$ лежит выше прямой $y=1$ 1) $\left(\frac{17}{30}; \frac{2}{3}\right)$ 2) $\left(\frac{17}{30}; +\infty\right)$ 3) $\left(-\infty; \frac{17}{30}\right)$ 4) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 27

Тема: Контрольная работа по теме: «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства».

Время выполнения: 2 ч.

Цель: проконтролировать знания студентов по теме: «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства».

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:
   - логарифм числа и его свойства;
   - способы решения показательных и логарифмических уравнений и неравенств.
2. Выполнить задания контрольной работы.

Контрольная работа по теме: «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Найдите значение выражения а). $\log_3 27 - \log_{\frac{1}{7}} 7$; б) $2^{1+\log_2 5}$; в). $2\cdot loq_5 \frac{1}{5} + \frac{1}{2} loq_6 36 - \frac{1}{3} loq_5 125$. 2. Решите уравнения : а). $3^{x^2-x}=9$ б). $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{2}\right)^4$; в) $2^x \cdot 5^{x+2} = 2500$; г). $2^{x-1}+2^{x+2}=36$; д). $loq_{\frac{1}{5}}(2x-3)=-1$; е). $2\log_3 x = \log_3(2x^2-x)$. 3. Решите неравенства : а). $5^{1-2x} \le \frac{1}{125}$; б). $3^{x^2+1} \ge \left(\frac{1}{3}\right)^{1+x}$;	1.Найдите значение выражения а). $\log_2 16 + \log_{\frac{1}{3}} 9$; б) $5^{\log_5 10-1}$; в). $2loq_3 \frac{1}{3} + \frac{1}{2} loq_7 49 - \frac{1}{3} loq_3 27$ 2.Решите уравнения : а). $2^{x^2-3x} = \frac{1}{4}$; б). $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^3$; в). $9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$; г). $7^{x+1}\cdot 2^x = 98$; д). $loq_3(x+x^2)=0$ е). $\lg(2x^2+3x)=\lg(6x+2)$. 3.Решите неравенства : а). $7^{3-x} \langle \frac{1}{49}$; б). $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x^2-3x} \ge 5$; в). $loq_{\frac{1}{2}} x \le -4$;

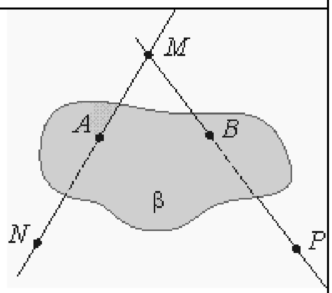
в). $log_{25}x \le \frac{1}{2}$ г). $log_{\frac{1}{4}}(2x-3) \le log_{\frac{1}{4}}(4x+7)$.	г). $lq2x \ge lq(x+1)$.

<u>ТЕМА 3. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ.</u>

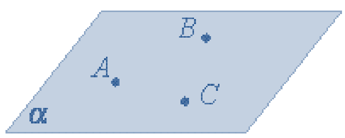
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 28

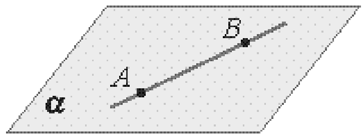
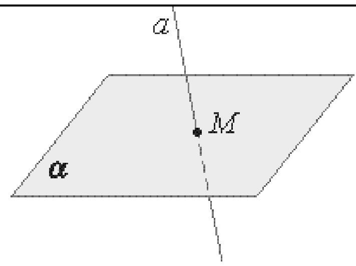
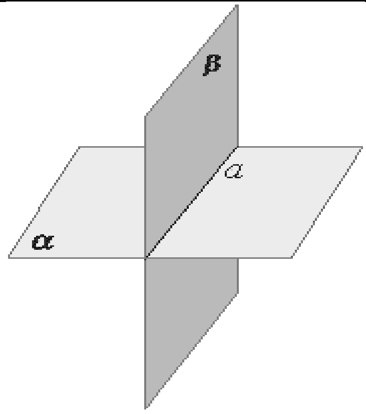
Тема: Аксиомы стереометрии. Взаимное расположение прямых в пространстве.
Время выполнения: 1 ч.
Цель:
1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
Порядок выполнения работы:
1. Повторить:
- аксиомы стереометрии.;
- Взаимное расположение прямых в пространстве.

2. Выполнить задания практической работы.
Теория.
Стереометрия — это раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве.
Слово «стереометрия» происходит от греческих слов «στερεοσ» — объемный, пространственный и «μετρεο» — измерять.
<u>*Простейшие фигуры в пространстве:*</u> точка, прямая, плоскость.

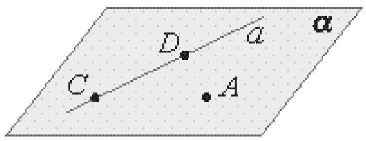
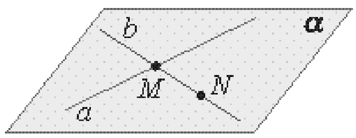
<u>*Плоскость*</u>**.** Представление о плоскости дает гладкая поверхность стола или стены. Плоскость как геометрическую фигуру следует представлять себе простирающейся неограниченно во все стороны.	
На рисунках плоскости изображаются в виде параллелограмма или в виде произвольной области и обозначаются греческими буквами α, β, γ и т.д. Точки A и B лежат в плоскости β (плоскость β проходит через эти точки), а точки M, N, P не лежат в этой плоскости. Коротко это записывают так: A ∈ β, B ∈ β, $M \notin \beta,\quad N \notin \beta,\quad P \notin \beta$	

Аксиомы стереометрии и их следствия

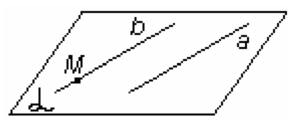
<u>*Аксиома 1.*</u> Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.	

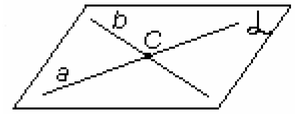
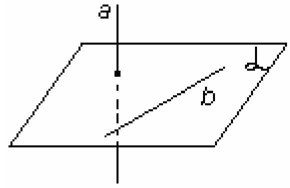
Аксиома 2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости. (Прямая лежит на плоскости или плоскость проходит через прямую).	
Из аксиомы 2 следует, что если прямая не лежит в данной плоскости, то она имеет с ней не более одной общей точки. Если прямая и плоскость имеют одну общую точку, то говорят, что они пересекаются.	
Аксиома 3. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей. В таком случае говорят, плоскости пересекаются по прямой. Пример: пересечение двух смежных стен, стены и потолка комнаты.	

Некоторые следствия из аксиом

Теорема 1. Через прямую *a* и не лежащую на ней точку *A* проходит плоскость, и притом только одна.	
Теорема 2. Через две пересекающиеся прямые *a* и *b* проходит плоскость, и при том только одна.	

Взаимное расположение прямых в пространстве.

Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.	
Две прямые в пространстве называются пересекающимися, если они лежат в одной плоскости и имеют общую точку.	

	
Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости не пересекаются. <u>*Признак скрещивающихся прямых.*</u> Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.	

Задания практической работы.

1. В пересекающихся плоскостях α и β взяты соответственно точки A и B, которые не лежат на линии их пересечения – прямой с. Точка M лежит на прямой с.

- Постройте линию пересечения плоскостей: а) α и MAВ; б) β и MAB.
- Найдите общую точку плоскостей α, β и ABM.

2. Через точку M, которая не лежит в плоскости α, проведены прямые a, b и c. Они пересекают плоскость α в точках, которые не лежат на одной прямой. Лежат ли прямые a, b и cв одной плоскости? (Ответ поясните.)

3. Через сторону AB ромба $ABCD$ проведена плоскость α. Точки E, F – середины сторон AD и DC.

- Постройте точку M – точку пересечения прямой EF и плоскости α.
- Вычислите расстояние от этой точки до точек A и B, если BC = 12 см.

4. Через боковую сторону AB трапеции $ABCD$ проведена плоскость α.

- Постройте точку M – точку пересечения прямой DC и плоскости α.
- Вычислите расстояние от этой точки до точек A и D, если AD = 2 см, BC = 6 см, AB = 4 см, DC = 5 см.
- Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка K лежит на ребре BB_1. Постройте:

✓ точку пересечения прямой A_1K с плоскостью ABC;
✓ точку пересечения прямой C_1K с плоскостью ABC;
✓ прямую, по которой пересекаются плоскости ABC и A_1KC_1.

5. Прямая с является линией пересечения плоскостей α и β. В плоскости α проведена прямая a, пересекающая c. В плоскости β взята точка B, не лежащая на прямой c.

- Постройте линию пересечения плоскости β с плоскостью, в которой лежат прямая a и точка B.
- Найдите общую точку плоскостей α, β и плоскости, в которой лежат прямая a и точка B.

6. Вершины A, B и точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ лежат в плоскости α. Лежат ли в этой плоскости вершины C и D?

7. Верно ли, что любая прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей параллелограмма, имеет хотя бы одну общую точку с его стороной?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 29

Тема: Параллельные прямые в пространстве. Признак параллельности прямых.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

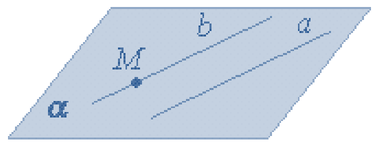
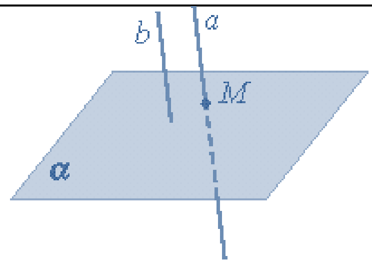
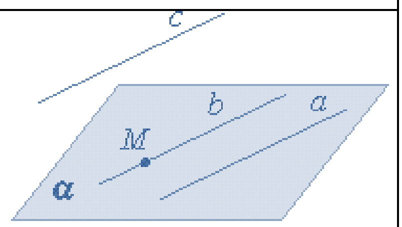
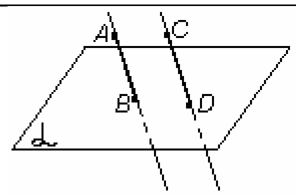
- аксиомы стереометрии.;
- Взаимное расположение прямых в пространстве.

2. Выполнить задания практической работы.

3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

<u>Теорема о параллельных прямых.</u> Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.	
<u>Лемма о пересечении плоскости параллельными прямыми.</u> Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.	
<u>Теорема о трех прямых в пространстве.</u> Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны (если $a \parallel c$ и $b \parallel c$, то $a \parallel b$).	
Два отрезка называются параллельными, если они лежат на параллельных прямых.	

Задания практической работы.

1. На верхние концы двух вертикально стоящих столбов, удаленных один от другого на 3,4 м, опирается концами перекладина. Один из столбов возвышается над землей на 5,8 м, другой – на 3,9 м. Определите длину перекладины.
2. Из точки А плоскости М проведена наклонная прямая линия, и на ней взяты точки В и С, причем АВ = 8 см и АС = 14 см. Точка В удалена от плоскости М на 6 см. Найти расстояние от точки С до плоскости М.
3. Отрезок длиной 10 см пересекает плоскость, концы его удалены от плоскости на расстояние 5 см и 3 см. Найти длину проекции отрезка на плоскость.

4. Отрезок пересекает плоскость; концы его удалены от плоскости на расстояние 8 см и 2 см. Найти расстояние середины этого отрезка от плоскости.

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Параллельность прямых в пространстве».	
1 вариант	**2 вариант**
1.Через конец A отрезка AB проведена плоскость. Через конец B и точку C этого отрезка проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость в точках B_1 и C_1. найдите длину отрезка BB_1, если CC_1 = 15 см, AC : BC = 2 : 3. 2.Через концы отрезка AB и его середину M проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость в точках A_1, B_1 и M_1. Найдите длину отрезка MM_1, если отрезок AB не пересекает плоскость и AA_1 = 5 м , BB_1 = 7 м.	1. Через концы отрезка AB и его середину M проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость в точках A_1, B_1 и M_1. Найдите длину отрезка MM_1, если отрезок AB не пересекает плоскость и AA_1 = 3,6 дм , BB_1 = 4,8 дм. 2. Через конец A отрезка AB проведена плоскость. Через конец B и точку C этого отрезка проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость в точках B_1 и C_1. найдите длину отрезка BB_1, если CC_1 = 8,1см, AB : AC = 3 : 2.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 30

Тема: Признак параллельности прямой и плоскости.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- аксиомы стереометрии.;
- признак параллельности прямых.

2. Выполнить задания практической работы.

3. Выполнить задания самостоятельной работы.

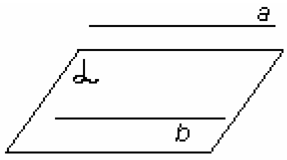
Теория.

Определение.

Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек ($a \parallel \alpha$)

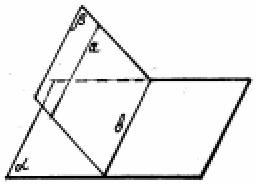
Признак параллельности прямой и плоскости.

Теорема. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна самой плоскости.



$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ b \subset \alpha \\ a \not\subset \alpha \end{array}\right| \Rightarrow a \parallel \alpha$$

Замечания.



1. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.
2. Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, а другая прямая имеет с плоскостью общую точку, то эта прямая лежит в данной плоскости.

Задания практической работы.

1. Точка М лежит на отрезке АВ. Отрезок АВ пересекается с плоскостью α в точке В. Через А и М проведены параллельные прямые, пересекающие α в точках A_1 и M_1. Найдите длину отрезка АВ, если $AA_1 : MM_1 = 3 : 2$, $AM = 6$.
2. Дан ΔМКР. Плоскость, параллельная прямой МК, пересекает МР в точке M_1, РК - в точке K_1. Найдите M_1K_1, если $MP : M_1P = 12 : 5$, $MK = 18$ см.
3. На сторонах АВ и АС треугольника АВС взяты соответственно точки D и E так, что $DE = 5$ см и $BD/DA=2/3$. Плоскость α проходит через точки В и С и параллельна отрезку DE. Найдите длину отрезка ВС.
4. Дан параллелограмм АВСД и не пересекающая его плоскость. Через вершины параллелограмма проведены параллельные прямые, пересекающие данную плоскость в точках A_1, B_1, C_1 и $Д_1$. Найдите длину отрезка $ДД_1$, если $AA_1 = 2$ см, $BB_1 = 3$ см и $CC_1 = 8$ см.

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Параллельность прямых в пространстве».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Дан ΔАВС. Плоскость, параллельная прямой ВС, пересекает АВ в точке B_1, А С - в точке C_1. Найдите B_1C_1, если $BB_1 : AB_1 = 12 : 5$, $BC = 6,3$ см. 2. Дан параллелограмм АВСД и не пересекающая его плоскость. Через вершины параллелограмма проведены параллельные прямые, пересекающие данную плоскость в точках A_1, B_1, C_1 и $Д_1$. Найдите	1. Дан ΔАВС. Плоскость, параллельная прямой АВ, пересекает АС в точке A_1, В С - в точке C_1. Найдите A_1B_1, если $AA_1 : AC = 2 : 3$, $AB = 15$ см. 2. Дан параллелограмм АВСД и не пересекающая его плоскость. Через вершины параллелограмма проведены параллельные прямые, пересекающие данную плоскость в точках A_1, B_1, C_1 и $Д_1$. Найдите длину отрезка $ДД_1$, если $AA_1 = 2$ см, $BB_1 = 3$ см и $CC_1 = 15$ см.

длину отрезка $ДД_1$, если $АА_1 = 4$ см, $ВВ_1 = 3$ см и $СС_1 = 1$ см.	

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 31

Тема: Признак параллельности плоскостей. Свойства параллельных плоскостей.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- аксиомы стереометрии.;
- признаки параллельности прямых, прямой и плоскости.

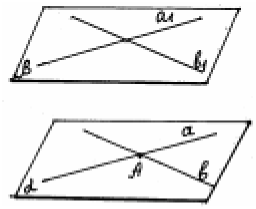
2. Выполнить задания практической работы.

3. Выполнить задания самостоятельной работы.

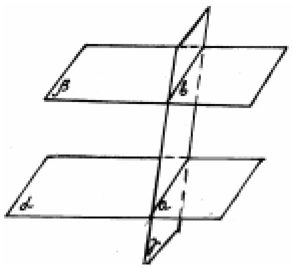
Теория.

Определение. Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

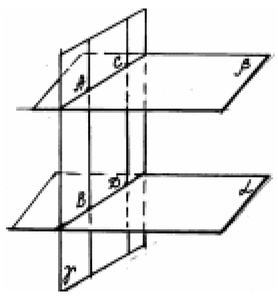
Теорема. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.



Свойства параллельных плоскостей:



1. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.



2. Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.

Задания практической работы.

1. Плоскости М и Р параллельны. Из точек А и В плоскости М проведены к плоскости Р наклонные: АС = 37 см и ВД = 125 см. Проекция наклонной АС на одну из плоскостей равна 12 см. чему равна проекция наклонной ВД?
2. Отрезки двух параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны 51 см и 53 см, а их проекции на одну их этих плоскостей относятся как 6 : 7. Определите расстояние между данными плоскостями.
3. Между двумя параллельными плоскостями Р и М проведены отрезки АС и ВД (точки А и В лежат в плоскости Р); АС = 13 см; ВД = 15 см; сумма длин проекций АС и ВД на одну из данных плоскостей равна 14 см. найдите длины этих проекций и расстояние между плоскостями.
4. Даны две параллельные плоскости α и β и лежащая между ними точка Р. Две прямые, проходящие через эту точку пересекают плоскость α в точках A_1 и A_2, а плоскость β соответственно в точках B_1 и B_2. Найдите длину отрезка B_1B_2, если A_1A_2=10см, а PA_1: A_1B_1=2:5.

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Параллельность прямых в пространстве».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Дан ΔАВС. Плоскость, параллельная прямой ВС, пересекает АВ в точке B_1, А С - в точке C_1. Найдите B_1C_1, если $BB_1 : AB_1 = 12 : 5$, ВС = 6,3 см. 2. Даны две параллельные плоскости α и β и не лежащая между ними точка Р. Две прямые, проходящие через эту точку пересекают ближнюю плоскость α в точках A_1 и A_2, а дальнюю - β соответственно в точках B_1 и B_2. Найдите длину отрезка B_1B_2, если A_1A_2=6см,а PA_1: A_1B_1=2:3.	1. Дан ΔАВС. Плоскость, параллельная прямой АВ, пересекает АС в точке A_1, В С - в точке C_1. Найдите A_1B_1, если $AA_1 : AC = 2 : 3$, АВ = 15 см. 2. Даны две параллельные плоскости α и β и лежащая между ними точка Р. Две прямые, проходящие через эту точку пересекают плоскость α в точках A_1 и A_2, а плоскость β соответственно в точках B_1 и B_2. Найдите длину отрезка B_1B_2, если A_1A_2=10см,а PA_1: A_1B_1=2:5.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 32

Тема: Признак перпендикулярности прямых. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Свойства перпендикулярных прямой и плоскости.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

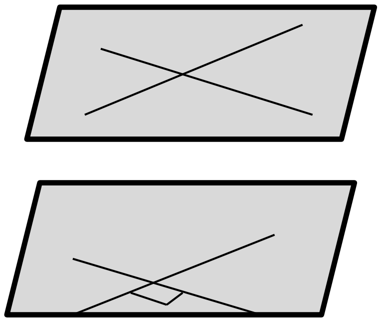
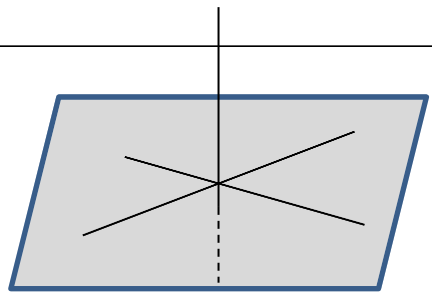
1. Повторить:

- аксиомы стереометрии.;
- признаки параллельности прямых, прямой и плоскости.

2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Определение. Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

Признак перпендикулярности прямых. Если две пересекающиеся прямые параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны.	
Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.	
Свойства перпендикулярных прямой и плоскости. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой. Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.	

Задания практической работы.

1. Через точки A и B прямой AB проведены прямые, перпендикулярные плоскости α и пересекающие ее соответственно в точках A_1 и B_1.Найдите A_1B_1, если AB = 15см., AA_1= 21,5 см., BB_1= 33,5 см.
2. Четырехугольник ABCD – квадрат. Точка O его центр. Прямая OM перпендикулярна к плоскости квадрата. Найдите MA, если AB = 4 см и OM = 1 см.
3. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, AC = 6 см, BC = 8 см, CM - медиана. Через вершину C проведена прямая CK, перпендикулярная к плоскости треугольника ABC, причем CK =12 см. Найдите KM.
4. Прямая CD перпендикулярна к плоскости правильного треугольника ABC. Через центр O этого треугольника проведена прямая OK, параллельная прямой CD. Известно, что AB = $16\sqrt{3}$ см, OK = 12см, CD = 16см. Найдите расстояние от точек D и K до вершин A и B треугольника.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 33

Тема: Перпендикуляр и наклонная. Теорема о трех перпендикулярах.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

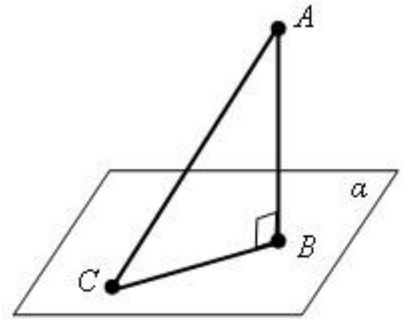
1. Повторить:

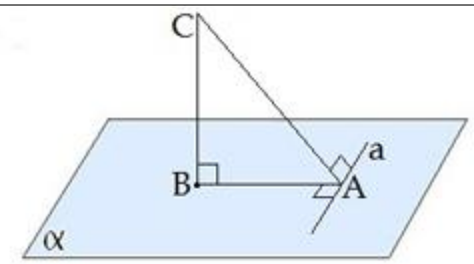
- признаки перпендикулярности прямых, прямой и плоскости.

2. Выполнить задания практической работы.

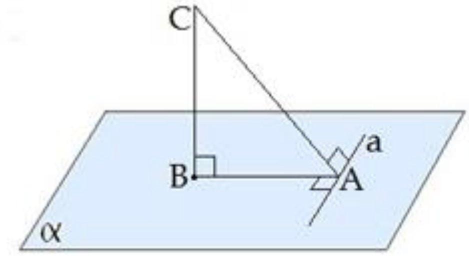
3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

<table>
<tr>
<td>
<u>Перпендикуляром,</u> опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости.
Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется <u>основанием перпендикуляра.</u>
<u>Расстоянием от точки до плоскости</u> называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.
<u>Наклонной,</u> проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, не являющийся перпендикуляром к плоскости, с одним концом в данной точке, а с другим – на плоскости.
Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется <u>основанием наклонной.</u>
Отрезок, соединяющий основание перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется <u>проекцией наклонной</u> .
</td>
<td>


AC – наклонная,
AB – перпендикуляр,
CB – проекция наклонной
C – основание наклонной,
B – основание перпендикуляра
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Теорема о трех перпендикулярах (прямая).
Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна ее проекции, то она перпендикулярна и самой наклонной.
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

Теорема о трех перпендикулярах (обратная). Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.	

Задания практической работы.

1. Из данной точки проведены к данной плоскости две наклонные, равные каждая 2 см; угол между ними равен 60°, а угол между их проекциями – прямой. найти расстояние от данной точки до плоскости.
2. Катеты прямоугольного треугольника АВС равны 15 см и 20 см. из вершины прямого угла С проведен к плоскости этого треугольника перпендикуляр СД = 35 см. найти расстояние от точки Д до гипотенузы АВ.
3. Стороны треугольника 10 см, 17 см и 21 см. из вершины большего угла этого треугольника проведен перпендикуляр к его плоскости, равный 15 см. определите расстояние от его концов до большей стороны.
4. Отрезок AD перпендикулярен к плоскости равнобедренного треугольника ABC. Известно, что AB=AC=5 см, BC=6 см, AD=12 см. Найдите расстояния от концов отрезка AD до прямой BC.

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Перпендикуляр и наклонная».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Точка О – центр квадрата со стороной 4 см; OS – отрезок, перпендикулярный к плоскости квадрата и равный 2 см. Найти расстояние от точки S до точки А. 2. Наклонная АВ пересекает плоскость Р в точке С; концы его отстоят от плоскости на расстоянии 5 см и 3 см, АС=7 см, СВ=4 см. Найдите длину проекции наклонной на плоскостью.	1.Наклонная КМ пересекает плоскость М в точке О; концы его отстоят от плоскости на расстоянии КВ=4 см и МД=2 см, причём КО=3 см, ОМ=1 см. Найдите длину наклонной КМ. 2.АВСД квадрат со стороной 4 см; AS – отрезок, перпендикулярный к плоскости квадрата и равный 2 см. Найти расстояние от точки S до точки С.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 34

Тема: Признак перпендикулярности плоскостей. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

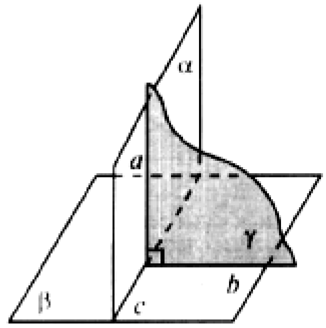
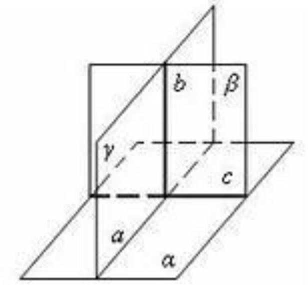
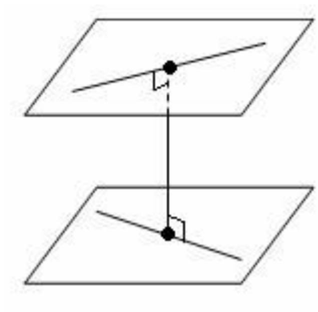
1. Повторить:

- признаки перпендикулярности прямых, прямой и плоскости.

2. Выполнить задания практической работы.

3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

Две пересекающиеся *плоскости* называются перпендикулярными, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.	
<u>*Признак перпендикулярности плоскостей.*</u> Если плоскость проходит через прямую перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.	
Расстояние между скрещивающимися прямыми — это длина общего перпендикуляра, проведённого к этим прямым.	

Задания практической работы.

1. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 6. Найдите расстояние от ребра DC до диагонали D_1B куба.
2. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найдите расстояние между прямыми AC и BD_1.
3. Плоскости прямоугольных треугольников ABC и ABK перпендикулярны. AB=8см, AK=10см, $\angle ABK=\angle ABC=90^0$, $\angle BAC=45^0$. Вычислите расстояние между точками K и C.

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве».	
1 вариант	**2 вариант**

1. Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, если одна из них на 26 см больше другой, а проекции наклонных равны 12 см и 40 см. 2. Найдите расстояние от середины отрезка АВ до плоскости, не пересекающей этот отрезок, если расстояние от точек А и В до плоскости равны 3,2 см и 5,3 см.	1. Найдите расстояние от середины отрезка АВ до плоскости, не пересекающей этот отрезок, если расстояние от точек А и В до плоскости равны 7,4 см и 6,1 см. 2. Из точки к плоскости проведены две наклонные. Найдите длины наклонных, если наклонные относятся как 1 : 2, а проекции наклонных равны 1 см и 7 см.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 35

Тема: Изображение пространственных фигур на плоскости. Преобразование симметрии в пространстве. Движение в пространстве.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

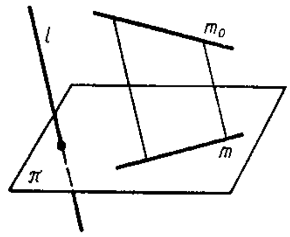
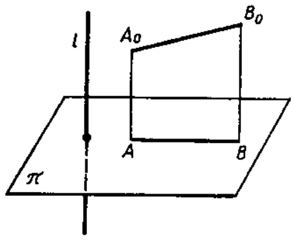
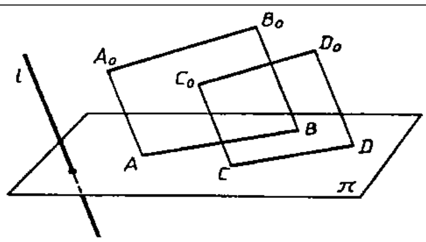
- признаки перпендикулярности прямых, прямой и плоскости, плоскостей..

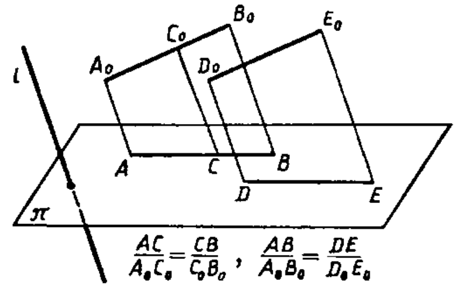
2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Определение. Пусть F_1 - плоская или пространственная фигура, параллельные проекции всех точек фигуры F_1 образуют некоторую фигуру F на плоскости π, фигура F называется параллельной проекцией фигурыF_1. F получена из F_1 параллельным проектированием.

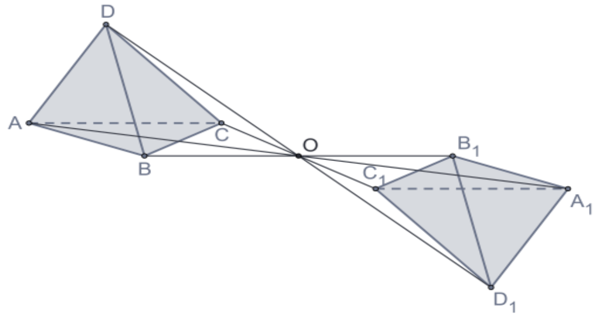
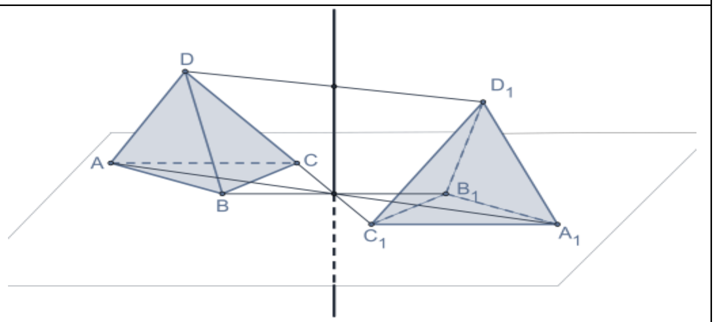
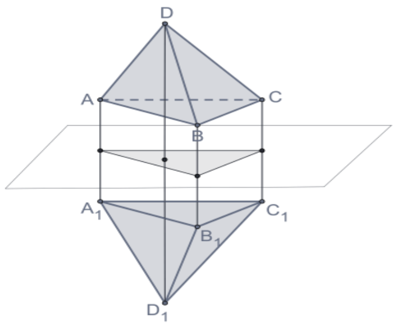
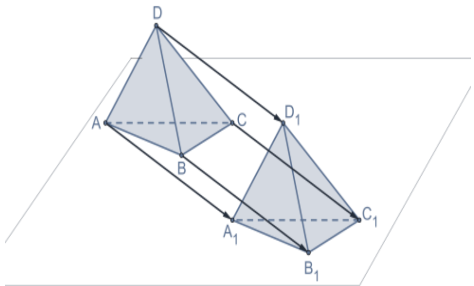
Свойства.

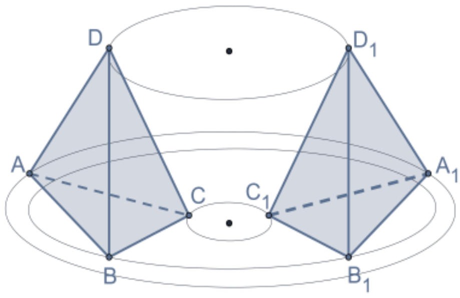
1.Проекция прямой есть прямая.	
2.Проекция отрезка есть отрезок.	
3.Проекции параллельных отрезков - параллельные отрезки или отрезки, принадлежащие одной прямой.	

4.Проекции параллельных отрезков, а также проекции отрезков, лежащих на одной прямой, пропорциональны самим отрезкам. 5.проекция середины отрезка есть середина проекции отрезка.	

Движением называется преобразование, при котором сохраняются расстояния между точками.

Виды движения в пространстве

1. Центральная симметрия (симметрия относительно точки).	
2. Осевая симметрия (симметрия относительно прямой).	
3 Зеркальная симметрия (симметрия относительно плоскости).	
4. Параллельный перенос (точки переносятся на данный вектор).	

5. Поворот на данный угол вокруг данной точки:	

Задания практической работы.

1. Какие координаты имеет точка А, если при центральной симметрии с центром А точка, В(1; 0; 2) переходит в точку С(2; -1; 4).
2. Как расположена плоскость по отношению к осям координат Ох и Оz, если при зеркальной симметрии относительно этой плоскости точка М(2; 2; 3) переходит в точку М1(2; -2; 3).
3. В какую перчатку (правую или левую) переходит правая перчатка при зеркальной симметрии?
4. Дан тетраэдр МАВС. Постройте фигуру, центрально-симметричную этому тетраэдру относительно точки О.
5. Дан куб. Постройте фигуру, зеркально-симметричную этому кубу относительно плоскости β.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 36

Тема: Углы между скрещивающимися прямыми, между прямой и плоскостью, между плоскостями.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- признаки параллельности прямых, прямой и плоскости.
- признаки перпендикулярности прямых, прямой и плоскости.

2. Выполнить задания практической работы.

3. Выполнить задания самостоятельной работы.

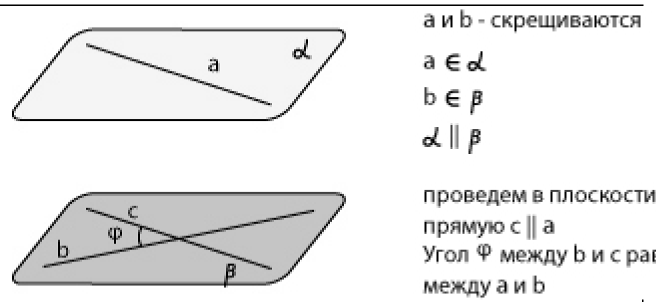
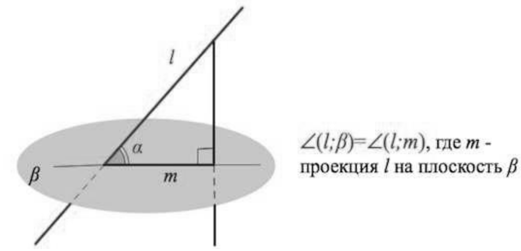
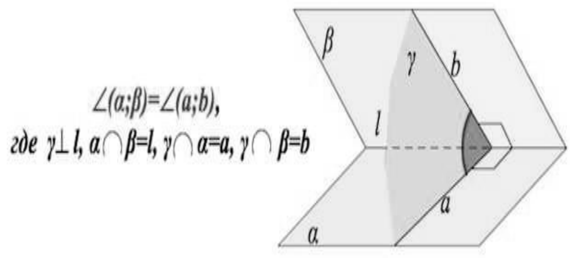
Задания самостоятельной работы.

Математический диктант.

- Что такое преобразование фигуры?
- Какое преобразование называют движением?
- Сформулируйте свойства движения.
- Какие фигуры называют равными?
- Свойство параллельного переноса.

- Какие точки называют симметричными относительно прямой *l* ? Как называют прямую *l*?
- Свойства осевой симметрии.
- Какие точки называют симметричными относительно точки О? Как называют точку О?
- Свойства центральной симметрии.

Теория.

Угол между скрещивающимися прямыми – это угол между двумя пересекающимися прямыми, которые соответственно параллельны заданным скрещивающимся прямым.	
Угол между прямой и плоскостью – угол между прямой и ее проекцией на плоскость.	
Угол между плоскостями равен углу между прямыми, по которым они пересекаются с любой плоскостью, перпендикулярной их линии пересечения.	

Задания практической работы.

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - куб. Найдите угол между прямыми:
   а) AB_1 и AD_1; б) AB_1 и AD; в) AB_1 и AB; г) AC и AC_1.
2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прямоугольный параллелепипед, в котором $AB = 2$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$. Найдите угол между прямыми:а) A_1B и AB; б) A_1D и AD; в) BD и AB; г) BA_1 и DA_1.
3. Площадь основания правильной треугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. Найти расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.
4. Найти угол между диагоналями двух смежных граней единичного куба.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 37

Тема: Контрольная работа по теме: «Прямые и плоскости в пространстве».

Время выполнения: 2 ч.

Цель: проконтролировать знания студентов по теме: «Прямые и плоскости в пространстве».

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:
   - аксиомы стереометрии;
   - признаки параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей.
2. Выполнить задания контрольной работы.

Контрольная работа по теме: «Прямые и плоскости в пространстве».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Из некоторой точки пространства проведены к данной плоскости перпендикуляр, равный 6 см, и наклонная длиной 9 см. Найти проекцию перпендикуляра на наклонную. 2. Катеты прямоугольного треугольника АВС равны 10 м и 15 м. Из вершины прямого угла С проведён к плоскости этого треугольника перпендикуляр СД = 30 м. Найти расстояние от точки Д до гипотенузы АВ. 3. Из точки А плоскости М проведена наклонная прямая линия, и на ней взяты точки В и С, причём АВ = 6 см и АС = 10 см. Точка В удалена от плоскости М на 3 см. Найти расстояние от точки С до плоскости М. 4. Концы данного отрезка длиной 6 см отстоят от плоскости на 7 см и 4 см. Найти длину его проекции. 5. Из данной точки проведены к данной плоскости две наклонные, длиной 10 см и 12 см. Сумма длин их проекций равна 5 см. Найти расстояние от данной точки до плоскости.	1. Концы данного отрезка длиной 7 см отстоят от плоскости на 5 см и 8 см. Найти длину его проекции. 2. Точка удалена от плоскости на расстояние 3 см. Длина одной из наклонных равна 5 см. Найти длину второй наклонной, если сумма проекций этих наклонных равна 6 см. 3. Из точки А плоскости М проведена наклонная прямая линия, и на ней взяты точки В и С, причём АВ = 10 см и АС = 12 см. Точка С удалена от плоскости М на 8 см. Найти расстояние от точки В до плоскости М. 4. Отрезок длиной 12 см пересекает плоскость. Концы отрезка отстоят от плоскости на расстояния 6 см и 2 см . Найдите длину проекции отрезка на плоскость. 5. Сторона квадрата равна 3 см. Из вершины В квадрата проведен перпендикуляр АК к плоскости этого квадрата длиной 5 см. Найдите расстояние КD.

ТЕМА 4. ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 38

Тема: Радианная мера угла. Основные тригонометрические функции. Основные тригонометрические тождества.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

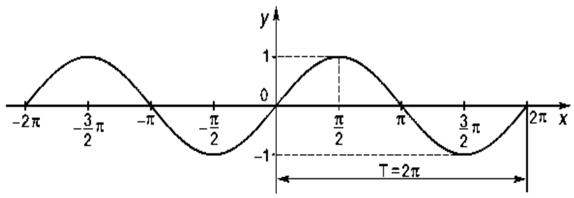
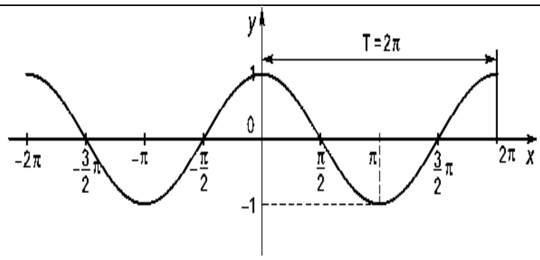
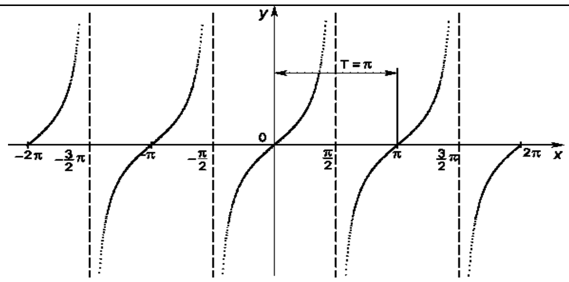
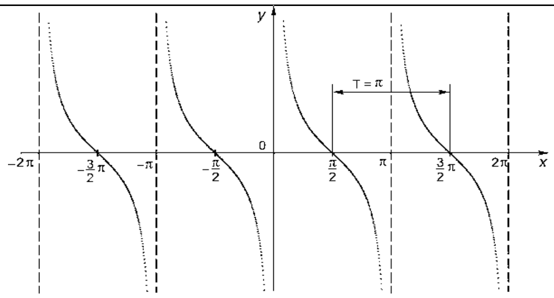
1. Повторить:

- основные тригонометрические функции.

2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Основные тригонометрические функции.

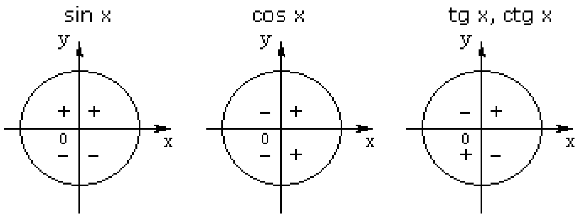
y = sinx		○ Область определения функции множество всех действительных чисел: *D(y)=R.* ○ Множество значений: *E(y) = [−1;1].* ○ нечетная: *sin(− x) = − sinx.* ○ График функции симметричен относительно начала координат.
y = cosx		○ Область определения функции — множество всех действительных чисел: *D(y)=R.* ○ Множество значений: *E(y) = [−1;1].* ○ четная: *cos(− x) = cosx.* ○ График функции симметричен относительно оси *OY.*
y = tgx		○ Область определения функции: множество всех действительных чисел: *D(y) = R,* кроме *x=π/2+πk,k∈Z.* ○ Множество значений– множество действительных чисел: *E(y) = R.* ○ нечетная: *tg(−x) = − tgx.* ○ График функции симметричен относительно оси *OY.*
y = ctgx		○ Область определения функции множество всех действительных чисел: D(y)=R, кроме x=πk,k∈Z. ○ Множество значений– множество действительных чисел: E(y)=R. ○ нечетная: ctg(−x)=−ctgx. ○ График функции симметричен относительно оси OY.

Основные тригонометрические тождества.

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2. $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha, \quad \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = ctg\alpha$
3. $tg\alpha = \dfrac{1}{ctg\alpha}, \quad ctg\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha}$
4. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$
5. $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$
6. $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = ctg^2\alpha + 1$

Формула перехода из градусной меры угла в радианную: $\pi = 180^\circ, \quad n^\circ = \dfrac{\pi n}{180^\circ}$.

Знаки тригонометрических функций.



Пример 1: Вычислить tgα, если $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}, \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение: Из формулы $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ получаем:

$$tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{1}{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} - 1 = \frac{16}{9}.$$

Т.к. тангенс во второй четверти отрицателен, то имеем: $-\sqrt{tg^2\alpha} = -\sqrt{\dfrac{16}{9}} = -\dfrac{4}{3}$.

Ответ: $-\dfrac{4}{3}$.

Пример 2: Дано: $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}; \quad \pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$

Найти: 1) $\cos\alpha$;

Решение

1) Из основного тригонометрического тождества получим:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm\sqrt{\frac{25}{25} - \frac{9}{25}} = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$$

Так как $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ следовательно $\alpha \in$ III четверти. Косинус в третьей четверти имеет отрицательный знак. Значит $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

Задания практической работы.
«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.
стр 10: выполнить задания № 1, 2, 3, 7 (а, б).

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 39

Тема: Формулы приведения.
Время выполнения: 1 ч.
Цель:
1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:
1. Повторить:
- Основные тригонометрические функции.
- Основные тригонометрические тождества.

2. Выполнить задания практической работы.
3. Выполнить задания самостоятельной работы.
Задания практической работы.

Упростите выражения: а) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + tg^2\beta$; б) $\frac{tg\alpha}{ctg\alpha}(1 - \sin^2\alpha)$;

в) $tg\beta \cdot ctg\beta - \sin^2\alpha$; г) $\frac{ctg\alpha}{tg\alpha} + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$;

д) $\frac{1}{\sin^2\alpha} - ctg^2\alpha - \cos^2\beta$; е) $(tg^2\alpha - \cos^2\alpha)\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right)$.

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Основные тригонометрические тождества».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Упростите выражения: а) $(\sin\alpha - 2\cos\alpha)^2 + 4\sin\alpha\cos\alpha$; б) $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$; в) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - tg^2\alpha$; г) $\frac{\sin^2\alpha}{1 + \cos\alpha}$.	1. Упростите выражения: а) $(3\sin\alpha + 2\cos\alpha)^2 - 12\sin\alpha\cos\alpha$; б) $\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}$; в) $\frac{tg\alpha}{\cos^2\alpha} - tg\alpha$; г) $\frac{\cos^2\alpha}{1 - \sin\alpha}$.

2. Найдите значение выражения $3\cos\alpha - 2$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\alpha \in II$ ч.	2. Найдите значение выражения $2 - 5\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\alpha \in I$ ч.

Теория.

Функции	Углы								
	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi k-\alpha$	$2\pi k+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$-tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$
ctg	$-ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$

Задания практической работы.

1. Вычислите:

   а) $\cos 405^\circ - \sin 330^\circ + tg225^\circ$; б) $\cos 210^\circ + \sin 150^\circ - tg240^\circ$;

   в) $\sin 120^\circ - \cos 330^\circ + 3ctg240^\circ$.

2. Упростите выражение:

   а) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cdot ctg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{tg(2\pi+\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$; б) $\dfrac{tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos(\pi+\alpha)}{ctg(2\pi-\alpha)\cdot\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}$;

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 40

Тема: Решение примеров по теме: «Формулы приведения».
Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- формулы приведения

2. Выполнить задания практической работы.
3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

Функции	Углы								
	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi k-\alpha$	$2\pi k+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$
ctg	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$

Задания практической работы.

1. Вычислите:

а) $2\sin 240^\circ + \cos 135^\circ - tg120^\circ$; б) $\cos 225^\circ + \sin 405^\circ + tg420^\circ$;

в) $\cos 990^\circ - \sin 1470^\circ - ctg1125^\circ$.

2. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin(\pi+\alpha)}$; б) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cdot ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{tg(2\pi+\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$.

3. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{2\sin\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}{5\cos(\alpha+\pi)}$, $\alpha=\dfrac{5\pi}{4}$; б) $\dfrac{3\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{5\cos(\alpha+\pi)}$, $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$;

в) $\dfrac{3\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{4\sin(3\pi-\alpha)}$, $\alpha=\dfrac{9\pi}{4}$; г) $\dfrac{5\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)}{8\sin(\pi-\alpha)}$, $\alpha=\dfrac{5\pi}{4}$.

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Формулы приведения».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Упростите выражения:	1. Упростите выражения:

а) $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot tg(2\pi-\alpha)}{ctg\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin(\pi-\alpha)}$; б) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cdot ctg\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{tg(2\pi+\alpha)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}$; в) $2\cos 210^\circ-2\sin 150^\circ-ctg135^\circ$; г) $\sin 335^\circ+\cos 135^\circ-3tg210^\circ$. 2. Найдите значение выражения $3+8tg^2x\cdot\cos^2x$, если $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.	а) $\dfrac{ctg(2\pi+\alpha)\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(\pi-\alpha)\cdot tg\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$; б) $\dfrac{tg\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin(2\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}$; в) $\sin 330^\circ+\cos 240^\circ-ctg150^\circ$; г) $2\cos 210^\circ-2\sin 150^\circ-ctg135^\circ$. 2. Найдите значение выражения $6-2ctg^2x\cdot\sin^2x$, если $\cos x=0{,}2$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 41

Тема: Решение примеров по теме: «Формулы сложения».

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- основные тригонометрические функции;
- основные тригонометрические формулы

2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Формулы сложения.

1. $cos(\alpha+\beta) = cos\,\alpha\, cos\,\beta - sin\,\alpha\, sin\,\beta$
2. $cos(\alpha-\beta) = cos\,\alpha\, cos\,\beta + sin\,\alpha\, sin\,\beta$
3. $sin(\alpha+\beta) = sin\,\alpha\, cos\,\beta + cos\,\alpha\, sin\,\beta$
4. $sin(\alpha-\beta) = sin\,\alpha\, cos\,\beta - cos\,\alpha\, sin\,\beta$
5. $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$
6. $tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$

Пример 1: $\sin 15^0 = \sin(45^0-30^0) = \sin45^0\cdot\cos 30^0 - \cos 45^0\cdot\sin 30^0 =$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$$

Пример 2: $\cos\dfrac{3\pi}{4}=\cos(\dfrac{4\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4})=\cos(\pi-\dfrac{\pi}{4})=-\cos\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Пример 3:

$$\cos\frac{15\pi}{4} = \cos(4\pi - \frac{\pi}{4}) = \cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Задания практической работы.

1. Вычислите:

а) $\dfrac{\sin 10^\circ \cos 80^\circ + \cos 10^\circ \sin 80^\circ}{\cos 10^\circ \cos 35^\circ - \sin 10^\circ \sin 35^\circ}$; б) $\dfrac{\cos 52^\circ \cos 7^\circ + \sin 52^\circ \sin 7^\circ}{\sin 29^\circ \cos 16^\circ + \sin 16^\circ \cos 29^\circ}$;

в) $\dfrac{\cos 20^\circ \cos 40^\circ - \sin 20^\circ \sin 40^\circ}{\sin 76^\circ \cos 31^\circ - \cos 76^\circ \sin 31^\circ}$; г) $\dfrac{\sin 100^\circ \cos 20^\circ + \cos 100^\circ \sin 20^\circ}{\cos 25^\circ \cos 35^\circ - \sin 25^\circ \sin 35^\circ}$

2. «Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.
стр. 11 выполнить задания: № 9.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 42

Тема: Решение примеров по теме: «Формулы суммы и разности тригонометрических функций.».

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:
- основные тригонометрические функции;
- основные тригонометрические формулы

2. Выполнить задания самостоятельной работы.

3. Выполнить задания практической работы.

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Формулы сложения».	
1 вариант	**2 вариант**
Вычислите: а) $cos 98^\circ \cos 53^\circ + \sin 98^\circ \sin 53^\circ$; б) $\sin 56^\circ \cos 26^\circ - \cos 56^\circ \sin 26^\circ$; в) $\sin\frac{8\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7} + \sin\frac{6\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}$; г) $cos 3\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \sin 3\alpha$. д) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.	Вычислите: а) $cos 52^\circ \cos 22^\circ + \sin 22^\circ \sin 52^\circ$; б) $\sin 134^\circ \cos 44^\circ - \cos 134^\circ \sin 44^\circ$; в) $\cos\frac{10\pi}{6}\cos\frac{8\pi}{6} - \sin\frac{8\pi}{6}\sin\frac{10\pi}{6}$; г) $\sin\alpha \cos 3\alpha - \sin 3\alpha \cos\alpha$. д) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$, если $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Теория.

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$tg\alpha+tg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,$$

$$tg\alpha-tg\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k.$$

Для преобразования произведения тригонометрических функций в сумму применяются формулы:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

<u>Пример 1:</u> Преобразуйте в алгебраическую сумму $\sin 5x\sin 3x$.

Решение: по формуле $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$ имеем

$$\sin 5x\sin 3x=\frac{1}{2}(\cos(5x-3x)-\cos(5x+3x))=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 8x)=\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 8x.$$

<u>Пример 2:</u> Вычислите: $\sin 40^0+\sin 20^0$.

Решение:

по формуле $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ имеем

$$\sin 40^0+\sin 20^0=2\sin\frac{40^0+20^0}{2}\cos\frac{40^0-20^0}{2}=2\sin 30^0\cos 10^0=2\cdot 0{,}5\cdot 0{,}98\approx 0{,}98.$$

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр. 11 выполнить задания: № 14, 21.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 43

Тема: Решение примеров по теме: «Формулы двойного и половинного аргумента».
Время выполнения: 1 ч.
Цель:

2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

2. Повторить:
   - формулы суммы и разности тригонометрических функций.

2. Выполнить задания самостоятельной работы.
3. Выполнить задания практической работы.
Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Формулы суммы и разности тригонометрических функций».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Упростите выражение: а) $\frac{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}$; б) $\frac{\cos 3\alpha - \cos\alpha}{\sin 3\alpha + \sin\alpha}$. 2. Вычислите: а) $\sin 15^\circ$; б) $tg 105^\circ$.	1. Упростите выражение: а) $\frac{\sin 3\alpha - \sin\alpha}{\cos 3\alpha - \cos\alpha}$; б) $\frac{\cos 4\alpha + \cos 6\alpha}{\sin 4\alpha + \sin 6\alpha}$. 2. Вычислите: а) $ctg 15^\circ$; б) $\cos 105^\circ$.

Теория.

<u>Формулы половинного аргумента</u>

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}; \qquad \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}; \qquad tg^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x};.$$

<u>Пример 1:</u> Вычислите sin(π/12).

Решение: по формуле $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$, имеем

$$\sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}068.$$

<u>Формулы двойного аргумента</u>

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \frac{1-tg^2 x}{1+tg^2 x};$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x = \frac{2tgx}{1+tg^2 x}; \qquad tg2x = \frac{2tgx}{1-tg^2 x}.$$

<u>Пример 2:</u> Выразите функции данного угла через функции вдвое меньшего угла, $\sin 42^0$.
Решение:

используя формулу $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, имеем $\sin 42^0 = \sin(2\cdot 21^0) = 2\sin 21^0\cos 21^0$.

Пример 3: Вычислите $2\sin 15^0\cos 15^0$.

Решение: используя формулу $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, имеем
$2\sin 15^0\cos 15^0 = \sin(2\cdot 15^0) = \sin 30^0 = 0{,}5$.

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр. 13 выполнить задания: № 15,26, 10.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 44

Тема: Решение примеров по теме: «Преобразование тригонометрических выражений».

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:
   - формулы тригонометрии.

2. Выполнить задания практической работы.

3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Задания практической работы.

1. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot tg(2\pi-\alpha)}{ctg\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin(\pi-\alpha)}$; б) $\dfrac{ctg(2\pi+\alpha)\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(\pi-\alpha)\cdot tg\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$.

2. Вычислите значение выражения:

а) $\dfrac{8\sin 10^\circ\cos 10^\circ\cos 20^\circ}{\cos 50^\circ}$; б) $\dfrac{16\sin 12^\circ\cos 12^\circ\cos 24^\circ}{\cos 42^\circ}$.

3. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{7ctg\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{2\sin(3\pi-\alpha)}$, если $\alpha=\dfrac{5\pi}{3}$; б) $\dfrac{2tg\left(\dfrac{5\pi}{2}-\alpha\right)}{5ctg(\alpha+5\pi)}$, если $\alpha=\dfrac{5\pi}{6}$;

в) $4-5tg^2x\cdot\cos^2x$, если $\sin^2x=0{,}8$; г) $\dfrac{2\sin\alpha+5\cos\alpha}{3\cos\alpha-\sin\alpha}$, если $tg\alpha=2$;

д) $1{,}3\cos x$, если $\sin x=\dfrac{12}{13}$, $\dfrac{\pi}{2}\langle x\langle\pi$.

4. Упростите выражение:

а) $\sin\dfrac{11\pi}{3}+\cos 690^\circ-\cos\dfrac{19\pi}{3}$; б) $8(\sin^4 15^\circ+\cos^4 15^\circ)$;

в) $\cos^2\beta+\sin^4\beta+\sin^2\beta\cos^2\beta$.

5. Вычислите:

а) $\sin(\alpha+\beta)-2\cos\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{12}{13}$, $\sin\beta=\frac{3}{5}$, $\alpha,\beta\in I$ ч.

б) $5(\sin(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{12}{13}, \sin\beta=-\frac{4}{5}, \alpha\in I$ ч, $\beta\in IV$ ч.

Задания самостоятельной работы.

Тест по теме: «Преобразование тригонометрических выражений».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Упростите выражение $\frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}+\frac{sin\alpha}{1-cos\alpha}$. 1) $2sin\alpha$ 2) $2ctg\alpha$ 3) $\frac{2}{sin\alpha}$ 4) $\frac{2}{sin^2\alpha}$ 2. Вычислите: $sin120^\circ-cos330^\circ+3ctg240^\circ$. 1) $2\sqrt{3}$ 2) $-\sqrt{3}$ 3) 0 4) $\sqrt{3}$ 3. Найдите значение выражения $3+6cos\alpha$, если известно, что $sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 1) 1 2) $\frac{11}{3}$ 3) 5 4) $\frac{7}{3}$ 4. Преобразуйте выражение $cos\ \frac{2\pi}{3}-x\ -cosx$. 1) $cos\ \frac{\pi}{3}-x$ 3) $-\sqrt{3}sin\ \frac{\pi}{3}-x$ 2) $\sqrt{3}sin\ \frac{\pi}{3}-x$ 4) $-cos\ \frac{\pi}{3}-x$ 5. Найдите значение выражения $1-2cos^2\ \frac{\pi}{2}+\alpha$ при $\alpha=\frac{\pi}{12}$. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) 1 4) 0,5 6. Вычислите: $\frac{sin70^\circ cos40^\circ-sin160^\circ sin40^\circ}{sin20^\circ sin80^\circ+sin110^\circ cos80^\circ}$. 7. Вычислите: $\frac{cos130^\circ}{sin35^\circ cos35^\circ cos70^\circ}$. 8. Найдите значение выражения $\frac{2cos^2 76^\circ-1}{tg211^\circ\cdot cos^2 31^\circ}$.	1. Упростите выражение $\frac{sin\alpha}{sin\alpha-cos\alpha}-\frac{cos\alpha}{sin\alpha+cos\alpha}$ 1) 1 2) $-tg2\propto$ 3) $1-tg2\propto$ 4) $-\frac{1}{cos2\propto}$ 2. Вычислите: $2sin240^\circ+cos135^\circ-tg120^\circ$. 1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ - $2\sqrt{3}$ 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ - $2\sqrt{3}$ 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3. Найдите значение выражения $1+14cos\alpha$, если известно, что $sin\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{7}$ и $\frac{\pi}{2}<\propto<\pi$. 1) 11 2) - 9 3) $\frac{57}{7}$ 4) $-\frac{43}{7}$ 4. Преобразуйте выражение $cos\ \frac{5\pi}{3}-x\ +cosx$. 1) $-sin\ \frac{5\pi}{6}-x$ 3) $\sqrt{3}cos\ \frac{5\pi}{6}-x$ 2) $sin\ \frac{5\pi}{6}-x$ 4) $-\sqrt{3}cos\ \frac{5\pi}{6}-x$ 5. Найдите значение выражения 6. $\sqrt{3}cos\ \frac{\pi}{2}-\propto\ \cdot\cos(\pi-\alpha)$ при $\alpha=\frac{\pi}{6}$. 1) 0,75 2) - 0,75 3) 1,5 4) - 1,5 7. Вычислите: $\sqrt{2}\,\frac{sin35^\circ sin80^\circ+sin125^\circ cos80^\circ}{sin10^\circ cos20^\circ-cos170^\circ sin20^\circ}$. 8. Вычислите: $\frac{cos70^\circ}{sin50^\circ cos50^\circ sin10^\circ}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 45

Тема: Решение примеров по теме: «Решение примеров на преобразование тригонометрических выражений».

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:
   - формулы тригонометрии.
2. Выполнить задания практической работы.
3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.
стр. 271 выполнить задания: № 52, 53, 54,58

Задания самостоятельной работы.

«Преобразование тригонометрических выражений».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Упростите выражение: а) $\cos(\frac{3\pi}{2}-\alpha)\cdot tg(\frac{\pi}{2}+\alpha)$; б) $\frac{\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)\cdot tg(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)\cdot ctg(\pi+\alpha)}$ 2 Докажите тождество а) $\frac{1}{tg\alpha+ctg\alpha}=\sin\alpha\cdot\cos\alpha$; б) $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$	1. Упростите выражение: а) $\frac{tg(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)}$; б) $tg\alpha\cdot ctg(\pi+\alpha)+ctg^2\alpha$ 2. Докажите тождество: а) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$; б) $\frac{1}{1+tg^2\alpha}+\frac{1}{1+ctg^2\alpha}=1$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 46

Тема: Контрольная работа по теме: «Формулы тригонометрии».
Время выполнения: 2 ч.
Цель: проконтролировать знания студентов по теме: «Формулы тригонометрии».
Порядок выполнения работы:

1. Повторить:
- формулы тригонометрии.
2. Выполнить задания контрольной работы.

Контрольная работа по теме: «Формулы тригонометрии».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Упростите выражение: $(\sin\alpha-2\cos\alpha)^2+4\sin\alpha\cos\alpha$.	1. Упростите выражение: $(3\sin\alpha+2\cos\alpha)^2-12\sin\alpha\cos\alpha$.

2. Найдите значение выражения $3\cos\alpha - 2$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \alpha \in I$ ч. 3. Упростите выражения: а) $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot tg(2\pi-\alpha)}{ctg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin(\pi-\alpha)}$; б) $2\cos 210^\circ - 2\sin 150^\circ - ctg135^\circ$. 4. Найдите значение выражения $3+8tg^2 x\cdot\cos^2 x$, если $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 5. Вычислите : $\frac{\sin 10^\circ \cos 80^\circ + \cos 10^\circ \sin 80^\circ}{\cos 10^\circ \cos 35^\circ - \sin 10^\circ \sin 35^\circ}$. 6. Найдите $\sin(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha = \frac{1}{2}, \ \frac{3\pi}{2} \langle \alpha \langle 2\pi$ и $\sin\beta = \frac{3}{4}, 0 \langle \beta \langle \frac{\pi}{2}$.	2. Найдите значение выражения $2-5\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}, \quad \alpha \in I$ ч. 3. Упростите выражения: а) $\frac{ctg(2\pi+\alpha)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(\pi-\alpha)\cdot tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$; б) $\sin 330^\circ + \cos 240^\circ - ctg150^\circ$. 4. Найдите значение выражения $6-2ctg^2 x\cdot\sin^2 x$, если $\cos x = 0{,}2$. 5. Вычислите : $\frac{\cos 52^\circ \cos 7^\circ + \sin 52^\circ \sin 7^\circ}{\sin 29^\circ \cos 16^\circ + \sin 16^\circ \cos 29^\circ}$ 6. Найдите $\cos(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha = \frac{4}{5}, 0 \langle \alpha \langle \frac{\pi}{2}$ и $\cos\beta = \frac{1}{2}, \ 0 \langle \beta \langle \frac{\pi}{2}$.

ТЕМА 5. КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 47

Тема: Прямоугольная система координат в пространстве.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

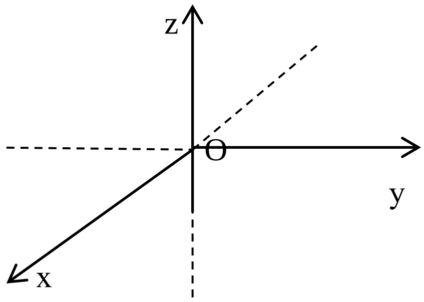
Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- прямоугольная система координат в пространстве;
- расстояние между точками;
- координаты середины отрезка.

2. Выполнить задания практической работы.

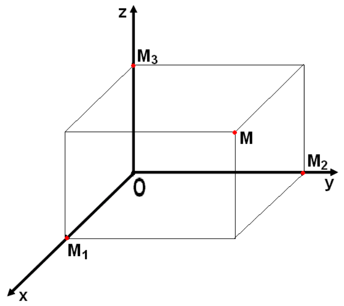
Теория.



Прямоугольной системой координат в пространстве называется тройка взаимно перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат. Общее начало координат обозначается буквой О.

Ох – ось абсцисс, Оу – ось ординат,

Oz – ось аппликат

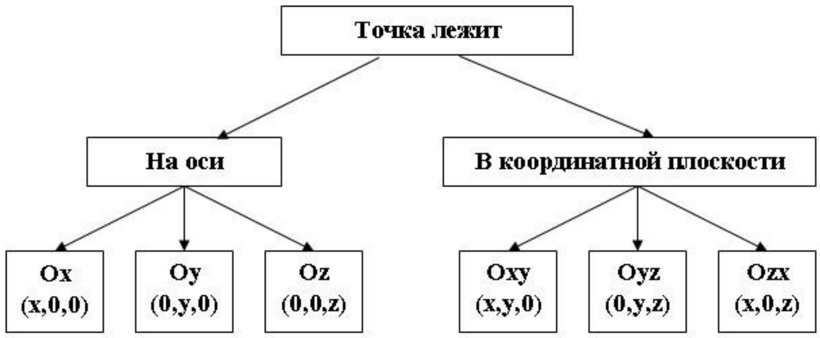


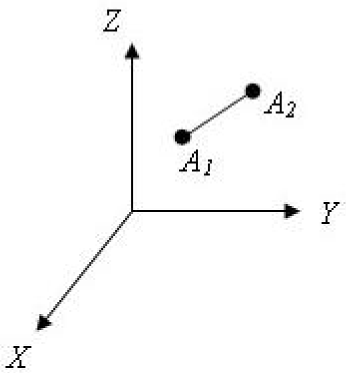
Три плоскости, проходящие через оси координат Ох и Оу, Оу и Оz, Оz и Ох, называются координатными плоскостями: Оху, Оуz, Оzх.

В прямоугольной системе координат каждой точке М пространства сопоставляется тройка чисел – её координаты.

М (х,у,z), где х – абсцисса, у – ордината, z - аппликата.

В зависимости от того где располагается точка в пространстве она будет иметь координаты:





Расстояние между точками.

Есть две произвольные точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$ и $A_2(x_2;y_2;z_2)$

Тогда расстояние между точками A_1 и A_2 вычисляется так:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Координаты середины отрезка в пространстве

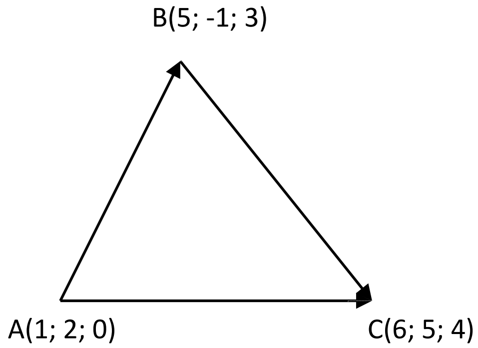
Есть две произвольные точки $A_1(x_1;y_1;z_1)$ и $A_2(x_2;y_2;z_2)$. Тогда серединой отрезка A_1A_2 будет точка С с координатами x, y, z, где:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Пример 1: Вершины треугольника имеют координаты A(1; 2; 0), B(5; -1; 3), C(6; 5; 4). Найдите длины сторон треугольника ABC.
Решение.



Найдем длины каждого вектора. Это и будет длины сторон треугольника ABC.

$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9+9} = \sqrt{34}$ - длина стороны AB

$\left|\overline{BC}\right| = \sqrt{1^2 + 6^2 + 1^2} = \sqrt{1+36+1} = \sqrt{38}$ - длина стороны BC

$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{25+9+16} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ - длина стороны AC

Ответ: $AB = \sqrt{34}, BC = \sqrt{38}, AC = 5\sqrt{2}$.

Пример 2: Даны координаты точек *A (1; 2; - 3), B (4; 6; - 2), C (4; 14; - 11)*. Найдите длину медианы *CM.* и площадь треугольника ABC.

Решение: 1). Точка M - середина отрезка AB, найдём её координаты:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1+4}{2} = 2{,}5; \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+6}{2} = 4; \quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{-3-2}{2} = -2{,}5.$$

Найдём длину медианы *CM:* $|CM| = \sqrt{(2{,}5-4)^2 + (4-14)^2 + (-2{,}5+11)^2} = \sqrt{174{,}5} \approx 13{,}21$.

2). Площадь треугольника найдём по формуле Герона:

$S = \sqrt{p(p - |AB|)(p - |BC|)(p - |AC|)}$, где $p = \dfrac{|AB| + |BC| + |AC|}{2}$.

$$|AB| = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2 + (-2-(-3))^2} = \sqrt{26} \approx 5.09$$

$$|BC| = \sqrt{(4-4)^2 + (14-6)^2 + (-11-(-2))^2} = \sqrt{145} \approx 12{,}04$$

$$|AC| = \sqrt{(4-1)^2 + (14-2)^2 + (-11-(-3))^2} = \sqrt{217} \approx 14{,}73$$

$$p = \frac{5{,}09 + 12{,}04 + 14{,}73}{2} = \frac{31{,}86}{2} = 15{,}93$$

$$S = \sqrt{15{,}93(15{,}93-5{,}09)(15{,}93-12{,}04)(15{,}93-14{,}73)} = \sqrt{15{,}93 \cdot 10{,}84 \cdot 3{,}89 \cdot 1{,}2} \approx \sqrt{806{,}08} \approx 28{,}39$$

Ответ: $|CM| \approx 5{,}339$, $S \approx 28{,}39$.

Задания практической работы.

Погорелов А.В. Геометрия. Учебник для 10-11 классов. ...Учебник для 7 - 11классов общеобразовательных учреждений. 13-е изд. - М.: 2014
стр 54 выполнить задания: № 2, 4, 5, 6, 7, 9.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 48

Тема: Решение примеров по теме: «Прямоугольная система координат в пространстве».
Время выполнения: 2 ч.
Цель:
1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:
- прямоугольная система координат в пространстве;
- расстояние между точками;
- координаты середины отрезка.

2. Выполнить задания практической работы.
3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Задания практической работы.

1. В параллелограмме АВСД диагонали пересекаются в точке О; А(1; 3; - 1), В(- 2; 1; 0), О(0; 1,5; 0). Найдите а) координаты вершин С и Д; б) длину стороны ВС.
2. Дан равнобедренный треугольник АВС (АС = СВ), А(1; - 2; 1), В(3; 2; - 3). Вершина С лежит на оси *y*. найдите площадь треугольника АВС.
3. Точки А(1; 1; 5), В(4; 7; 5), С(8; 5; 5), Д(5; - 1; 5) являются вершинами прямоугольника АВСД. Найдите его площадь и периметр.
4. В треугольнике АВС : ВС = АС$\sqrt{3}$, А(1; - 1; 1), В(- 1; - 1; 3). Вершина С лежит на отрицательной полуоси Oz. Найдите длину медианы СМ.
5. Точки А(14; - 8; - 1), В(7; 3; - 1), С(- 6; 4; - 1), Д(1; - 7; - 1) являются вершинами ромба АВСД. Определите длины его диагоналей и периметр.
6. Даны точки Е(1; - 2; 2), F(3; 0; 2), К(0; - 2; 3), Т(2; 4; 1). Найдите расстояние между серединами отрезков ЕF и КТ.
7. Дан равнобедренный треугольник АВС (АС = СВ), А(- 2; 2; 4), В(- 3; - 4; - 1). Вершина С лежит на оси z. Найдите площадь треугольника АВС.
8. Точки А(4; 2; - 6), В(18; 8; - 4), С(4; 2; - 6), Д(22; - 4; - 4) являются вершинами ромба АВСД. Определите длины его диагоналей и периметр.
9. Точки А(2; 2; 3), В(3; 4; - 5), С(0; 5; - 2), Д(2; 3; - 10) являются вершинами прямоугольника АВСД. Найдите его площадь и периметр.
10. В треугольнике АВС : ВС = АС , А(1; - 4; 3), В(3; - 8; 3). Вершина С лежит на оси Оу. Найдите длину медианы СМ.

Выполнить задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Декартовы координаты в пространстве».	
1. вариант	**2 вариант**
1. Точки А(2; 2; 3), В(1; 4; - 5), С(0; 5; - 2), Д(6; - 1; 1) являются вершинами прямоугольника АВСД. Найдите его площадь и периметр. 2. В треугольнике АВС : ВС = АС $\sqrt{2}$, А(1; - 2; 2), В(- 2; - 3; 4). Вершина С лежит на оси О*у*. Найдите длину медианы СМ.	1. Дан равнобедренный треугольник АВС (АС = СВ), А(2; - 2; 4), В(3; 4; - 1). Вершина С лежит на оси *z*. Найдите площадь треугольника АВС. 2. Точки А(7; - 4; - 0,5), В(3,5; 1,5; - 0,5), С(- 3; 2; - 0,5), Д(0,5; - 3,5; - 0,5) являются вершинами ромба АВСД. Определите длины его диагоналей и периметр.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 49

Тема: Параллельный перенос в пространстве.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

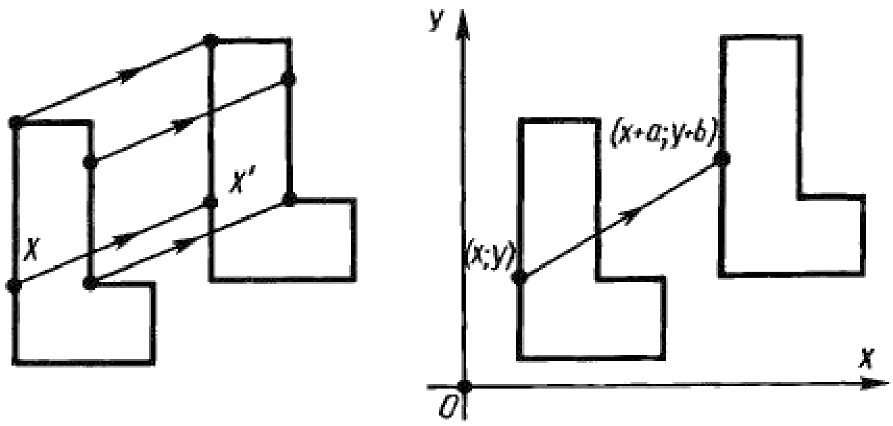
- понятие параллельного переноса в пространстве;
- свойства параллельного переноса .

3. Выполнить задания практической работы.

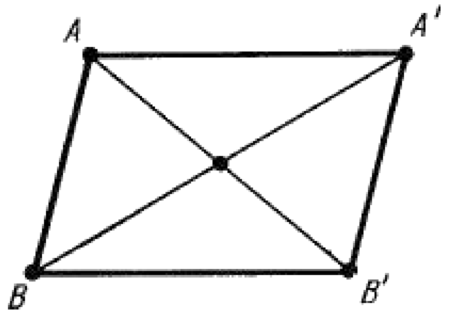
Теория.

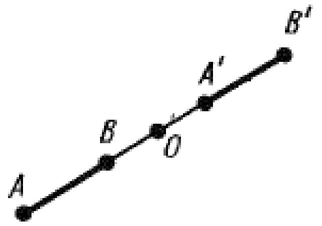
Введем на плоскости декартовы координаты x, y. Преобразование фигуры F, при котором произвольная ее точка (x; y) переходит в точку (x + a; y + b), где a и b одни и те же для всех точек (x; y), называется параллельным переносом (рис. 199). Параллельный перенос задается формулами x' = x + a, y' = y + b.

Эти формулы выражают координаты x', y' точки, в которую переходит точка (x; y) при параллельном переносе.



Свойства, которыми обладает параллельный перенос в пространстве:
• параллельный перенос является движением;
• при выполнении этого действия все точки смещаются по параллельным прямым и притом на одно и то же расстояние;
• при таком переносе прямая имеет свойство переходить в такую же параллельную прямую или в себя саму;
• независимо от того, какими точками были A и A', но точка A переходит в точку A'.
• при параллельном переносе в пространстве, в любом случае плоскость имеет свойство переходить в себя саму или же такую же параллельную ей плоскость.





Действительно, две произвольные точки A(x_1; y_1) к B (x_2; y_2) переходят при параллельном переносе в точки A' (x_1 +a; y_1 + b), B'(x_2 + a; y_2+b). Поэтому $AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

$A'B''^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

Отсюда AB=A'B'. Таким образом, параллельный перенос сохраняет расстояния, а значит, является движением.

Действительно, пусть точки A (x_1; y_1) и B (x_2; y_2) переходят в точки A'(x_1+a; y_1 + b) и B' (x_2 + a; y_2 + b) (рис. 200). Середина отрезка AB' имеет координаты

$$x=\frac{x_1+x_2+a}{2},\ y=\frac{y_1+y_2+b}{2}.$$

Те же координаты имеет и середина отрезка A'B. Отсюда следует, что диагонали четырехугольника AA'B'B пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Значит, этот четырехугольник — параллелограмм. А у параллелограмма противолежащие стороны A A' и BB' параллельны и равны.

Замечание. В предыдущем доказательстве предполагалось, что точка B не лежит на прямой AA'. В случае, когда точка B лежит на прямой AA', точка B' тоже лежит на этой прямой, так как середина отрезка AB' совпадает с серединой отрезка BA' (рис. 201). Значит, все точки A, B, A', B' лежат на одной прямой. Далее,

$$AA'=\sqrt{(x_1+a-x_1)^2+(y_1+b-y_1)^2}=\sqrt{a^2+b^2},$$
$$BB'=\sqrt{(x_2+a-x_2)^2+(y_2+b-y_2)^2}=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Таким образом, в этом случае точки A и B смещаются по прямой AB на одно и то же расстояние $\sqrt{a^2+b^2}$, а прямая AB переходит в себя.

Задания практической работы.

Погорелов А.В. Геометрия. Учебник для 10-11 классов. ...Учебник для 7 - 11классов общеобразовательных учреждений. 13-е изд. - М.: 2014
стр 55 выполнить задания: № 17, 18, 24, 25.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 50

Тема: Векторы в пространстве.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- понятие вектора в пространстве;
- свойства векторов.

2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Понятие вектора.

Величины, которые характеризуются, не только *числом,* но еще *и направлением,* называются *векторными величинами* или просто векторами. Векторами являются, например, скорость, ускорение, сила. Геометрически векторы изображаются направленными отрезками. Направленный отрезок называется *вектором.*

Если начало вектора – точка *A*, а его конец – точка *B*, то вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$.

Действия над векторами в пространстве.

Пусть в пространстве даны векторы $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, тогда:

- Сумма векторов $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}\,(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$;
- При умножении вектора $\vec{a}$ на число λ получится вектор $\overrightarrow{\lambda a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$;
- Длина вектора $\vec{a}$: $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$;
- Скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\widehat{ab}\right)$ или

  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$.
- Если вектора перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

Пусть даны в пространстве точки с координатами *A(a_1; a_2; a_3), B(b_1; b_2; b_3), C(c_1; c_2; c_3),* тогда:

- Координаты вектора $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1\,; b_2 - a_2\,; b_3 - a_3\,)$;
- Длина вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$;
- Угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$: $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|}$.

- Координаты точки O - середины отрезка AB:

  $$x_o = \frac{x_a + x_b}{2}; \quad y_o = \frac{y_a + y_b}{2}; \quad z_o = \frac{z_a + z_b}{2}.$$

- Условие коллинеарности векторов: векторы коллинеарны, если их соответствующие координаты пропорциональны.

  $\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\bar{b}(b_1; b_2; b_3)$; $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

- Условие перпендикулярности векторов: векторы перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю. $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \Rightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$ или $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

Пример 1: $\bar{a}(2;-3;1)$; $\bar{b}(0;1;4)$, тогда $\bar{a} + \bar{b} = (2+0;-3+1;1+4) = (2;-2;5)$

Пример 2: $\bar{a}(2;-3;1)$; $\bar{b}(0;1;4)$, тогда $\bar{a} \cdot \bar{b} = 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 0 - 3 + 4 = 1$

Пример 3: Выяснить при каких значениях m и n данные векторы коллинеарные:

$\bar{a}(m; 2; 5)$ и $\bar{b}(1; -1; n)$.

Решение.

У коллинеарных векторов соответствующие коэффициенты пропорциональны. Запишем соответствующую пропорцию, из которой найдем m и n:

$\frac{m}{1} = \frac{2}{-1} = \frac{5}{n}$, откуда $m = \frac{2 \cdot 1}{-1} = -2;\quad n = \frac{5 \cdot (-1)}{2} = -\frac{5}{2} = -2.5$

Ответ: m = -2, n = -2.5.

Задания практической работы.

Погорелов А.В. Геометрия. Учебник для 10-11 классов. ...Учебник для 7 - 11классов общеобразовательных учреждений. 13-е изд. - М.: 2014

стр 55 выполнить задания: № 52, 53. 54. 55 (а, б), 56, 59, 60

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 51

Тема: Действия над векторами в пространстве.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- понятие вектора в пространстве;
- свойства векторов.

2 Выполнить задания практической работы.

3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

Действия над векторами в пространстве.

Пусть в пространстве даны векторы $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, тогда:

- Сумма векторов $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}\,(a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3)$;
- При умножении вектора $\vec{a}$ на число λ получится вектор $\overrightarrow{\lambda a}=(\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3)$;
- Длина вектора $\vec{a}$: $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$;
- Скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\widehat{ab}\right)$ или

  $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3$.
- Если вектора перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

Пусть даны в пространстве точки с координатами *A(* a_1*;* a_2*;* a_3 *), B(* b_1*;* b_2*;* b_3 *), C(* c_1*;* c_2*;* c_3 *),* тогда:

- Координаты вектора $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1\,;\ b_2-a_2\,;\ b_3-a_3)$;
- Длина вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$;
- Угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$: $\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}$.
- Координаты точки *O* - середины отрезка *AB*:

  $x_o=\dfrac{x_a+x_b}{2};\quad y_o=\dfrac{y_a+y_b}{2};\quad z_o=\dfrac{z_a+z_b}{2}$.

<u>Пример 1:</u> Даны векторы $\overline{a}\,(5;3;0)$; $\overline{b}\left\{\frac{1}{2};-2;-4\right\}$; $\overline{c}\,(-3;1;1)$; $\overline{d}\,(-1;1;-1)$; $\overline{k}\,(0;0;1)$

Вычислить $|(2\overline{a}+\overline{k})|-4(2\overline{b}-\overline{c})\overline{d}$

Решение.

$2\overline{a}\,(5\cdot 2;\ 3\cdot 2;\ 0\cdot 2)\Rightarrow 2\overline{a}=(10\,;\,6\,;\,0)$

$2\overline{a}+\overline{k}=(10+0\,;\,6+0\,;\,0+1)\Rightarrow 2\overline{a}+\overline{k}=(10\,;\,6\,;\,1)$

$\left|2\overline{a}+\overline{k}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{10^2+6^2+1^2}=\sqrt{100+36+1}=\sqrt{137}$

$2\overline{b}\left\{2\cdot\frac{1}{2}\,;\,2\cdot(-2)\,;\,2\cdot(-4)\right\}\Rightarrow 2\overline{b}=(1\,;\,-4\,;\,-8)$

$2\overline{b}-\overline{c}=(1-(-3)\,;\,-4-1\,;\,-8-1)\Rightarrow 2\overline{b}-\overline{c}=(4\,;\,-5\,;\,-9)$

$4(2\overline{b}-\overline{c})=(4\cdot 4\,;\,4\cdot(-5)\,;\,4\cdot(-9))\Rightarrow 4(2\overline{b}-\overline{c})=(16\,;\,-20\,;\,-36)$

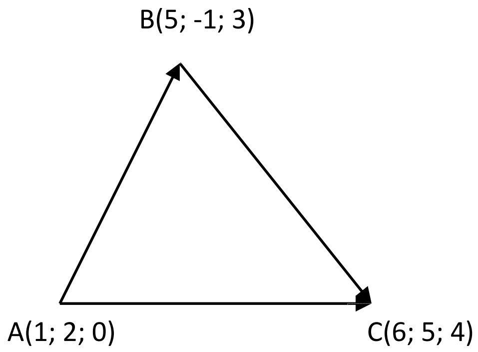
Так как $4(2\overline{b}-\overline{c})\overline{d}$ - это скалярное произведение векторов, то по формуле скалярного произведения $\overline{a}\cdot\overline{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ получим:

$4(2\overline{b}-\overline{c})\overline{d}=16\cdot(-1)+(-20)\cdot 1+(-36)\cdot(-1)=-16-20+36=0$

Тогда $|(2\overline{a}+\overline{k})|-4(2\overline{b}-\overline{c})\overline{d}=\sqrt{137}+0=\sqrt{137}$

Ответ: $|(2\overline{a}+\overline{k})|-4(2\overline{b}-\overline{c})\overline{d}=\sqrt{137}$

<u>Пример 2:</u> Вершины треугольника имеют координаты A(1; 2; 0), B(5; -1; 3), C(6; 5; 4). Найдите угол A треугольника ABC.



Найдем координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$

$\overline{AB}\{5-1;-1-2;3-0\} \Rightarrow \overline{AB}\{4;-3;3\}$

$\overline{AC}\{6-1;5-2;4-0\} \Rightarrow \overline{AC}\{5;3;4\}$

Найдем длины этих векторов. Это и будет длины сторон треугольника ABC.

$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{4^2+(-3)^2+3^2} = \sqrt{16+9+9} = \sqrt{34}$ – длина стороны AB

$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{5^2+3^2+4^2} = \sqrt{25+9+16} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ – длина стороны AC

1. Найдем угол BAC – это угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

$$\cos BAC = \frac{4\cdot 5+(-3)\cdot 3+3\cdot 4}{\sqrt{34}\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{20-9+12}{5\sqrt{68}} = \frac{23}{10\sqrt{17}}.$$

$$\angle A = \arccos\frac{23\sqrt{17}}{170}.$$

Задания практической работы.

1. Даны векторы $\vec{a}$ (5; - 1; 3), $\vec{b}$ (- 5; 1; 0), $\vec{c}$ (- 1; - 2; 1). Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, $\vec{a}$ и $\vec{c}$.
2. Даны векторы $\vec{a}$(5; - 1; 7), $\vec{b}$(- 2; 3; 1), $\vec{c}$(- 3; 2; 1). Найдите: а) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$; б) $\left|\vec{a}\right|+\left|\overrightarrow{b}\right|$; в) $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$; г) $\left|\vec{a}\right|-\left|\overrightarrow{b}\right|$; д) $\left|\overrightarrow{3c}\right|$;
3. Известно, что $\vec{m}=7\vec{a}+2\vec{b}$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если $\vec{b}$ (-1; 5; 3) и $\vec{m}$ (0; 1; 8).
4. При каких значениях *n* векторы $\vec{a}$ (3; *n*; 5) и $\vec{b}$ (- 4; 3; *n*) перпендикулярны?
5. Коллинеарны ли векторы: а) a (-5;3;-1) и b(-10; 6;-2); b) c(-6;3;-1) и d(2; -9;3).
6. Докажите, что в четырехугольнике ABCD диагонали перпендикулярны.

№	***A***			***B***			***C***			***D***		
	x	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***
1	4	2	-6	18	8	-4	7	7	-4	54	-10	-13
2	3	-4	5	-19	-6	5	6	1	7	-23	-4	6

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Векторы в пространстве».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Даны точки *M (3 ; 0 ; -1), К (1 ; 3 ; 0), С (4 ; -1 ; 2).* Найдите на оси *x* такую точку *А*, чтобы векторы $\overline{MK}$ и $\overline{CA}$ были коллинеарны. 2. При каких значениях *n* векторы $\overline{a}\ (n\ ; -3 ; 1)$ и $\overline{b}\ (2n\ ; n\ ; 1)$ перпендикулярны? 3. Найдите косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CД}$, если *А (0 ; 1 ;-1), В (1 ; -1 ; 2), С (3 ; 1 ; 0), Д(2 ; -3 ; 1).*	1. При каких значениях *m* и *n* векторы $\overline{a}(n\ ; 2\ ; 1)$ и $\overline{b}(2\ ; 4\ ; m)$ коллинеарны. 2. В треугольнике АВС найдите косинус угла *С*, если *А (0 ; 1 ;-1), В (1 ; -1 ; 2), С(3 ; 1 ; 0).* 3. Даны точки *M (3 ; 0 ; -1), К (1 ; 3 ; 0), С (4 ; -1 ; 2).* Найдите на оси *x* такую точку *А*, чтобы векторы $\overline{MK}$ и $\overline{CA}$ были перпендикулярны.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 52

Тема: Решение задач по теме: «Действия над векторами в пространстве».

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- понятие вектора в пространстве;
- действия над векторами в пространстве.

2 Выполнить задания практической работы.
3 Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

Действия над векторами в пространстве.

Пусть в пространстве даны векторы $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, тогда:

- Сумма векторов $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$;
- При умножении вектора $\vec{a}$ на число λ получится вектор $\overrightarrow{\lambda a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$;
- Длина вектора $\vec{a}$: $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$;

- Скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\widehat{ab}\right)$ или

  $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3$.

- Если вектора перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю.

Пусть даны в пространстве точки с координатами $A(a_1; a_2; a_3)$, $B(b_1; b_2; b_3)$, $C(c_1; c_2; c_3)$, тогда:

- Координаты вектора $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1;\, b_2 - a_2;\, b_3 - a_3)$;

- Длина вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$;

- Угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$: $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}$.

- Координаты точки O - середины отрезка AB:
  $x_o = \dfrac{x_a + x_b}{2};\quad y_o = \dfrac{y_a + y_b}{2};\quad z_o = \dfrac{z_a + z_b}{2}$.

Задания практической работы.

1. При каких значениях m и n векторы $\vec{a}$ (m; 2; 3), и $\vec{b}$ (- 12; 6; n), коллинеарны?
2. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$:

№	***A***			***B***			***C***			***D***		
	x	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***	***x***	***y***	***z***
1	2	-3	1	6	1	-1	4	8	-9	2	-1	2
2	5	-1	-4	9	3	-6	7	10	-14	5	1	-3

Найдите: координаты векторов и модули векторов:

1) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$
2) $\vec{a} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$; $\vec{b} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; $\vec{c} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$; $\vec{d} = -\overrightarrow{AB}$; $\vec{e} = 2\overrightarrow{DB}$;
3) $\vec{f} = -3\overrightarrow{AC}$; $\vec{g} = 2\overrightarrow{DA} - 3\overrightarrow{DB}$; $\vec{h} = 3\overrightarrow{DC} - 2\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}$;
4) координаты середин сторон треугольника *ABC;*
5) длину медианы *CE;*
6) периметр и площадь треугольника *ABC;*
7) угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Векторы в пространстве».

1 вариант.

Найдите: длину медианы *CE;* периметр и площадь треугольника *ABC;*угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

№	A			B			C		
	x	**y**	**z**	**x**	**y**	**z**	**x**	**y**	**z**
1	*3*	*3*	*-3*	*7*	*7*	*-5*	*5*	*14*	*-13*
2	*4*	*-2*	*5*	*8*	*2*	*3*	*6*	*9*	*-5*

2 вариант.

Найдите: длину медианы *CE;* периметр и площадь треугольника *ABC;*угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

№	A			B			C		
	x	**y**	**z**	**x**	**y**	**z**	**x**	**y**	**z**
1	*-5*	*0*	*1*	*-4*	*-2*	*3*	*6*	*2*	*11*
2	*1*	*-4*	*0*	*2*	*-6*	*2*	*12*	*-2*	*10*

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 53

Тема: Уравнения сферы, плоскости и прямой.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:
- уравнения сферы, плоскости и прямой

2 Выполнить задания практической работы.

Теория.

Уравнение прямой на плоскости.

Определение. Любая прямая на плоскости может быть задана уравнением первого порядка Ax + By + C = 0.

Причем постоянные A, B не равны нулю одновременно. Это уравнение первого порядка называют общим уравнением прямой.

Уравнение прямой может быть представлено в различном виде в зависимости от каких – либо заданных начальных условий.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку M_1 (x_1, y_1) и имеющей заданный нормальный вектор $\bar{n}$ (A ; B).

Определение. Нормальным вектором прямой называется любой ненулевой вектор $\bar{n}$ (A ; B), перпендикулярный этой прямой.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку M_1 (x_1, y_1) и имеющей заданный нормальный вектор $\bar{n}$ (A ; B) имеет вид Ax + By + C = 0.

Пример 1: Найти уравнение прямой, проходящей через точку A(1, 2) перпендикулярно вектору (3, -1).

Решение. Составим при A = 3 и B = -1 уравнение прямой: 3x – y + C = 0. Для нахождения коэффициента С подставим в полученное выражение координаты заданной точки А. Получаем: 3 – 2 + C = 0, следовательно C = - 1. Искомое уравнение: 3x – y – 1 = 0.

Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пусть заданы точки M_1 (x_1, y_1) и M_2 (x_2, y_2), тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки имеет вид: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

*Пример 2:*Составить уравнение прямой, проходящей через точки А (2; 3) и В (7; 5).

Решение.

$$\frac{x-2}{7-2}=\frac{y-3}{5-3}$$

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{2}$$

$$2(x-2)=5(y-3)$$

$$2x-4=5y-15$$

$$2x-4-5y+15=0$$

$$2x-5y+11=0$$

Следовательно, искомое уравнение прямой $2x-5y+11=0$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку M_1 (x_1, y_1) и имеющей заданный направляющий вектор $\bar{n}$ (a ; b).

Определение. Направляющим вектором прямой называется любой ненулевой вектор $\bar{n}$ (*a* ; *b*), параллельный этой прямой.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку M_1 (x_1, y_1) и имеющей заданный направляющий вектор $\bar{n}$ (A ; B) имеет вид $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}$

Пример 3: Найти уравнение прямой с направляющим вектором (1, -1) и проходящей через точку A(1, 2).

Решение. Уравнение искомой прямой будем искать в виде:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}$$
$$-1(x-1)=1(y-2)$$
$$-x+1=y-2$$
$$-x+1-y+2=0$$
$$-x-y+3=0$$
$$x+y-3=0$$

Тогда уравнение прямой имеет вид: $x + y - 3 = 0$.

Условие параллельности прямых.

Две прямые параллельны только тогда, когда коэффициенты при соответствующих координатах пропорциональны, т.е. $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$.

Пример 4: Являются ли данные прямые параллельными : $\begin{cases} 2x-3y+5=0 \\ 6x-9y=1=0 \end{cases}$?

Решение: Прямые параллельны, если выполняется условие $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$. В нашем случае $A_1 = 2, A_2 = 6, B_1 = -3, B_2 = -9$. Тогда $\frac{2}{6}=\frac{-3}{-9}$ и, сокращая полученные дроби, получим $\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$. Следовательно, прямые параллельны.

Условие перпендикулярности прямых.

Две прямые перпендикулярны только тогда, когда коэффициенты при соответствующих координатах удовлетворяют равенству $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$.

Пример 5: Являются ли данные прямые перпендикулярными : $\begin{cases} 2x+3y-7=0 \\ 3x-2y=0 \end{cases}$?

Решение: Прямые перпендикулярны, если выполняется условие $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$. В нашем случае $A_1 = 2, A_2 = 3, B_1 = 3, B_2 = -2$. Тогда $2\cdot 3+3\cdot(-2)=0$ и, вычисляя, получим $6 – 6 = 0$. Следовательно, прямые перпендикулярны.

Угол между прямыми определяется по формуле: $\cos\varphi=\left|\frac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right|\cdot\left|\overline{n_2}\right|}\right|$, где n_1 и n_2 нормальные векторы прямых.

Пример 6: Найти угол между прямыми $18x+6y-17=0$ и $14x-7y+15=0$.

Решение: $\overline{n_1}$ = (18; 6), $\overline{n_2}$ = (14; - 7). Тогда $\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}=18\cdot 14+6\cdot(-7)=210$, $\left|\overline{n_1}\right|=\sqrt{18^2+6^2}=\sqrt{360}=18{,}97$, $\left|\overline{n_2}\right|=\sqrt{14^2+(-7)^2}=\sqrt{245}=15{,}65$.

Отсюда $\cos\varphi = \dfrac{210}{18{,}97 \cdot 15{,}65} = 0{,}7$.

Общее уравнение плоскости в декартовой системе координат.

$$Ax + By + Cz + D = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

при этом вектор с координатами (A, B, C) является нормальным вектором к плоскости.

Пример 7: Принадлежат ли точки $M_0\ (1;\ -1;\ -3)$ и $K_0\ (1;\ 2;\ -8)$ и плоскости, общее уравнение которой имеет вид $2x + 3y - z - 2 = 0$.

Решение Подставим координаты точки M_0 в общее уравнение плоскости: $2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) - (-3) - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0$. В результате приходим к верному равенству, следовательно, точка $M_0\ (1;\ -1;\ -3)$ лежит в плоскости.

Проделаем такую же процедуру с координатами точки K_0: $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - (-8) - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 14 \neq 0$. Получаем неверное равенство, поэтому, точка $K_0\ (1;\ 2;\ -8)$ не лежит в плоскости, определенной общим уравнением плоскости $2x + 3y - z - 2 = 0$.

Ответ M_0 лежит в плоскости, а K_0 – не лежит.

Общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей направляющий вектор плоскости $\overline{n}\ (A;\ B;\ C)$.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей заданный направляющий вектор $\overline{n}\ (A;\ B;\ C)$ имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Пример 8: Напишите уравнение плоскости, если в прямоугольной системе координат *Oxyz* в пространстве она проходит через точку $M_0(-1; 2; -3)$, а $\overline{n} = (3;\ 7;\ -5)$ - нормальный вектор этой плоскости.

Решение: Из условия имеем $x_0 = -1,\ y_0 = 2, z_0 = -3,\ A = 3,\ B = 7,\ C = -5.$ Подставляем эти данные в общее уравнение плоскости $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, проходящей через точку

$3(x - (-1)) + 7(y - 2) - 5(z - (-3)) = 0$

$3x + 3 + 7y - 14 - 5z - 15 = 0$

$3x + 7y - 5z - 26 = 0$

Ответ: уравнение плоскости $3x + 7y - 5z - 26 = 0$.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки.

Пусть заданы точки $M_1\ (x_1,\ y_1)$ и $M_2\ (x_2,\ y_2)$, тогда уравнение прямой, проходящей через эти точки имеет вид: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.

Задания практической работы.

1. Дан треугольник *ABC* с вершинами $A\ (-3;\ -1),\ B\ (-1;\ 2),\ C\ (2;\ 0)$.

Составьте:

1. Уравнение медианы *АД;*
2. Уравнение прямой, проходящей через точку *А* параллельно прямой *ВС;*
3. Уравнение прямой, проходящей через точку *В* перпендикулярно *АС;*
4. Найдите углы треугольника.

2. Определите взаимное расположение прямых.

а) $\begin{cases} 5x-3y+6=0 \\ 3x+5y-8=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 8x-6y+9=0 \\ 4x-3y-7=0 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 3x+2y-5=0 \\ 2x-y+4=0 \end{cases}$.

3. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-3;0;1)$, $B(2;1;-1)$ и $C(-2;2;0)$.

4. Составить уравнение плоскости , проходящей через точку *М (3; -1; 2)* параллельно плоскости $2x-y+z=1=0$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 54

Тема: Контрольная работа по теме: «Координаты и векторы в пространстве».

Время выполнения: 2 ч.

Цель: проконтролировать знания студентов по теме: «Координаты и векторы в пространстве».

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- действия над векторами в пространстве;
- координаты середины отрезка, длины отрезка;
- уравнения прямой и плоскости.

2. Выполнить задания контрольной работы.

Контрольная работа по теме: «Координаты и векторы в пространстве».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Даны точки *М (2 ; 1 ; -1), К (- 5 ; 2 ; 0), С (3 ; -1 ;- 2).* Найдите на оси *х* такую точку *А*, чтобы векторы $\overline{MK}$ и $\overline{CA}$ были коллинеарны. 2. При каких значениях n векторы $\bar{a}$ $(n\ ;6;-2)$ и $\bar{b}\,(2n\,;n\,;2)$ перпендикулярны? 3. Найдите косинус угла между	1. При каких значениях m и n векторы $\bar{a}(n\,;3\,;2)$ и $\bar{b}(2\,;6\,;m)$ коллинеарны. 2. В треугольнике АВС найдите косинус угла *С*, если *А (- 2 ; 4 ;1), В (2 ; - 3 ; 0), С(4 ;- 1 ; 0).* 3. Даны точки *М (3 ; 0 ; -2), К (2 ; - 1 ; 0), С (2 ; -1 ; - 3).* Найдите на оси *х* такую точку *А*, чтобы векторы $\overline{MK}$ и $\overline{CA}$ были

векторами $\overline{AB}$ и $\overline{СД}$, если *А (2 ; 3 ;- 4), В(2 ; -1 ; 2), С(3 ; - 1 ; 0), Д(3 ; -3 ; 2).* 4. При каком значении *k* векторы $3\overline{a}+k\overline{b}$ и $\overline{a}+2\overline{b}$ будут перпендикулярны, если $\overline{a}\,(3;0;-2)$, $\overline{b}\,(4;-2;1)$. 5. В параллелограмме АВСД диагонали пересекаются в точке О, причем А (2 ; 1 ; 1), В (- 3 ; 2 ; 4), О (- 1 ; 3 ; - 3). Найдите координаты вершин С и Д и длину стороны ВС.	перпендикулярны. 4. Даны векторы $\overline{a}\,(-2\,;6\,;-4)$, $\overline{b}(4\,;-2\,;6)$ и $\overline{p}(-6\,;-2\,;8)$. Будут ли коллинеарны векторы $\overline{a}+2\overline{b}$ и $\overline{p}$? 5. В треугольнике АВС ВМ – медиана. Найдите координаты точки С и длину стороны ВС, если А (- 1 ; 3 ; 2), В (- 3 ; 2 ; 4), М (2,5 ; 1,5 ; - 2).

ТЕМА 6. ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 55

Тема: Тригонометрические функции и их графики.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

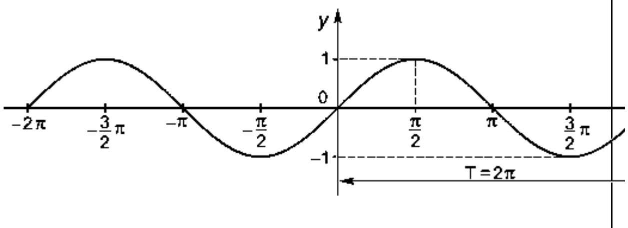
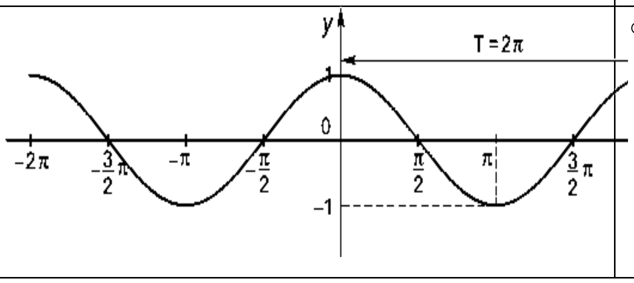
1. Повторить:

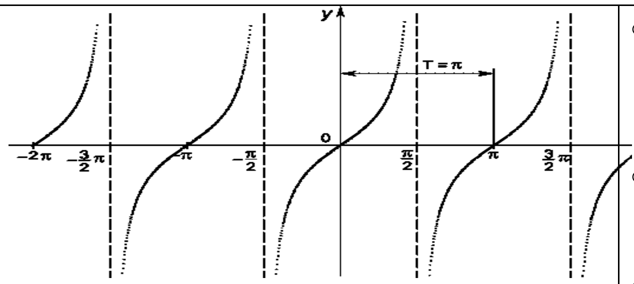
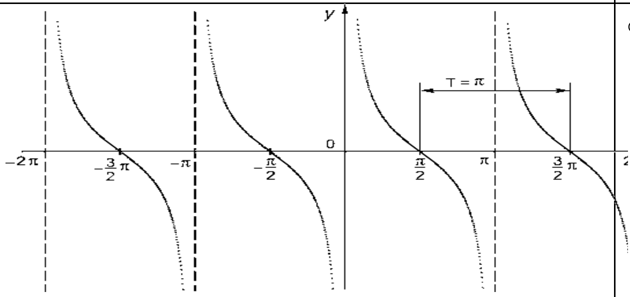
- основные тригонометрические функции.

2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Основные тригонометрические функции.

y = sinx		o Область определения функции множество всех действительных чисел: *D(y)=R.* o Множество значений: *E(y) = [−1;1].* o нечетная: *sin(− x) = − sinx.* o График функции симметричен относительно начала координат.
y = cosx		o Область определения функции — множество всех действительных чисел: *D(y)=R.* o Множество значений: *E(y) = [−1;1].* o четная: *cos(− x) = cosx.* o График функции симметричен относительно оси *OY.*

y = tgx		○ Область определения функции: множество всех действительных чисел: *D(y) = R,* кроме *x=π/2+πk,k∈Z.* ○ Множество значений– множество действительных чисел: *E(y) = R.* ○ нечетная: *tg(−x) = − tgx.* ○ График функции симметричен относительно оси *OY.*
y = ctgx		○ Область определения функции множество всех действительных чисел: D(y)=R, кроме x=πk,k∈Z. ○ Множество значений– множество действительных чисел: E(y)=R. ○ нечетная: ctg(−x)=−ctgx. ○ График функции симметричен относительно оси OY.

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 20: выполнить задания № 36, 37, 38.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 56

Тема: Преобразование графиков.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

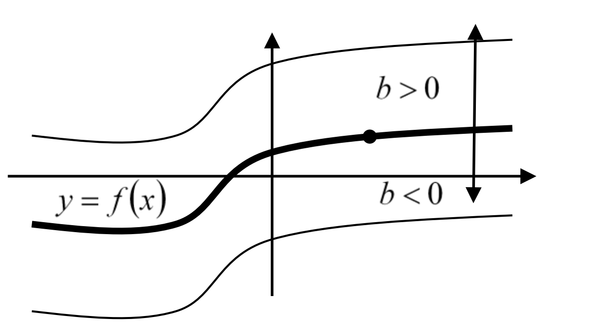
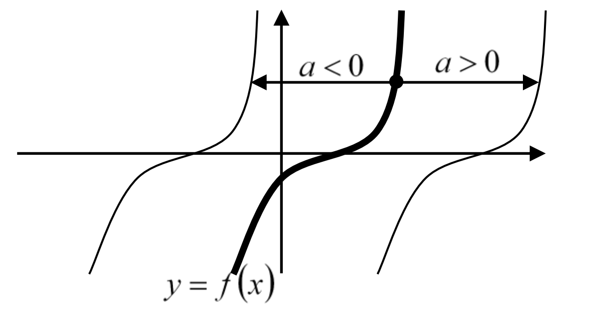
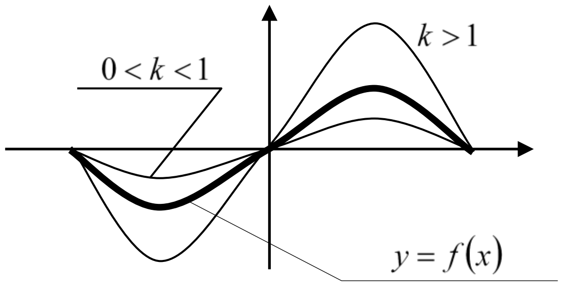
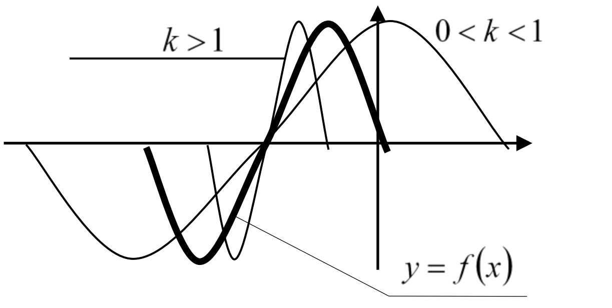
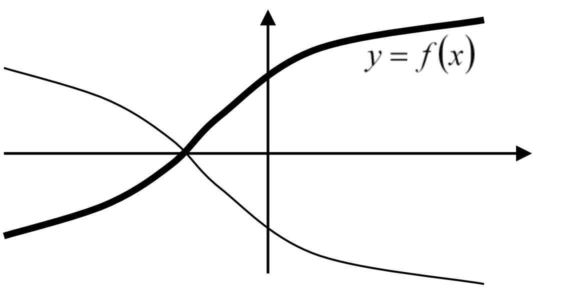
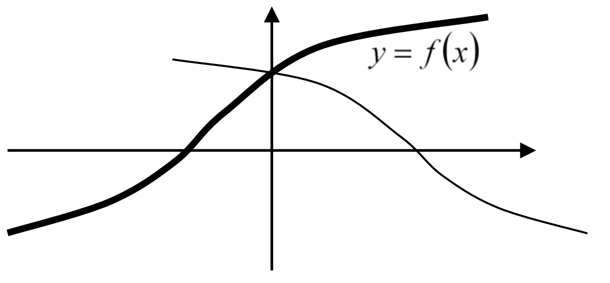
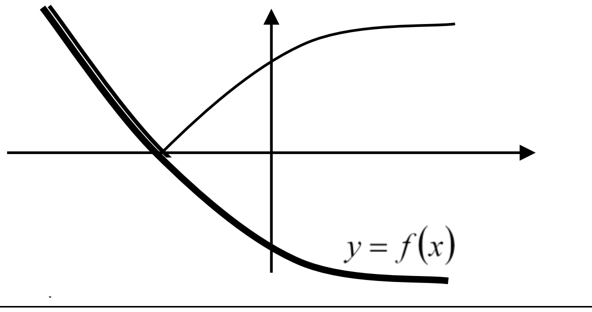
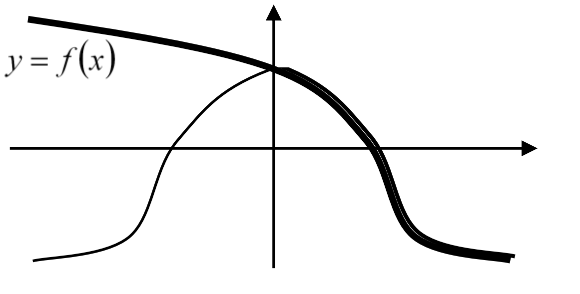
- преобразование графиков функций.

2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Способы получения графиков некоторых функций из графика функции $y=f(x)$

$y=f(x)+b$	Параллельный перенос вдоль оси Оу на *b* единиц	$y=f(x-a)$	Параллельный перенос вдоль оси Ох на *a* единиц

<table>
<tr><td colspan="2">
</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>$y=k\cdot f(x)$
$k>0$</td><td>Растяжение в k раз (сжатие в $1/k$ раз) вдоль оси Oy</td><td>$y=f(kx)$
$k>0$</td><td>Сжатие в k раз (растяжение в $1/k$ раз) вдоль оси Ox</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>$y=-f(x)$</td><td>Симметричное отражение относительно оси Ox</td><td>$y=f(-x)$</td><td>Симметричное отражение относительно оси Oy</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>$y=|f(x)|$</td><td>Симметричное отражение относительно оси Ox части графика, расположенного ниже оси Ox</td><td>$y=f(|x|)$</td><td>Замена части графика, в области $x<0$ симметричным отражением относительно оси Oy части графика расположенного в области $x\geq 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 29: выполнить задания № 49, 50 (б, г).

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 57

Тема: Преобразование графиков тригонометрических функций.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

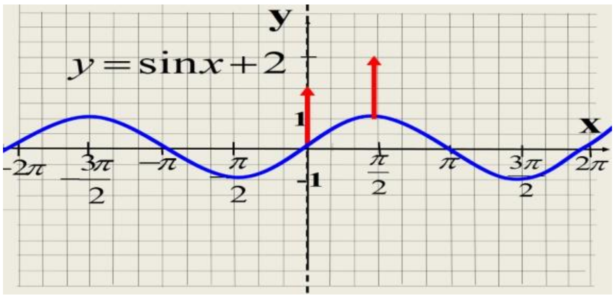
Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

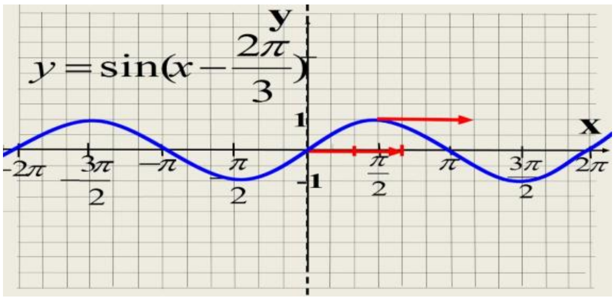
- преобразование графиков тригонометрических функций.

2. Выполнить задания практической работы.

Теория.



Чтобы построить график функции $y = f(x) + b$, надо построить график функции $y = f(x)$, а затем все точки этого графика сдвинуть вдоль оси Oy на $|b|$ единиц: верх, если $b > 0$; вниз, если $b < 0$.



Чтобы построить график функции $y = f(x + a)$, надо построить график функции $y = f(x)$, а затем все точки этого графика сдвинуть вдоль оси Ox на $|a|$ единиц: влево, если $a > 0$; вправо, если $a < 0$.

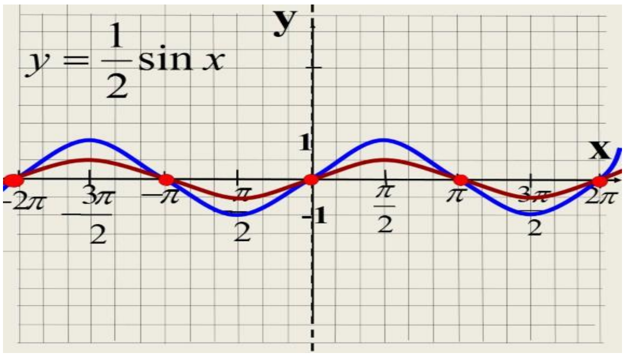


График функции $y = kf(x)$, где $k > 0, k \neq 1$, получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением в k раз вдоль оси Oy при $k > 1$; сжатием в $\frac{1}{k}$ раз при $k < 1$.

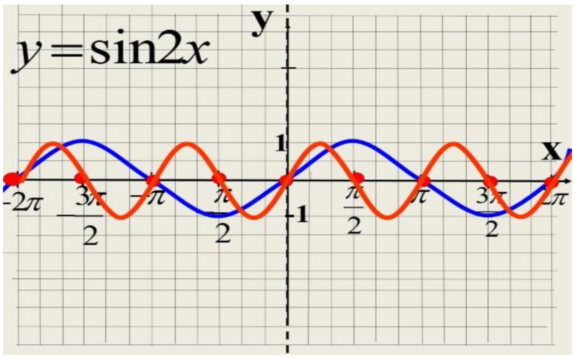


График функции $y = f(mx)$, где $m > 0, m \neq 1$, получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением в $\frac{1}{m}$ раз вдоль оси Ox при $m < 1$; сжатием в m раз при $m > 1$.

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 29: выполнить задания № 45, 48 (б, г).

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 58

Тема: Чётные и нечётные функции. Периодичность тригонометрических функций.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

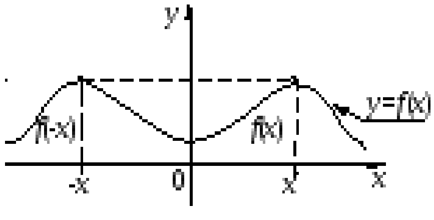
- условие четности (нечетности) функции;
- периодичность тригонометрических функций.

2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

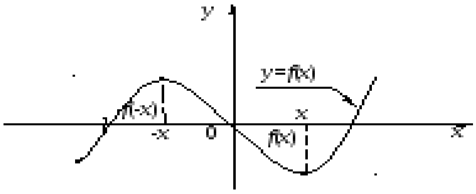
Четные и нечетные функции.

Функция *y = f(x)* называется *четной*, если она не изменяет своего значения при изменении знака аргумента, т.е. *f(- x) = f(x). График четной функции расположен симметрично относительно оси Oy*.



Функция *y = f(x)* называется *нечетной*, если при изменении знака аргумента знак функции меняется на противоположный, а числовое значение её сохраняется, т.е. *f(- x)= - f(x)*..

График нечетной функции расположен симметрично относительно начала координат.



Функция может быть ни четной. ни нечетной, и в этом случае её называют функцией общего вида.

Графики таких функций не симметричны ни относительно оси Oy , ни относительно начала координат.

<u>Пример 1:</u> Определите какая из функций является четной (нечетной): $y=x^4$, $y=x^3$.

Решение:

функция $y=x^4$ четная, т.к. $x^4=(-x)^4$, т.е. $y(-x)=y(x)$, а функция $y=x^3$ является нечетной, т.к. $x^3=(-x)^3=-x^3$, т.е. $y(-x)=-y(x)$.

<u>Пример 2:</u> Докажите, что функция $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x^3-x}$ четная.

Решение: вычислим $f(-x)$:

$$f(-x)=\frac{(-x)^3+(-x)}{(-x)^3-(-x)}=\frac{-x^3-x}{-x^3+x}=\frac{-(x^3+x)}{-(x^3-x)}=-\frac{x^3+x}{x^3-x}=f(x),$$

т.е. $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x^3-x}$ – четная по определению.

<u>Периодические функции.</u>

Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое положительное число $T \neq 0$, что $f(x \pm T) = f(x)$ в области определения функции.

Наименьшее из положительных чисел T, удовлетворяющих условию определения, называется *периодом* функции $f(x)$.

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 35: выполнить задания № 57, 58, 59, 62, 67 (а, б).

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 59

Тема: Возрастание и убывание функций. Экстремумы функции.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

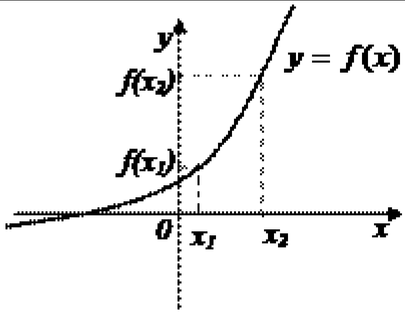
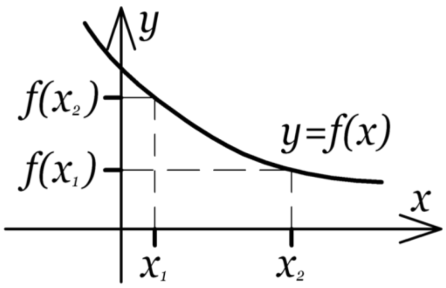
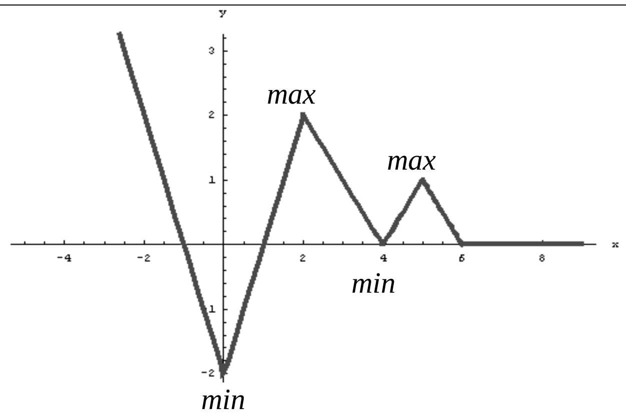
Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- признаки возрастания и убывания функции;
- экстремумы функции.

2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Определение Функция $f(x)$ называется *возрастающей в интервале* (a,b), если при возрастании аргумента x в этом интервале соответствующие значения функции $f(x)$ также возрастают, т.е. если $f(x_2) > f(x_1)$ при $x_2 > x_1$.	
Определение Функция $f(x)$ называется *убывающей в интервале* (a, b) если при возрастании аргумента x в этом интервале соответствующие значения функции $f(x)$ убывают, т.е. если $f(x_2) < f(x_1)$ при $x_2 > x_1$.	
Число M называется максимумом функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x из нее выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$. Число m называется минимумом функци и $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x из нее выполняется неравенство $f(x) \ge f(x_0)$.	

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 44: выполнить задания № 77, 78(а, б). 79 (а, б), 80 (а, б).

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 60

Тема: решение задач по теме: «Возрастание и убывание функций. Экстремумы функции».

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- признаки возрастания и убывания функции;
- экстремумы функции.

2 Выполнить задания практической работы.
3 Выполнить задания самостоятельной работы.

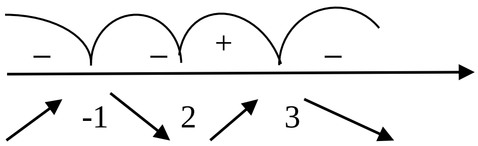
Задания практической работы.

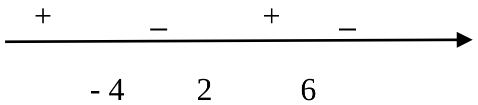
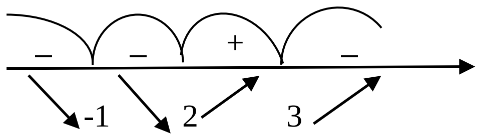
«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

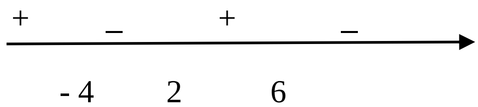
стр 45: выполнить задания № 82 (а, б), 83 (а, б), 84 (а, б), 88 (а, в)

Задания самостоятельной работы.

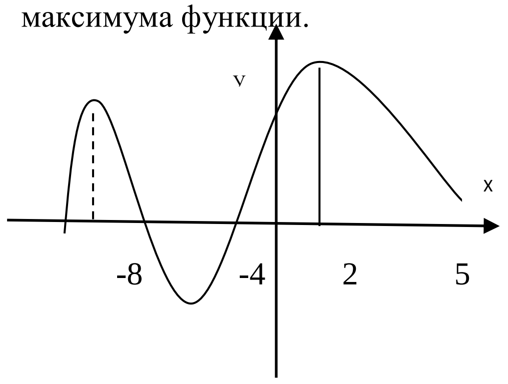
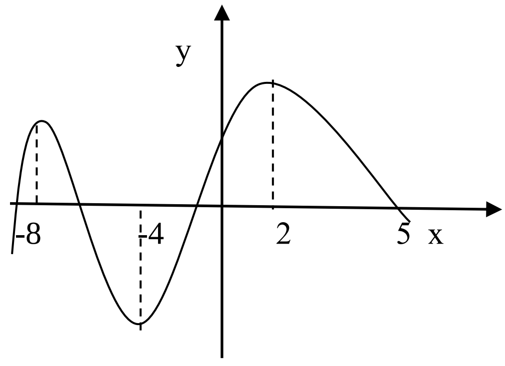
Тест по теме: **«Промежутки возрастания и убывания функции. Точки экстремума функции».**

<table>
<tr><th>1 вариант</th><th>2 вариант</th></tr>
<tr><td>1. На каком числовом интервале стрелки изображены не верно?


а) (2;3]; б) (-∞; -1]; в) [3; +∞);
г) [-1; 2)
2. Указать промежутки <u>возрастания</u> функции.

</td><td>1. На каком числовом интервале стрелочки изображены не верно?


а) (2;3]; б) (-∞; -1]; в) [3; +∞);
г) [-1; 2)
2. Указать промежутки <u>убывания</u> функции.


а) (-∞; -4] и [2; 6); б) (-∞; -4) и (2; 6];</td></tr>
</table>

а) (-∞; -4] и [2; 6); б) (-∞; -4) и (2; 6]; в) [-4; 2] и (6; +∞); г) (-4; 2] и [6; +∞) 3 По ***рис.2*** определить точки минимума функции а) x_{min}= -4; б) x_{min}= 2; в) x_{min}= 6 4 По рисунку определить точки максимума функции.  а) x_{max}= -4; б) x_{max}= -8; в) x_{max}= 2; г) x_{max}= 5 По ***рис 2*** схематически изобразить график	в) [-4; 2] и (6; +∞); г) (-4; 2] и [6; +∞) 3 По ***рис.2*** определить точки максимума функции а) x_{max}= -4; б) x_{max} = 2; в) x_{max} = 6 4 По рисунку определить точки минимума функции.  а) x_{min}= -4; б) x_{min} = -8; в) x_{min} = 2; г) x_{min} = 5 5. По ***рис 2*** схематически изобразить график

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 61

Тема: Исследование функций.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- признаки возрастания и убывания функции;
- экстремумы функции.

2 Выполнить задания практической работы.

Теория.

Чтобы исследовать функцию $y = f(x)$ и построить ее график необходимо:

1) найти область определения функции, то есть множество всех точек для которых существует значение функции;

2) найти (если они существуют) точки пересечения графика с координатными осями. Для этого нужно :

- для отыскания точек пересечения с осью Oy в уравнение $y = f(x)$ подставить аргумент $x = 0;$

- для отыскания точек пересечения с осью Ox решить уравнение $f(x) = 0$.

3) исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность.

1. $f(-x) = f(x)$ – функция четная;

2. $f(-x) = -f(x)$ – функция нечетная;

3. $f(x \pm T) = f(x)$ – функция периодическая, T – период функции.

Таким образом, если имеем четную функцию то достаточно построить ее для положительных значений $x \rangle 0$, после чего отразить ее симметрично относительно оси абсцисс на другую часть. В случае нечетной функции график будет симметричен относительно начала координат. Периодическими являются преимущественно функции составленные из простых тригонометрических и некоторые параметрически заданные функции.

4) найти промежутки знакопостоянства функции;

5) найти интервалы монотонности;

6) найти точки экстремумов и значения функции в этих точках;

7) построить график функции.

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 53: выполнить задания № 96 (а, в), 97 (а, б), 84 (а, в), 99 (б, г)

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 62

Тема: Исследование тригонометрических функций.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- тригонометрические функции;
- графики тригонометрических функцих.

2 Выполнить задания практической работы.

Теория.

Свойства тригонометрических функций можно представить в виде наглядной таблицы, представленной на рисунке ниже. Следует отметить, что везде предполагается, что n - любое целое число.

В таблице используется следующая нумерация свойств функции f:

1.1 - область определения

1.2 - область значений

2.1 - четность (нечетность)

2.2 - наименьший положительный период

3.1 - координаты точек пересечения графика с осью OX

3.2 - координаты точек пересечения графика с осью Oy

4.1 - промежутки, на которых функция принимает положительные значения

4.2 - промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения

5.1 - промежутки возрастания

5.2 - промежутки убывания

6.1 - точки минимума

6.2 - минимумы функции

6.3 - точки максимума

6.4 - максимумы функции.

Сама таблица представлена на рисунке ниже.

	Функция	
	y=sin x	*y=cos x*
1.1 Область определения	*R*	*R*
1.2 Область значений	[-1; 1]	[-1; 1]
2.1 Четность (нечетность)	Нечетная	Четная
2.2 Наименьший положительный период	2π	2π
3.1 Координаты точек пересечения графика с осью Ox	(π*n*; 0)	(π/2+π*n*; 0)
3.2 Координаты точек пересечения графика с осью Oy	(0; 0)	(0; 1)
4.1 Промежутки, на которых функция принимает положительные значения	(2π*n*; π+2π*n*)	(-π/2+2π*n*; π/2+2π*n*)
4.2 Промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения	(-π+2π*n*; 2π*n*)	(π/2+2π*n*; 3π/2+2π*n*)
5.1 Промежутки возрастания	[-π/2+2π*n*; π/2+2π*n*]	[-π+2π*n*; 2π*n*]
5.2 Промежутки убывания	[π/2+2π*n*; 3π/2+2π*n*]	[2π*n*; π+2π*n*]
6.1 Точки минимума	-π/2+2π*n*	π+2π*n*
6.2 Минимумы функции	-1	-1
6.3 Точки максимума	π/2+2π*n*	2π*n*
6.4 Максимумы функции	1	1

	Функция	
	y=tg x	*y=ctg x*
1.1 Область определения	(-π/2+π*n*; π/2+π*n*)	(π*n*; π+π*n*)
1.2 Область значений	*R*	*R*

2.1 Четность (нечетность)	Нечетная	Нечетная
2.2 Наименьший положительный период	π	π
3.1 Координаты точек пересечения графика с осью Ох	$(\pi n; 0)$	$(\pi/2+\pi n; 0)$
3.2 Координаты точек пересечения графика с осью Оу	(0; 0)	Нет
4.1 Промежутки, на которых функция принимает положительные значения	$(\pi n; \pi/2+\pi n)$	$(\pi n; \pi/2+\pi n)$
4.2 Промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения	$(-\pi/2+\pi n; \pi n)$	$(-\pi/2+\pi n; \pi n)$
5.1 Промежутки возрастания	$(-\pi/2+\pi n; \pi/2+\pi n)$	Нет
5.2 Промежутки убывания	Нет	$(\pi n; \pi+\pi n)$
6.1 Точки минимума	Нет	Нет
6.2 Точки максимума	Нет	Нет

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 60: выполнить задания № 101, 102. 103, 104 (а, б)

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 63

Тема: Контрольная работа по теме: «Функции, их свойства и графики».

Время выполнения: 2 ч.

Цель: проконтролировать знания студентов по теме: «Функции, их свойства и графики».

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- четность (нечетность) функций;
- возрастание и убывание функций;
- план исследования функций.

2 Выполнить задания контрольной работы.

Контрольная работа по теме: «Функции, их свойства и графики».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Найдите область определения и множество значений функции	1. Найдите область определения и множество значений функции $y = 0{,}5\cos x$.

y = 2cos x. 2. Выясните, является ли функция y = sin x − tg x чётной или нечётной. Найдите экстремумы функции y = 3 sin2 x. 4. Исследуйте функцию $y = \frac{2x}{1-x^2}$. 5. Исследуйте функцию y = 0,5 cos x − 2 и постройте её график.	2. Выясните, является ли функция y = cos x − x² чётной или нечётной. 3. Найдите экстремумы функции $y = 2cos\frac{x}{2}$. 4. Исследуйте функцию $y = \frac{3x}{x^2-1}$. 5. Исследуйте функцию y = 2 sin x + 1 и постройте её график.

ТЕМА 7. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 64

Тема: Обратные тригонометрические функции.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- тригонометрические функции;
- нахождение обратных тригонометрических функций.

2 Выполнить задания практической работы.
3 Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

Арксинусом числа *a* называется такое число из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен *a*.

<u>*Пример 1:*</u> Найти $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение: $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$, так как $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

<u>*Пример 2:*</u> Найти $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Решение: $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$.

Арккосинусом числа *а* называется такое число из отрезка $[0\,;\pi]$, косинус которого равен *а*.

<u>*Пример 3:*</u> Найти $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, так как $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{6} \in [0\,;\pi]$.

<u>*Пример 4:*</u> Найти $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решение: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, так как $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{3\pi}{4} \in [0\,;\pi]$.

Арктангенсом числа *а* называется такое число из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен *а.*

<u>*Пример 5:*</u> Найти $arctg\,1$.

Решение: $arctg\,1 = \frac{\pi}{4}$, так как $tg\frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

<u>*Пример 6:*</u> Найти $arctg(-\sqrt{3})$.

Решение: $arctg(-\sqrt{3}) = -arctg\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$, так как $tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ и $-\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Арккотангенсом числа *а* называется такое число из интервала $(0\,;\pi)$, котангенс которого равен *а.*

<u>*Пример 7:*</u> Найти $arcctg\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение: $arcctg\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$ так как $ctg\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{\pi}{3} \in (0\,;\pi)$.

<u>*Пример 8:*</u> Найти $arctg(-\sqrt{3})$.

Решение: $arcctg(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$, так как $ctg\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$ и $\frac{5\pi}{6} \in (0\,;\pi)$.

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 66: выполнить задания № 126, 127, 128.

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Обратные тригонометрические функции».			
1 вариант		**2 вариант**	
Найдите ответ и проведите линию.		Найдите ответ и проведите линию.	
$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\arccos\frac{1}{2}$	0
$\arcsin\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\frac{\pi}{3}$	$\arcsin 1$	$\frac{\pi}{3}$
$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$-\frac{\pi}{4}$
$arctg 1$	$\frac{\pi}{6}$	$arctg\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{6}$
$arcctg(-1)$	π	$arctg(-1)$	π
$\arccos 0$	$\frac{4\pi}{3}$	$arcctg\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{2\pi}{3}$
$arctg(-\sqrt{3})$	$\frac{2\pi}{3}$	$arcctg(-\sqrt{3})$	$-\frac{\pi}{6}$
	$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{4}$
	$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{6}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 65

Тема: простейшие тригонометрические уравнения.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- тригонометрические функции;
- нахождение обратных тригонометрических функций.

2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Решение простейших тригонометрических уравнений.

Уравнение	Формулы решения	Частные случаи
$\sin x = a$	при $\lvert a\rvert \le 1$ $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in z$ при $\lvert a\rvert > 1$ - решений нет	$\sin x = 0$; $x = \pi k$, $k \in z$ $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in z$ $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in z$
$\cos x = a$	при $\lvert a\rvert \le 1$ $x = \pm\arccos a + 2\pi n$, $n \in z$ при $\lvert a\rvert > 1$ - решений нет	$\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in z$ $\cos x = 1$; $x = 2\pi n$, $n \in z$ $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n$, $n \in z$
$tgx = a$	a - любое число $x = arctga + \pi k$, $k \in z$	-
$ctgx = a$	a - любое число $x = arcctga + \pi k$, $k \in z$	-

Пример 1: Решите уравнение: *cos t*=1/2.
Решение:
по формуле $t=\pm arccos(1/2)+2\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$).
Поскольку $arccos(1/2)=\pi/3$ приходим к ответу $t=\pm\pi/3+2\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$).
Пример 2: Решите уравнение: *cos t*=-0,2756.
Решение:
по формуле $t=\pm arccos(-0,2756)+2\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$).
Значение *arccos* (-0,2756) находим с помощью калькулятора или по таблице В.М. Брадиса, оно примерно равно 1,85.
Итак, приходим к ответу $t=\pm 1,85+2\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$).
Пример 3: Решите уравнение: $cos(2x-\pi/4)=1/2$.
Решение:
по формуле
$2x-\pi/4=\pm arccos(1/2)+2\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$).
Поскольку $arccos(1/2)=\pi/3$ получаем $2x-\pi/4=\pm\pi/3+2\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$)
$2x=\pi/4\pm\pi/3+2\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$).
Разделив обе части уравнения на 2 получим ответ: $x=\pi/8\pm\pi/6+\pi n$, ($n \in \mathbf{Z}$).

Пример 4: Решите уравнение: $sin\ t=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение:

по формуле $t=(-1)^k arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k$, ($k$ Є **Z**).

Поскольку $arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi/4$ приходим к ответу $t=(-1)^k\ \pi/4+\pi k$, (k Є **Z**).

<u>*Пример 5:*</u> Решите уравнение: $sin\left(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение:

функция синус нечетная, поэтому $sin\left(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=-sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тогда по формуле: $\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=(-1)^k arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k$, ($k$ Є **Z**).

Т.к. $arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$, имеем

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{10}\right)=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k,\ (k \in \mathbf{Z})$$

или

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{10}+(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k,\ (k \in \mathbf{Z}).$$

Умножив обе части уравнения на 2, получим ответ:

$$x=\frac{\pi}{5}+(-1)^{k+1}\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\pi k,\ (k \in \mathbf{Z}).$$

<u>*Пример 6:*</u> Решите уравнение: $tg\ t=\sqrt{3}$.

Решение:

по формуле $t=arctg(\sqrt{3})+\pi n$, (n Є **Z**).

Поскольку $arctg(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$ приходим к ответу $t=\frac{\pi}{3}+\pi n$, (n Є **Z**).

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 72: выполнить задания № 137 (а, б), 138 (а, б), 139 (а, б), 140 (а, б).

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 66

Тема: решение простейших тригонометрических уравнений.

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- нахождение обратных тригонометрических функций;
- решение простейших тригонометрических уравнений.

2 Выполнить задания практической работы.

3 Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

Решение простейших тригонометрических уравнений.

Уравнение	Формулы решения	Частные случаи
$\sin x = a$	при $\lvert a\rvert \le 1$ $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k$, $k \in z$ при $\lvert a\rvert > 1$ - решений нет	$\sin x = 0$; $x = \pi k$, $k \in z$ $\sin x = 1$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in z$ $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in z$
$\cos x = a$	при $\lvert a\rvert \le 1$ $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in z$ при $\lvert a\rvert > 1$ - решений нет	$\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in z$ $\cos x = 1$; $x = 2\pi n$, $n \in z$ $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n$, $n \in z$
$tgx = a$	a - любое число $x = arctga + \pi k$, $k \in z$	-
$ctgx = a$	a - любое число $x = arcctga + \pi k$, $k \in z$	-

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 73: выполнить задания № 144, 145, 146.

Задания самостоятельной работы.

Тест по теме: «Простейшие тригонометрические уравнения».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Решите уравнение: $3tgx = \sqrt{3}$. 1) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$ 3) $\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$	1. Решите уравнение: $2cos\frac{x}{2} = 1$. 1) $\pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in Z$

2) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$ 4) $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$

2. Решите уравнение: $cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$.

1) $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ n\in Z$

2) $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$

3) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$

4) $-1^{\ n}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$

3. Решите уравнение: $1+\sin\ \pi-x\ =0$

1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$

2) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$

3) $\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$

4) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

4. Укажите наименьший положительный корень уравнения $cos\pi\cdot ctg\ -x\ =-\ \overline{3}$.

1) $\frac{\pi}{6}$ 2) $\frac{5\pi}{6}$ 3) $\frac{\pi}{3}$ 4) $\frac{\pi}{4}$

2) $-1^{\ n}\cdot\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$

3) $\pm\frac{2\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$

4) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$

2. Решите уравнение: $3tgx-\ \overline{3}=0$.

1) $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$

2) $\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$

3) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$

4) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$

3. Решите уравнение: $cos\ \frac{3\pi}{2}+x\ -1=0$.

1) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

2) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$

3) $\pm\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

4) $-1^{\ n}\cdot\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$

4. Укажите наибольший отрицательный корень уравнения

$sin\frac{\pi}{2}\cdot tg\ -x\ =-\frac{\overline{3}}{3}$.

$-\frac{5\pi}{6}$ 2) $-\frac{\pi}{6}$ 3) $-\frac{\pi}{3}$ 4) $-\frac{2\pi}{3}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 67

Тема: тригонометрические уравнения, приводимые к квадратным уравнениям.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- нахождение обратных тригонометрических функций;

- решение простейших тригонометрических уравнений.

2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Уравнение	Способ решения	Формулы
Уравнение содержит только синусы или косинусы (синусы и косинусы) вида $a\sin^2 f(x) + b\sin f(x) + c = 0$ $a\cos^2 f(x) + b\cos f(x) + c = 0$ и т.д.	Уравнение сводится к квадратному (биквадратному) относительно синуса (косинуса)	$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ $ax^2 + bx + c = 0$ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
Уравнение вида $a tgx + b ctgx + c = 0$	Уравнение сводится к квадратному относительно тангенса заменой $ctgx = \dfrac{1}{tgx}$	$tgx \cdot ctgx = 1$ $ctgx = \dfrac{1}{tgx}$

<u>Пример 1:</u>

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

Пусть $\sin x = t$, тогда

$2t^2 + t - 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$t_1 = \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$t_2 = \dfrac{-1-3}{4} = -\dfrac{4}{4} = -1$

$\sin x = \dfrac{1}{2}$ и $\sin x = -1$

$x = (-1)^k \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in z$ $\qquad x = -\dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in z$

Ответ: $x = (-1)^k \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in z$ и

$x = -\dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in z$

<u>Пример 2:</u>

$8\sin^2 x + 6\cos x - 3 = 0$,

$8(1 - \cos^2 x) + 6\cos x - 3 = 0$

$8\cos^2 x - 6\cos x - 5 = 0$

Пусть $\cos x = t$, тогда

$8t^2 - 6t - 5 = 0$

$D = 36 + 160 = 196$

$t_1 = \dfrac{6+14}{16} = \dfrac{20}{16} = \dfrac{5}{4}$

$t_2 = \dfrac{6-14}{16} = -\dfrac{8}{16} = -\dfrac{1}{2}$

$\cos x = -\dfrac{1}{2}$ и решений нет, т.к. $\dfrac{5}{4} > 1$

$x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in z$

Ответ: $\pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in z$.

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 80: выполнить задания № 164 (а, б), 165 (а, б), 166(а, б), 167(а, б).

Задания самостоятельной работы.

Тест по теме: «Простейшие тригонометрические уравнения».	
2 вариант	**3 вариант**
1. Решите уравнение: $3tgx = \sqrt{3}$. 1) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$ 2) $\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$ 3) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$ 4) $\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$ 2. Решите уравнение: $cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$. 1) $\pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in Z$ 2) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$ 3) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$ 4) $(-1)^{n}\cdot\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$ 3. Решите уравнение: $1 + \sin(\pi - x) = 0$ 1) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$ 2) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$ 3) $\pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$ 4) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ 4. Укажите наименьший положительный корень уравнения $cos\pi\cdot ctg(-x) = -\sqrt{3}$. 1) $\frac{\pi}{6}$ 2) $\frac{5\pi}{6}$ 3) $\frac{\pi}{3}$ 4) $\frac{\pi}{4}$	1. Решите уравнение: $2cos\frac{x}{2} = 1$. 1) $\pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in Z$ 2) $(-1)^{n}\cdot\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$ 3) $\pm\frac{2\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$ 4) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$ 2. Решите уравнение: $3tgx - \sqrt{3} = 0$. 1) $\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$ 2) $\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$ 3) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$ 4) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$ 3. Решите уравнение: $cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1 = 0$. 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ 2) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$ 3) $\pm\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ 4) $(-1)^{n}\cdot\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$ 4. Укажите наибольший отрицательный корень уравнения $sin\frac{\pi}{2}\cdot tg(-x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. 1) $-\frac{5\pi}{6}$ 2) $-\frac{\pi}{6}$ 3) $-\frac{\pi}{3}$ 4) $-\frac{2\pi}{3}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 68

Тема: однородные тригонометрические уравнения.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- нахождение обратных тригонометрических функций;
- решение тригонометрических уравнений, приводимых к квадратным.

2 Выполнить задания практической работы.

Теория.

Однородное уравнение I степени вида $a\sin x + b\cos x = 0$ $(a \neq 0,\quad b \neq 0)$	Деление обеих частей на $\cos x \neq 0$. Получаем: $atgx + b = 0$	$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$
Однородное уравнение II степени вида $a\sin^2 f(x) + b\sin f(x)$ $\cos f(x) + k\cos^2 f(x) = 0$	Деление обеих частей на $\cos^2 x \neq 0$. Получаем: $atg^2 f(x) + btgx + k = 0$	$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

Пример 1:

$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$

т.к. если $\cos x = 0$, то и $\sin x = 0$, а этого быть не может.

Делим обе части уравнения на $\cos x$:

$tgx - \sqrt{3} = 0$,

$tgx = \sqrt{3}$

$x = arctg\sqrt{3} + \pi k,\ k \in z$

$x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in z$

Пример 2:

$3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0$

т.к. если $\cos x = 0$, то и $3\sin^2 x = 0$, а этого быть не может.

Делим обе части уравнения на $\cos^2 x$:

Пусть $tgx = t$, тогда $3t^2 - 4t + 1 = 0$

$D = 16 - 12 = 4$

$t_1 = \frac{4+2}{6} = \frac{6}{6} = 1$

$t_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$tgx = 1$ и $tgx = \frac{1}{3}$

Ответ: $\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in z$

$x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$ и

$x=arctg\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$;

$x=arctg\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in Z$

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 81: выполнить задания № 169 (а, б), 170 (а, б), 171(а, б), 173(а, б).

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 69

Тема: решение систем тригонометрических уравнений.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- нахождение обратных тригонометрических функций;
- решение тригонометрических уравнений.

2 Выполнить задания самостоятельной работы.

3 Выполнить задания практической работы.

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Тригонометрические уравнения, приводимые к квадратным».	
1 вариант	**2 вариант**
Решите уравнения: 1. $2\sin^2 x-3\sin x-2=0$; 2. $4\cos^2 x+4\sin x-1=0$; 3. $3tgx-ctgx=2$.	Решите уравнения: 1. $2\cos^2 x-5\cos x+2=0$; 2. $4\sin^2 x-4\cos x-1=0$; 3. $tgx-2ctgx=-1$.

Теория.

<u>Пример:</u> решить систему уравнений $\begin{cases} x-y=\frac{5\pi}{3} \\ \sin x=2\sin y \end{cases}$.

Решение:

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{5\pi}{3} \\ \sin x = 2\sin y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-\dfrac{5\pi}{3} \\ \sin x = 2\sin\left(x-\dfrac{5\pi}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-\dfrac{5\pi}{3} \\ \sin x = 2(\sin x\cos\dfrac{5\pi}{3}-\cos x\sin\dfrac{5\pi}{3}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y=x-\dfrac{5\pi}{3} \\ \sin x = 2(\sin x\cdot\dfrac{1}{2}+\cos x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-\dfrac{5\pi}{3} \\ \sin x = \sin x+\sqrt{3}\cos x \end{cases}$$

Решим второе уравнение: $\sin x = \sin x+\sqrt{3}\cos x$

Получим $\sqrt{3}\cos x = 0$, откуда $\cos x = 0 \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, \quad n\in Z$.

Найдем y: $y = x-\dfrac{5\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n-\dfrac{5\pi}{3}=\dfrac{3\pi-10\pi}{6}+\pi n=-\dfrac{7\pi}{6}+\pi n, \quad n\in Z$.

Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi n\,; -\dfrac{7\pi}{6}+\pi n\right), \quad n\in Z$

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 81: выполнить задания № 175 (а, б), 176 (а, б).

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 70

Тема: тригонометрические неравенства.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- нахождение обратных тригонометрических функций.

2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

	Вид неравенства	**Значения** x_1, x_2

1	$\sin x \rangle a, \quad a \in [-1;1]$	$x_1 = \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z$ $x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z$
2	$\sin x \langle a, \quad a \in [-1;1]$	$x_1 = \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z$ $x_2 = -\pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z$
3	$\cos x \rangle a, \quad a \in [-1;1]$	$x_1 = \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$ $x_2 = -\arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$
4	$\cos x \langle a, \quad a \in [-1;1]$	$x_1 = \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$ $x_2 = 2\pi - \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$
5	$tgx \rangle a$	$x_1 = arctga + \pi n, \quad n \in Z$ $x_2 \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$
6	$tgx \langle a$	$x_1 = arctga + \pi n, \quad n \in Z$ $x_2 \neq -\frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$
7	$ctgx \rangle a$	$x_1 = arcctga + \pi n, \quad n \in Z$ $x_2 \neq \pi n, \quad n \in Z$
8	$ctgx \langle a$	$x_1 = arcctga + \pi n, \quad n \in Z$ $x_2 \neq \pi + \pi n, \quad n \in Z$

Пример 1: Решите неравенство $\sin x \geq -\frac{1}{2}$.

Решение:

- Найдем значения x_1 и x_2: $x_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z$

$$x_2 = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n = \pi + \frac{\pi}{6} + 2\pi n = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z$$

- Составим двойное неравенство: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z$
- Запишем ответ: $x \in \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right], \quad n \in Z$

Пример 2: Решите неравенство $\sin 2x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение:

- Заменим $2x = t$, получим неравенство $\sin t < \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Найдем значения t_1 и t_2: $t_1 = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z$

$$t_2 = -\pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n = -\pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi n = -\frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z$$

- Составим двойное неравенство: $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n \le t \le \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z$
- Произведем обратную замену: $-\frac{5\pi}{4} + 2\pi n \le 2x \le \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z$
- Разделим неравенство на 2: $-\frac{5\pi}{8} + \pi n \le x \le \frac{\pi}{8} + \pi n, \quad n \in Z$
- Запишем ответ: $x \in \left[-\frac{5\pi}{8} + \pi n\,; \frac{\pi}{8} + \pi n\right], \quad n \in Z$

Пример 3: Решите неравенство $tg(x - \pi) > \sqrt{3}$.

Решение:

- Заменим $x - \pi = t$, получим неравенство $tg\, t > \sqrt{3}$
- Найдем значения t_1 и t_2: $t_1 = arctg\sqrt{3} + \pi n = \frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in Z$

$$t_2 \ne \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$$

- Составим двойное неравенство: $\frac{\pi}{3} + \pi n < t < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$
- Произведем обратную замену: $\frac{\pi}{3} + \pi n < x - \pi < \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$
- Получим: $\frac{\pi}{3} + \pi + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi + \pi n, \quad n \in Z$

$$\frac{4\pi}{3} + \pi n < x < \frac{3\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$$

- Запишем ответ: $x \in \left(\frac{4\pi}{3} + \pi n < x < \frac{3\pi}{2} + \pi n\right), \quad n \in Z$

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 76: выполнить задания № 151 (а, б), 152 (а, б), № 154 (а, б), 155 (а, б), № 156 (а, б), 157 (а, б)

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 71

Тема: решение тригонометрических неравенств.

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Тригонометрические неравенства».

2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить способы решения тригонометрических неравенств.
2. Выполнить задания практической работы.
3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

	Вид неравенства	**Значения x_1, x_2**
1	$\sin x \rangle a, \quad a \in (-1;1)$	$x_1 = \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z$ $x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z$
2	$\sin x \langle a, \quad a \in (-1;1)$	$x_1 = \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z$ $x_2 = -\pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z$
3	$\cos x \rangle a, \quad a \in (-1;1)$	$x_1 = \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$ $x_2 = -\arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$
4	$\cos x \langle a, \quad a \in (-1;1)$	$x_1 = \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$ $x_2 = 2\pi - \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$
5	$tgx \rangle a$	$x_1 = arctga + \pi n, \quad n \in Z$ $x_2 \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$
6	$tgx \langle a$	$x_1 = arctga + \pi n, \quad n \in Z$

		$x_2 \neq -\frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$
7	$ctgx \rangle a$	$x_1 = arcctga + \pi n, \quad n \in Z$ $x_2 \neq \pi n, \quad n \in Z$
8	$ctgx \langle a$	$x_1 = arcctga + \pi n, \quad n \in Z$ $x_2 \neq \pi + \pi n, \quad n \in Z$

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 76: выполнить задания № 158 (а, б), 159 (а, б), № 160 (а, б), 161

Задания самостоятельной работы.

1 вариант	**2 вариант**
Решите неравенство: 1. $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2. $\cos\frac{x}{2} \langle -\frac{1}{2}$ 3. $tg\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \rangle -1$ 4. $ctg\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$	Решите неравенство: 1. $\cos x \geq -\frac{1}{2}$ 2. $\sin 2x \langle \frac{\sqrt{2}}{2}$ 3. $tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \rangle 1$ $ctg\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \leq -1$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 72

Тема: Контрольная работа по теме: «Тригонометрические уравнения и неравенства».

Время выполнения: 2 ч.

Цель: проконтролировать знания студентов по теме: «Тригонометрические уравнения и неравенства».

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- Способы решение тригонометрических уравнений и неравенств.

2. Выполнить задания контрольной работы.

Контрольная работа по теме: «Тригонометрические уравнения и неравенства».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Решите уравнение: а). $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б). $\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$; в). $tq(x+\frac{\pi}{3}) = 1$; г). $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$; д). $\sin^2 x - 3\sin x \cdot \cos x + 2\cos^2 x = 0$.	1. Решите уравнение: а). $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б). $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в). $tq(x-\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$; г). $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0$ д). $3\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0$.
2. Решите неравенство: а). $\cos x\rangle -\frac{1}{2}$; б). $\sin 2x\langle\frac{\sqrt{3}}{2}$; в). $tq(x-\frac{\pi}{4}) \le \sqrt{3}$.	2. Решите неравенство: а). $\sin x\langle\frac{\sqrt{3}}{2}$; б). $\cos\frac{x}{2}\rangle -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в). $ctq(x+\frac{\pi}{4}) \le \frac{1}{\sqrt{3}}$.
3. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6} \\ \sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \end{cases}$	3. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} \\ \sin x + \sin y = \frac{1}{2} \end{cases}$

ТЕМА 8. МНОГОГРАННИКИ.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 73

Тема: Многогранники. Призма.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

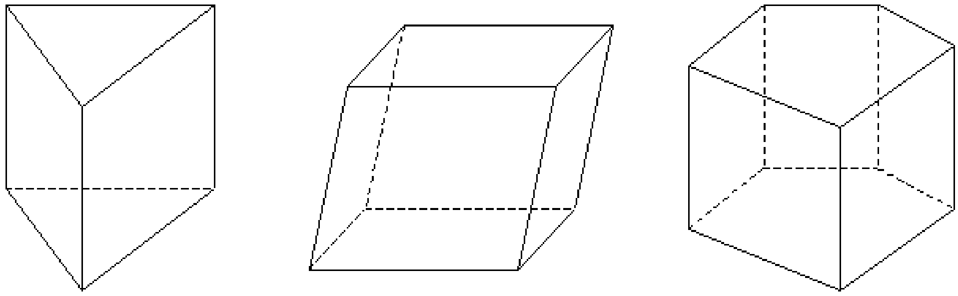
1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие призмы и ее основных элементов.
2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Призма - *многогранник,* составленный из двух равных n-угольников, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов, называется призмой.



Если основанием призмы является треугольник, то призма называется треугольной и её боковая поверхность состоит из трёх параллелограммов. У шестиугольной призмы основание – шестиугольник, боковая поверхность состоит из шести параллелограммов и т.д. Если призма прямая, то её боковая поверхность состоит из прямоугольников.

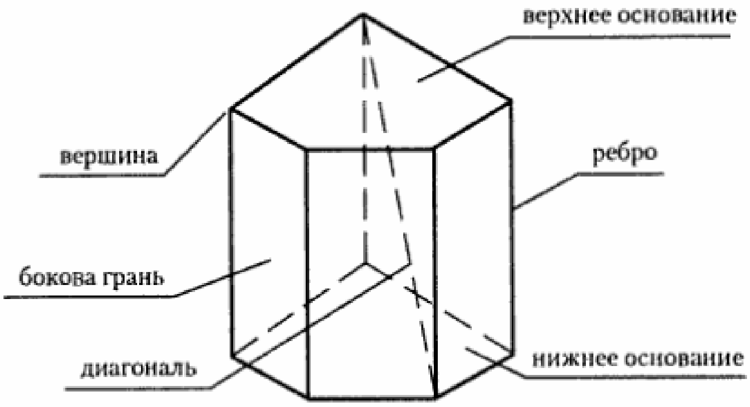


Рис. 18

Элементы призмы.

Основания – многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях и совмещаемые параллельным переносом;

Боковое ребро - отрезок, соединяющий соответствующие вершины оснований;

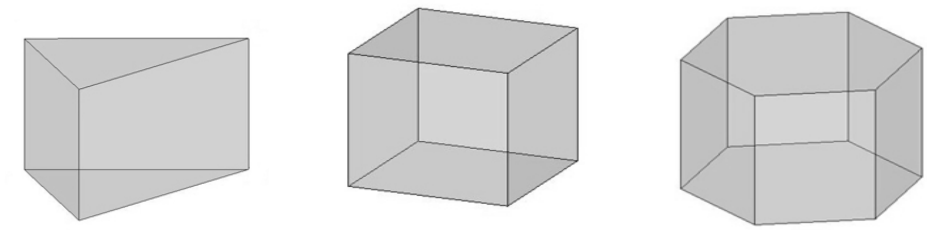
Боковая грань - все грани, кроме оснований. Каждая боковая грань обязательно является параллелограммом.

Высота - отрезок, соединяющий плоскости, в которых лежат основания призмы и перпендикулярный этим плоскостям.

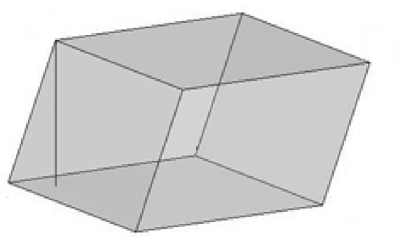
Диагональ - отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани.

Диагональное сечение - часть плоскости, проходящей через боковое ребро призмы и диагональ основания. В сечении образуется параллелограмм, в том числе его частные случаи — ромб, прямоугольник, квадрат.

Призма с боковыми рёбрами, перпендикулярными её основаниям, называется прямой призмой.



прямые призмы



Призма, боковые рёбра которой не перпендикулярны основаниям, называется наклонной призмой.

Задания практической работы.

1. Основанием прямой треугольной призмы является прямоугольный треугольник с катетами 12 см и 16 см. Площадь большей боковой грани равна 120 $см^2$. Вычислите высоту призмы.
2. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 26 см и образует с боковой гранью угол 30°. Вычислите площадь основания призмы.
3. В правильной четырехугольной призме площадь основания равна 144 $см^2$, а высота равна 14 см. определите диагональ этой призмы.
4. В прямой треугольной призме стороны основания равны 10 см, 17 см и 21 см, а высота призмы 18 см. определите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и меньшую высоту основания.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 74

Тема: площадь поверхности и объем призмы

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

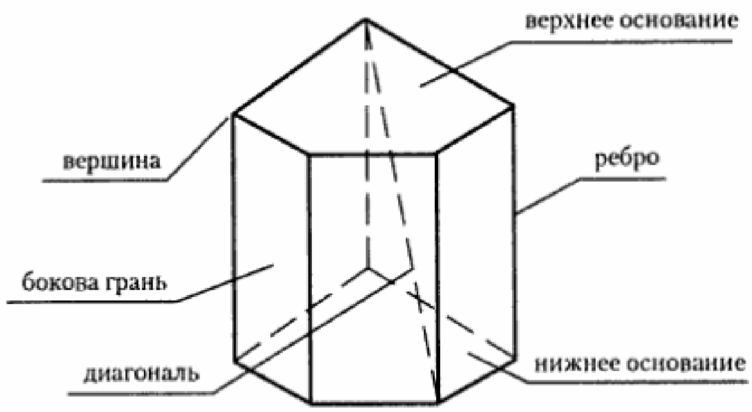
1 Повторить понятие призмы и ее основных элементов.
2 Выполнить задания самостоятельной работы.

3 Выполнить задания практической работы.

Задания самостоятельной работы.

1 вариант	2 вариант
1. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник со сторонами AB = AC = 41 см и основанием BC = 12 см. точка K - середина BC. Найдите A_1K. 2. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 5 см, 6 см и 8 см. Высота призмы равна 4 см. Найдите периметр сечения, проходящего через вершины A, C и B_1.	1. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник со сторонами AC = BC = 13 см и основанием AB = 10 см. точка O - середина AB. Найдите C_1O. 2. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 4 см, 6 см и 10 см. Высота призмы равна 3 см. Найдите периметр сечения, проходящего через вершины B, C и A_1.

Теория.



Полная поверхность призмы состоит из двух равных многоугольников – оснований и боковой поверхности. Площадь полной поверхности призмы находится по формуле $S_{п.пов.} = 2S_{осн} + S_{бок.пов.}$

При этом:

- если призма правильная (основанием является правильный многоугольник), то $S_{бок.пов.} = p_{осн.} \cdot H$ ($p_{осн.}$ - периметр основания, H – высота призмы или длина его бокового ребра);
- если призма не является правильной, то для расчёта площади боковой поверхности необходимо найти площади граней и затем их сложить.

Объем призмы определяется по формуле $V = S_{осн.} \cdot H$

Задания практической работы.

1. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 4 см, высота призмы равна 10 см. Найдите площадь поверхности данной призмы.
2. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды со стороной основания 6 см и высотой 1 см.
3. Боковая поверхность правильной четырехугольной призмы равна 32 м^2, а полная поверхность 40 м^2. Найдите ее высоту.
4. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 3,5 см, а диагональ боковой грани 2,5 см. Определите ее объем.
5. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 6 см, а боковая поверхность 32 см^2. Определите ее объем.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 75

Тема: параллелепипед и его виды.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие параллелепипеда, его виды и свойства.

2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

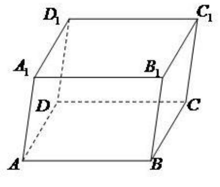
Параллелепипедом называется призма, основаниями которой служат параллелограммы. Все шесть граней параллелепипеда – параллелограммы. Отрезки, соединяющие вершины параллелепипеда, не принадлежащие одной и той же грани, называются *диагоналями параллелепипеда*.

Свойства параллелепипеда

1) Середина диагонали параллелепипеда является его центром симметрии.

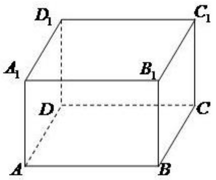
2) Противолежащие грани параллелепипеда попарно равны и параллельны.

3) Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.



Параллелепипед

Параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны плоскости основания параллелепипеда, называется *прямым параллелепипедом* ($ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямой параллелепипед).



Прямоугольный параллелепипед

Прямой параллелепипед, основанием которого служит прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом*. Все грани прямоугольного параллелепипеда – прямоугольники. Длины трех ребер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, называются измерениями прямоугольного параллелепипеда.

Свойства прямоугольного параллелепипеда

1) Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений:

$d^2=a^2+b^2+c^2$.

2) Все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

3) Для куба формула упрощается: $4d^2 = 12a^2$.

<u>*Пример 1:*</u> Найти длину стороны куба, если его диагональ равна 5 см.

Решение:

из формулы для диагонали куба выразим его сторону: $a^2 = \frac{4d^2}{12}$.

Тогда, $a = \sqrt{\frac{4d^2}{12}} = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$.

Куб

Прямоугольный параллелепипед с равными измерениями называется кубом. Все грани куба – равные квадраты.

Как найти сумму длин всех рёбер параллелепипеда

Для удобства введем обозначения: *A* и *B* стороны основания параллелепипеда; *C* – его боковая грань.

Т. о., в основании параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами *A* и *B*. Параллелограмм – это четырехугольник, противоположные стороны которого равны и параллельны. Из этого определения следует, что против стороны *A* лежит равная ей сторона *A*. Поскольку противолежащие грани параллелепипеда равны (вытекает из определения), то верхняя его грань тоже имеет 2 стороны равные *A*. Таким образом, сумма всех четырех этих сторон равна 4*A*.

То же, можно сказать, и о стороне B. Противоположная ей сторона в основании параллелепипеда равна B. Верхняя (противолежащая) грань параллелепипеда тоже имеет 2 стороны, равные B. Сумма всех четырех этих сторон равна $4B$.

Боковые грани параллелепипеда тоже являются параллелограммами (вытекает из свойств параллелепипеда). Ребро C одновременно является стороной двух соседних граней параллелепипеда. Поскольку противоположные грани параллелепипеда попарно равны, то все его боковые ребра равны между собой и равны C. Сумма боковых ребер – $4C$.

Таким образом, сумма всех ребер параллелепипеда: $4A + 4B + 4C$ или $4(A + B + C)$.

Частный случай прямого параллелепипеда – куб. Сумма всех его ребер равна $12A$.

<u>*Пример 2:*</u> Найдите ширину и высоту прямоугольного параллелепипеда, если ширина b больше его длины a на 1 см, высота c в 2 раза больше длины a, а диагональ d в 3 раза больше длины a.

Решение:

запишем основную формулу квадрата диагонали прямоугольного параллелепипеда:

$d^2=a^2+b^2+c^2$.

Выразим все измерения через заданную длину a: $b = a+1$; $c = 2a$; $d= 3a$.

Подставим в формулу:

$9a^2 = a^2+(a+1)^2+4a^2$.

Решив квадратное уравнение, найдем длины всех ребер:

$3a^2 – 2a –1 = 0$.

$a = 1$; $b = 2$; $c = 2$.

<u>*Пример 3:*</u> Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 и 4. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 94. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.

Решение:

обозначим известные ребра за a и b, а неизвестное за c. Площадь поверхности параллелепипеда выражается как $S = 2(ab + bc + ac)$.

Выразим c: $c = \dfrac{\frac{S}{2} - ab}{a+b}$.

Подставляя заданные значения, имеем: $c = \dfrac{\frac{94}{2} - 12}{7} = 5$.

Ответ: 5.

Задания практической работы.

1. Вычислите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его длина равна 16 см, ширина - 8 см и высота - 2 см.
2. Диагональ прямоугольного параллелепипеда с плоскостью основания образует угол 45°, стороны основания равны 12 и 16 см. Вычислите высоту параллелепипеда.
3. В прямом параллелепипеде стороны основания 3 см и 5 см, а одна из диагоналей основания 4 см. меньшая диагональ параллелепипеда с плоскостью основания составляет 60°. Определите диагонали параллелепипеда.
4. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 3 см и 4 см, угол между ними равен 30°, а боковое ребро есть среднее пропорциональное между сторонами основания. Определите диагонали этого параллелепипеда.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 76

Тема: площадь поверхности и объем параллелепипеда.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие параллелепипеда, его виды и свойства.

2. Выполнить задания практической работы.

3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

Т. к. параллелепипед есть частный случай призмы, то площадь поверхности и объем параллелепипеда вычисляются по формулам для площади поверхности и объема призмы.

Полная поверхность параллелепипеда состоит из двух равных многоугольников – оснований и боковой поверхности. Площадь полной поверхности призмы находится по формуле $S_{п.пов.} = 2S_{осн} + S_{бок.пов.}$

При этом:

- если параллелепипед прямой (боковое ребро перпендикулярно основанию), то $S_{бок.пов.} = 2ac + 2bc$ (где *a, b, c* – три измерения параллелепипеда);

  $S_{п..пов.} = 2ab + 2ac + 2bc$

Объем параллелепипеда определяется по формуле $V = S_{осн.} \cdot H$

Кроме того, объем прямоугольного параллелепипед можно вычислять по формуле:

V=abc,

где *a, b, c* – три измерения прямоугольного параллелепипеда.

Куб

Прямоугольный параллелепипед с равными измерениями называется кубом. Все грани куба – равные квадраты.

Боковая поверхность куба определяется по формуле: $S_{п..пов.} = 4a^2$.

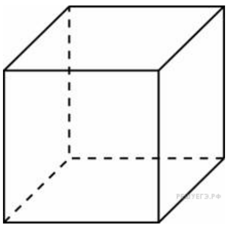
Полная поверхность куба определяется по формуле: $S_{п..пов.} = 6a^2$.

Объем куба вычисляется по формуле:

$V = a^3$,

где a – измерение куба.

<u>*Пример 1:*</u> Объем куба равен 8. Найдите площадь его поверхности.



Решение:

Площадь поверхности куба выражается через его ребро a как $S_{п..пов.} = 6a^2$, а объем — как $V = a^3$. Отсюда видно, что площадь поверхности куба выражается через его объем как $S_{п..пов.} = 6V^{\frac{2}{3}}$. Отсюда находим, что

$$S_{п..пов.} = 6 \cdot 8^{\frac{2}{3}} = 6 \cdot (2^3)^{\frac{2}{3}} = 6 \cdot 2^2 = 24.$$

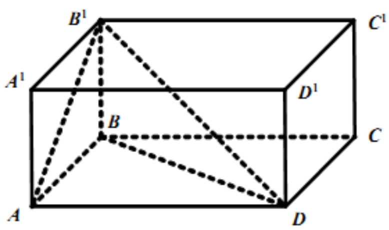
Ответ: 24.

<u>*Пример 2:*</u> Диагональ меньшей боковой грани прямоугольного параллелепипеда равна большему ребру основания. Высота параллелепипеда равна 2 см, диагональ основания равна 14 см. Найдите объем параллелепипеда.

Дано:$ABCD\,A'B'C'D'$ -прямоугольный параллелепипед,

AD>DC, $AB' = AD$, $BB' = 2$ см, $BD = 14$см.

Найти:V



Решение**:** $B'D = \sqrt{BB'^2 + BD^2} = \sqrt{2^2 + 14^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ см

Чтобы найти большую **диагональ параллелограмма**, можно воспользоваться общеизвестной формулой соотношения суммы квадратов двух диагоналей и удвоенной суммы квадратов длин сторон. Она является прямым следствием из свойств диагоналей: $d_1^2 + d_2^2 = 2 \cdot (a^2 + b^2)$. в нашей задаче большая диагональ $B'D$ т.е. $2AD^2 = B'D^2$

$$AD = \sqrt{\frac{1}{2}B'D^2} = \sqrt{\frac{1}{2}(10\sqrt{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 200} = \sqrt{100} = 10 \text{ см}$$

$AB^2 + AD^2 = BD^2 \quad \Rightarrow AB^2 = BD^2 - AD^2 \quad \Rightarrow \quad AB = \sqrt{BD^2 - AD^2}$

$AB = \sqrt{14^2 - 10^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$ см

$V = AB \cdot AD \cdot BB' = 4\sqrt{6} \cdot 10 \cdot 2 = 80\sqrt{6} \approx 196$ см^3

Ответ: ≈ 196 см^3

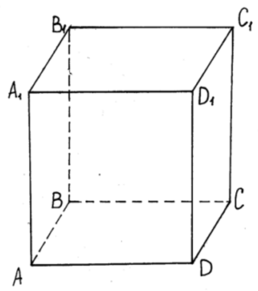
<u>*Пример 3:*</u> Объем прямоугольного параллелепипеда равен 24 см^3, площадь основания 12 см^2. Одна сторона основания в три раза больше другой. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$-прямоугольный параллелепипед, $V = 24$ см^3,

$AD = 3AB$,$S_{осн}=12$см^2

Найти: $S_п$



Решение: $S_п = S_{бок}+S_{осн}$

$S_п = 2(AB+AD) \cdot AA_1+2S_{осн}$

$V = S_{осн} \cdot h \quad \Rightarrow h = \frac{V}{S_{осн}}, \quad AA_1=h=24:12=2$

$S_{осн}=AB \cdot 3AB = 3AB^2 \quad \Rightarrow \quad 12 = 3AB^2, \quad AB^2 = 4$ см, $AB = 2, AD = 6$ см

$S_{бок} = 2 \cdot (6+2) \cdot 2=32$, $S_п = 32+2 \cdot 12=56$ (см^2)

Ответ: 56 см^2.

Задания практической работы.

1. Площадь поверхности куба со стороной *a* равна 24. Найдите его объем.
2. Основание прямого параллелепипеда - ромб с диагоналями 10 и 24 см. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.
3. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 6м и 8м и образуют угол в 30°; боковое ребро равно 5 м. определите полную поверхность этого параллелепипеда.

Задания самостоятельной работы.

1 вариант	**2 вариант**
1. Две стороны основания прямого параллелепипеда, равные 4 м и 6 м образуют угол 60°. Найдите объём параллелепипеда, если боковое ребро равно 5 м. 2. Измерения прямоугольного параллелепипеда 15 см, 50 см и 36 см.	1. Измерения прямоугольного параллелепипеда 2 см, 2см и 6 см. Найдите ребро такого куба, чтобы его объём был в два раза меньше объёма параллелепипеда. 2. Две стороны основания прямого параллелепипеда, равные $2\sqrt{2}$ м и 4 м

Найдите ребро равновеликого ему куба.	образуют угол 45° . Найдите объём параллелепипеда, если боковое ребро равно 6 м.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 77

Тема: пирамида, площадь поверхности и объем пирамиды.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

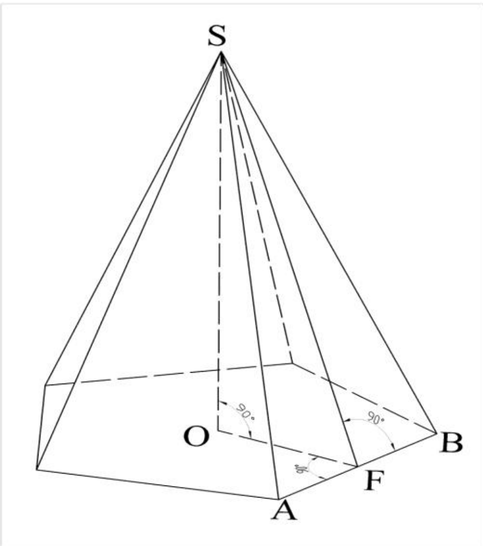
1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие пирамиды, ее основные элементы.
2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника – *основания пирамиды*, точки, не лежащей в плоскости основания, - *вершины пирамиды* и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания.



- ***апофема*** — высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины;
- ***боковые грани*** — треугольники, сходящиеся в вершине;
- ***боковые ребра*** — общие стороны боковых граней;
- ***вершина пирамиды*** — точка, соединяющая боковые рёбра и не лежащая в плоскости основания;
- ***высота*** — отрезок перпендикуляра, проведённого через вершину пирамиды к плоскости её основания (концами этого отрезка являются вершина пирамиды и основание перпендикуляра).

Правильная пирамида

- боковые рёбра правильной пирамиды равны;
- в правильной пирамиде все боковые грани — равнобедренные треугольники;
- в любую правильную пирамиду можно как вписать, так и описать вокруг неё сферу;
- площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

Прямоугольная пирамида.

Пирамида называется прямоугольной, если одно из боковых рёбер пирамиды перпендикулярно основанию. В данном случае, это ребро и является высотой пирамиды.

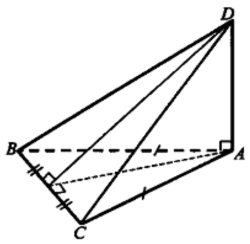
Полная поверхность пирамиды состоит из основания и боковой поверхности. ***Площадь полной поверхности*** пирамиды находится по формуле $S_{п.пов.} = S_{осн} + S_{бок.пов.}$

При этом:

- если пирамида правильная (основанием является правильный многоугольник), то $S_{бок.пов.} = \frac{1}{2} p_{осн.} \cdot l$ ($p_{осн.}$ - периметр основания, l – апофема пирамиды);

- если пирамида не является правильной, то для расчёта площади боковой поверхности необходимо найти площади граней и затем их сложить.

Пример 1: Основанием пирамиды *DABC* является треугольник *ABC*, у которого *AB = AC = 13* см, *BC = 10* см, ребро *AD* перпендикулярно к плоскости основания и равно 9 см. Найдите площадь боковой поверхности.



Дано: DABC - пирамида; ΔABC - равнобедренный, *AB=AC= 13*см; *BC = 9* см; *AD⊥ADC, AD = 9* см.
Найти: $S_{бок}$,
Решение:

1. Проведем *AK⊥BC*, тогда *BC⊥DK (*по теореме о трех перпендикулярах*)*, т.е.*DK*-высота ΔDBC.
2. Из ΔABK получаем: АК = $\sqrt{AB^2-BK^2} = \sqrt{169-25} = \sqrt{144} = 12$ ($см$).
3. Из ΔDAK получаем: DK = $\sqrt{DA^2+AK^2} = \sqrt{81+144} = \sqrt{225} = 15$ ($см$).
4. Из $\Delta ADB = \Delta ADC$(по двум катетам):$S_{бок}=2S_{\Delta ADB} + S_{\Delta BDC}$;
$S_{бок}= 13\cdot 9+5\cdot 15 = 117+75 = 192(см^2)$.

Ответ:192 см^2.

Объем пирамиды определяется по формуле $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$, где *H* – высота пирамиды.

Задания практической работы.

1. Основание пирамиды - прямоугольник со сторонами 6 и 8 см. Высота пирамиды равна 12 см и проходит через точку пересечения диагоналей основания. Найдите боковые ребра пирамиды.

2. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 6 см, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен 60°. Найдите боковое ребро пирамиды.

3. Основание пирамиды - ромб с диагоналями 10 и 18 см. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей, ромба. Меньшее боковое ребро пирамиды равно 13 см. Найдите объем пирамиды.
4. Основанием пирамиды DABC является прямоугольный треугольник ABC, у которого гипотенуза AB равна 29 см, катет AC равен 21 см. Ребро DA перпендикулярно к

плоскости основания и равно 20 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 78

Тема: Усечённая пирамида. Площадь поверхности и объем усечённой пирамиды.

Время выполнения: 1 ч.

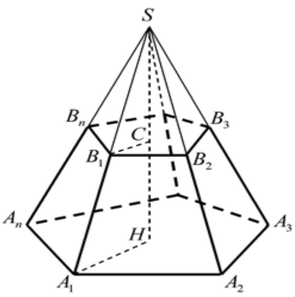
Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие усеченной пирамиды, ее основные элементы.
2. Выполнить задания практической работы.

Теория.



Усеченной пирамидой называется многогранник, у которого вершинами служат вершины основания и вершины ее сечения плоскостью, параллельной основанию.

Свойства усеченной пирамиды:

- Основания усеченной пирамиды — подобные многоугольники.
- Боковые грани усеченной пирамиды — трапеции.
- Боковые ребра правильной усеченной пирамиды равны и одинаково наклонены к основанию пирамиды.
- Боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные между собой равнобедренные трапеции и одинаково наклонены к основанию пирамиды.
- Двугранные углы при боковых ребрах правильной усеченной пирамиды равны.

Площадь поверхности и объём усеченной пирамиды

Пусть CH — высота усеченной пирамиды, P_1 и P_2 — периметры оснований усеченной пирамиды, S_1 и S_2 — площади оснований усеченной пирамиды, $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности усеченной пирамиды, $S_{полн}$ — площадь полной поверхности усеченной пирамиды, V — объем усеченной пирамиды. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$S_{\text{полн}} = S_1 + S_2 + S_{\text{бок}}$$

$$V = \frac{1}{3}CH(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$$

.

Если усеченная пирамида правильная (основания – правильные многоугольники), то $S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) l$, где l - апофема пирамиды (высота боковой грани)

Задания практической работы.

1. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 7 см. Стороны оснований 10 см и 2 см. Определите боковое ребро пирамиды.
2. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды 4 дм и 1 дм. Боковое ребро 2 дм. Найдите высоту пирамиды.
3. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде апофема равна 12 см, боковое ребро равно 13 см и боковая поверхность 720 см^2. Определите стороны оснований.
4. В усеченной пирамиде разность площадей оснований равна 6 см^2, высота усеченной пирамиды 9 см и ее объем 42 см^3. Определите площади оснований.
5. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде объем равен 430 см^3, высота равна 10 см и сторона одного основания 8 см. Определите сторону другого основания.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 79

Тема: сечения в кубе, призме, пирамиде.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Выполнить задания самостоятельной работы.
2. Повторить понятие куба, призмы, пирамиды и их основных элементов.
3. Выполнить задания практической работы.

Задания самостоятельной работы.

1 вариант	**2 вариант**
1. Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами 6 м и 8 м, а высота пирамиды равна половине диагонали основания. Найдите объём пирамиды. 2. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 8 см. Стороны оснований равны 3 см и 7 см. Определите боковое ребро пирамиды.	1. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды 10 м, а сторона основания 12 м. Найдите объём пирамиды. 2. В усечённой пирамиде объём равен 76 м^3, высота 6 м и площадь одного из оснований равна 18 м^2. Определите площадь другого основания.

Теория.

Рис 1

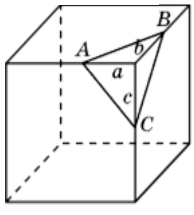


Рис. 2

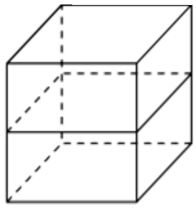
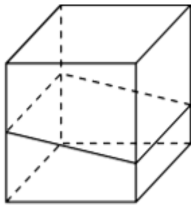


Рис. 3



Сечения куба плоскостью

Если плоскость пересекает три ребра куба, выходящих из одной вершины, то в сечении получается треугольник (рис. 1). При этом если отсекаемые плоскостью отрезки ребер равны, то в сечении получается равносторонний треугольник, если равны два отрезка из трех, то получается равнобедренный треугольник, наконец, если все три отрезка различны, то в сечении получается разносторонний треугольник. В сечении куба плоскостью не могут получаться прямоугольный или тупоугольный треугольники.

Выясним, какие четырехугольники могут получаться в сечении куба плоскостью.

Ясно, что если плоскость параллельна одной из граней куба, то в сечении получается квадрат (рис. 2). Если плоскость параллельна одному из ребер куба, то в сечении получается прямоугольник (рис. 3). Если плоскость пересекает четыре параллельных ребра куба, то в сечении получается параллелограмм (рис. 4).

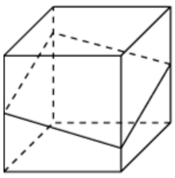


Рис. 4

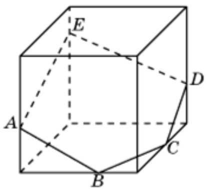


Рис. 5

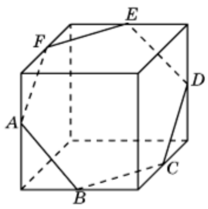


Рис. 6

На рис. 5 показа куба плос форме пятиугольника *ABCDE*. Прямые *AB* и *DE*, *CD* и *AE* параллельны, как линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.

На рис. 6 показано сечение куба плоскостью в форме шестиугольника *ABCDEF*. Прямые *AB* и *DE*, *BC* и *EF*, *CD* и *AF* параллельны, как линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.

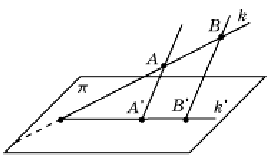
Поскольку у куба имеется только шесть граней, то в сечении куба плоскостью не может получиться многоугольник с числом сторон, большим шести.

Построение сечений многогранников

Для построения сечений используют метод «следов», заключающийся в нахождении точки пересечения прямой и плоскости по заданным двум точкам этой прямой и их проекциям на плоскость.

<u>*Пример 1:*</u> Пусть прямая k проходит через точки A, B и известны параллельные проекции A', B' этих точек на плоскость π. Требуется найти точку пересечения прямой AB с плоскостью π.

Решение:

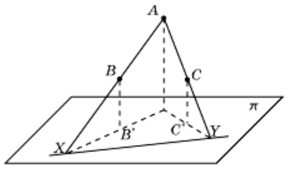


через точки A', B' проведем прямую k'. Тогда пересечение прямой k с прямой k' и будет искомым пересечением прямой k с плоскостью π (см. рис. 7).

Рис. 7

<u>*Пример 2:*</u> Даны точки A, B, C и их параллельные проекции A', B', C' на плоскость π. Требуется построить линию пересечения плоскости ABC и плоскости π.

Решение:

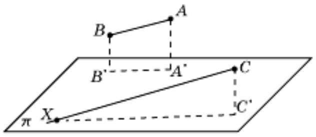


используя решение предыдущей задачи, построим точки X и Y пересечения прямых AB и AC с плоскостью π. Прямая XY будет искомой линией пересечения плоскости ABC и плоскости π (см. рис. 8).

Рис. 8

<u>Пример 3:</u> Через данную точку C (C') провести прямую, параллельную данной прямой AB ($A'B'$), и найти ее точку пересечения с плоскостью π.

Решение:

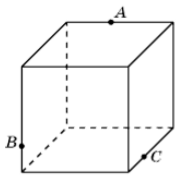


через точку C проводим прямую, параллельную AB. Через точку C' проводим прямую, параллельную $A'B'$. Точка X пересечения этих прямых и будет искомой (см. рис. 9).

Рис. 9

<u>Пример 4:</u> Построить сечение куба плоскостью проходящей через три точки A, B, C, принадлежащие попарно скрещивающимся ребрам этого куба (см. рис.10).

Решение:



найдем пересечение прямой AB, лежащей в плоскости сечения, с плоскостью основания куба. Для этого построим параллельные проекцииA', B' точек A, B на основание куба в направлении бокового ребра куба (см. рис. 11).

Рис. 10

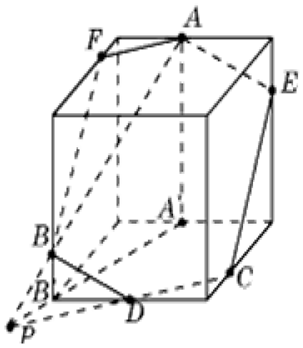
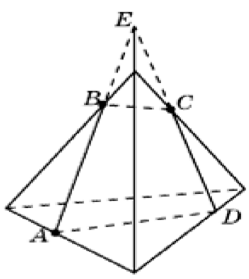


Рис. 11

Пересечение прямых AB и $A'B'$ будет искомой точкой P. Она принадлежит плоскости сечения и плоскости основания куба. Следовательно, плоскость сечения пересекает основание куба по прямой CP. Точка пересечения этой прямой с ребром основания куба даст еще одну точку D сечения куба. Соединим точки C и D, B и D отрезками. Через точку A проведем прямую, параллельную BD, и точку ее пересечения с ребром куба обозначим E. Соединим точки E и C отрезком. Через точку A проведем прямую, параллельную CD, и точку ее пересечения с ребром куба обозначим F. Соединим точки A и F, B и F отрезками. Многоугольник $AECDBF$ и будет искомым изображением сечения куба плоскостью.

<u>Пример 5:</u> Построить сечение треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через три точки A, B, C, принадлежащие ее ребрам (см. рис. 12).



Решение**:**

проведем прямую AB и ее точку пересечения с боковым ребром пирамиды обозначим через E. Проведем прямую EC и ее точку пересечения с ребром основания пирамиды обозначим через D. Соединим отрезками точки B и C, A и D. Четырехугольник $ABCD$ будет искомым сечением пирамиды.

Рис. 12

Задания практической работы.

Решите задачи:

1) Какой фигурой является сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B_1, D и середину ребра CC_1?

2) Какой фигурой является сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB, BC и DD_1?

3) Через середину ребра куба, перпендикулярно скрещивающейся с этим ребром диагонали, проведено сечение. Определите его вид.

4) Какой фигурой является сечение куба плоскостью, которая проходит через две противоположные вершины нижнего основания и середину одного из ребер верхнего основания? Найдите его периметр, если длина ребра куба равна 1.

5) Через вершины A, C, D_1 куба $A…D_1$ проведено сечение. В каком отношении оно делит диагональ DB_1, и какой образует угол с этой диагональю?

6) Каким является сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB, BC и CD?

7) Какой фигурой является сечение правильного тетраэдра $ABCD$ плоскостью, проходящей через вершину B и точки M, N – середины соответственно ребер AD, CD?

8) Постройте сечение куба $A...D_1$ плоскостью, проходящей через вершины B_1, D и точку H, принадлежащую ребру CC_1.

9) Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунке 13.

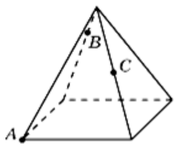


Рис. 13

10) Постройте сечение правильной шестиугольной призмы плоскостью, проходящей через точки, указанные на рисунке 14.

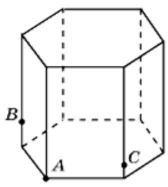


Рис. 14

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 80

Тема: Контрольная работа по теме: «Многогранники».

Время выполнения: 2 ч.

Цель: проконтролировать знания студентов по теме: «Многогранники».

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:
- Основные элементы многогранников;
- Формулы площади поверхности и объема многогранников.

2 Выполнить задания контрольной работы.

Контрольная работа по теме: «Многогранники».	
1 вариант	**2 вариант**
1. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 5 дм и 12 дм, а высота параллелепипеда равна 6 дм. Определите площадь диагонального сечения.	1. В прямом параллелепипеде с основанием АВСД дано: АВ=29 см, АД=36 см, ВД=25 см и боковое ребро равно 48 см. Определите площадь сечения $АВ_1С_1Д$.
2. Определите диагональ правильной четырёхугольной призмы, если диагональ основания равна 9 см, а диагональ боковой грани равна 7 см.	2. Основанием прямой призмы служит прямоугольник. Диагональ призмы равна 8 см , высота призмы 2 см. Найдите сторону основания.
3. Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами 4 см и 5 см; каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Найдите высоту пирамиды.	3. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 7 см, а сторона основания 6см. Определите длину бокового ребра.
4. В правильной четырёхугольной пирамиде боковая поверхность равна 16 $м^2$, а полная поверхность равна 24 $м^2$. Определите сторону основания и высоту пирамиды.	4. В правильной четырёхугольной пирамиде определите сторону основания, если боковое ребро равно 5 см, а полная поверхность пирамиды равна 16 $см^2$.
5. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 5 см. Стороны оснований 8 см и 6 см. Определите боковое ребро пирамиды.	5. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды 3 дм и 1 дм. Боковое ребро 2 дм. Найдите высоту пирамиды.
6. Две стороны основания прямого параллелепипеда, равные 4 м и 6 м образуют угол 60° . Найдите объём параллелепипеда, если боковое ребро равно 5 м. 7. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды 10 м, а сторона основания 12 м. Найдите объём пирамиды.	6. Две стороны основания прямого параллелепипеда, равные $2\sqrt{2}$ м и 4 м образуют угол 45° . Найдите объём параллелепипеда, если боковое ребро равно 6 м. 7. Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами 6 м и 8 м, а высота пирамиды равна половине диагонали основания. Найдите объём пирамиды.

ТЕМА 9. НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 81

Тема: Понятие производной. Правила вычисления производных.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие производной, правила вычисления производных.
2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Производной $y'(x)$ от функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется *предел* отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx : $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, если он существует, то есть:

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

или $y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Правила вычисления производных:

1. $(x \pm y)' = x' \pm y'$,
2. $(xy)' = x'y + xy'$,
3. $\left(\frac{x}{y}\right)' = \frac{x'y - xy'}{y^2}$.

<u>*Пример 1:*</u> Найти производную функции $y = x^2 + 3x$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Найдем приращение заданной функции в точке x_0:

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = y(0 + \Delta x) - y(0) = (\Delta x)^2 + 3\Delta x - 0 = \Delta x(\Delta x + 3)$$

Тогда $y'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x(\Delta x + 3)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 3) = 0 + 3 = 3$

Ответ: $y'(0) = 3$

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 109: выполнить задания № 200, 203

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 82

Тема: Производная степенной, логарифмической функций.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие производной, правила вычисления производных.
2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Правила вычисления производных:

1. $(x \pm y)' = x' \pm y'$,

2. $(xy)' = x'y + xy'$,

3. $\left(\dfrac{x}{y}\right)' = \dfrac{x'y - xy'}{y^2}$.

Таблица производных.

	Функция	Производная функции			Функция	Производная функции
1	$C=const$	0		8	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
2	Cx	C		9	$\sqrt[n]{x^m}$	$\dfrac{m}{n}\cdot x^{\frac{m}{n}-1}$
3	x^n	nx^{n-1}		10	e^x	e^x
4	Cx^n	Cnx^{n-1}		11	e^{Cx}	Ce^{Cx}
5	$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$		12	a^x	$a^x \ln a$
6	$(ax+b)^n$	$an(ax+b)^{n-1}$		13	lnx	$\dfrac{1}{x}$
7	$\dfrac{1}{(ax+b)^n}$	$-\dfrac{an}{(ax+b)^{n+1}}$		14	$loq_x a$	$\dfrac{1}{x\ln a}$

<u>*Пример 1:*</u> Найти производную функции $y = x^2 - 5x$.

Решение: Применяя линейные правила дифференцирования, получаем:

$$y' = \left(x^2 - 5x\right)' = \left(x^2\right)' - 5\left(x\right)' = 2x - 5\cdot 1 = 2x - 5$$

<u>*Пример 2:*</u> Найти производную функции $y = \dfrac{3x^4 - 2}{\sqrt{x}}$.

Решение: $$y' = \left(\frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\left(3x^4\right)' \cdot \sqrt{x} - 3x^4 \cdot \left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{3\cdot 4x^3 \cdot \sqrt{x} - 3x^4 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} =$$

$$= \frac{12x^3\sqrt{x} - \dfrac{3x^4}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\dfrac{12x^3\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{x} - 3x^4}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\dfrac{24x^3\cdot x - 3x^4}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{24x^4 - 3x^4}{2x\sqrt{x}} = \frac{21x^4}{2x\sqrt{x}} = \frac{31x^3}{\sqrt{x}}.$$

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 114: выполнить задания № 208, 209,215;

стр 244: выполнить задания № 538; стр 244: выполнить задания № 550.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 83

Тема: Производная тригонометрической функций.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие производной, правила вычисления производных.

2. Выполнить задания самостоятельной работы.

3. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Правила вычисления производных:

1. $(x \pm y)' = x' \pm y'$,

2. $(xy)' = x'y + xy'$,

3. $\left(\dfrac{x}{y}\right)' = \dfrac{x'y - xy'}{y^2}$.

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Производная функции».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Найдите производные функций: а. $f(x)=(3-\frac{4}{x^4})(x^2+1)$; б. $f(x)=\frac{x^2+3x}{x+4}$; в. $f(x)=(2\sqrt{x}+1)\cdot x^3$; . г. $f(x)=3\ln x+\frac{6}{x}$; д. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. 2. Решите уравнение $f'(x)=0$, если: $f(x)=4x+\frac{1}{x}-\sqrt{5}$.	1. Найдите производные функций: а. $f(x)=x^2(3\sqrt{x}-2)$; б. $f(x)=\frac{x^3+5}{x-2}$; в. $f(x)=\left(2+\frac{3}{x^3}\right)(x-1)$; г. $f(x)=2\log_3 x-\ln x$; д. $f(x)=\frac{x}{\ln x}$. 2. Решите уравнение $f'(x)=0$, если: $f(x)=-\frac{1}{x}-9x+\sqrt{2}$.

Таблица производных.

	Функция	Производная функции			Функция	Производная функции
1	$\sin x$	$\cos x$		5	$\sin ax$	$a\cos ax$
2	$\cos x$	$-\sin x$		6	$\cos ax$	$-a\sin ax$
3	tgx	$\frac{1}{\cos^2 x}$		7	$tgax$	$\frac{a}{\cos^2 ax}$
4	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		8	$ctgax$	$-\frac{a}{\sin^2 ax}$

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 120: выполнить задания № 231, 232, 233, 236, 235

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 84

Тема: Производная сложной функции.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие производной, правила вычисления производных.
2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Определение: Если $y = f(u)$, где $u = u(x)$, то есть y - сложная функция, то производная сложной функции находится по следующему правилу: $y' = f'(u) \cdot u'(x)$, то есть производную внешней функции нужно умножить на производную внутренней функции.

Пример 1: Найти производную функции $y = \sin(x^2 - 3x)$.

Решение:

$$y' = \left(\sin(x^2-3x)\right)' = \left| x^2 - 3x = t \right| = \sin' t = \cos t \cdot t' = \sin(x^2-3x)\cdot\left(x^2-3x\right)' = \sin(x^2-3x)\cdot(2x-3) =$$

$$= (2x-3)\sin(x^2-3x)$$

Пример 2: Найти производную функции $y = \sqrt{4x^3 - 12x + 8}$.

Решение:

$$y' = \left(\sqrt{4x^3-12x+8}\right)' = \left| 4x^3 - 12x + 8 = t \right| = \left(\sqrt{t}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot t' = \frac{1}{2\sqrt{4x^3-12x+8}} \cdot \left(4x^3-12x+8\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{4x^3-12x+8}} \cdot \left(12x^2-12\right) = \frac{12x^2-12}{2\sqrt{4x^3-12x+8}} = \frac{2\left(6x^2-6\right)}{2\sqrt{4x^3-12x+8}} = \frac{6x^2-6}{\sqrt{4x^3-12x+8}}.$$

Правила вычисления производных:

1. $(x \pm y)' = x' \pm y'$,
2. $(xy)' = x'y + xy'$,
3. $\left(\dfrac{x}{y}\right)' = \dfrac{x'y - xy'}{y^2}$.

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 117: выполнить задания № 220, 221, 222, 223, 224.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 85

Тема: Геометрический смысл производной.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие производной, правила вычисления производных.
2. Выполнить задания самостоятельной работы.
3. Выполнить задания практической работы.

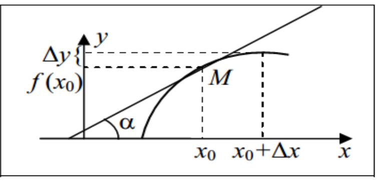
Задания самостоятельной работы.

1 вариант	2 вариант
Найдите производные функций: 1) $f(x)=\sin^2 x$ 2) $f(x)=\ln\cos x$ 3) $f(x)=\sin 2x-\cos^2 x$ 4) $f(x)=\ln tgx$ 5) $f(x)=e^{\sin x}$	Найдите производные функций: 1) $f(x)=\cos^2 x$ 2) $f(x)=\ln\sin x$ 3) $f(x)=\sin^2 x+\cos 2x$ 4) $f(x)=\ln ctgx$ 5) $f(x)=e^{\cos 2x}$

Теория.

Геометрический смысл производной

Значение производной в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$:
$f'(x_0)=k=\text{tg}\,\alpha$.



Пример 1: Прямая $y = 5x - 3$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 2x - 4$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение: Прямая параллельная касательной имеет одинаковый с ней угол наклона к оси абсцисс. Найдем угловой коэффициент касательной (он же тангенс угла наклона) прямой:

$k = y' = (5x-3)' = (5x)' - 3' = 5$.

С другой стороны, мы знаем, что угловой коэффициент касательной равен производной функции в точке касания. Найдем производную:
$y'(x) = (x^2 + 2x - 4)' = 2x + 2$.
Составим уравнение, подставив в выражение для производной неизвестную абсциссу точки касания x_0.
$2x_0 + 2 = 5$

$2x_0 = 5 - 2 = 3$
$x_0 = 3/2 = 1{,}5.$

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 129: выполнить задания № 253 (а; б), 254 (а; б), 257 (а; б), 259 (а; б), 258 (а, б).

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 86

Тема: Уравнение касательной.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие производной, правила вычисления производных.
2. Выполнить задания самостоятельной работы.
3. Выполнить задания практической работы.

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Геометрический смысл производной».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Найдите тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной, проходящей через точку М графика функции: а) $y = 2x^2 + 4x, \quad M(-1; 2)$, б) $y = \frac{1}{3}\cos x, \quad M(\frac{\pi}{2}; 0)$. 2. Найдите точки графика функции *f(x)*, в которых касательная параллельна оси абсцисс, если $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 2$.	1. Найдите тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной, проходящей через точку М графика функции: а) $y = -4x^4 + 5x, \quad M(0; 3)$, б) $y = 2\sin x + 1, \quad M(\frac{\pi}{3}; 1)$. 2. Найдите точки графика функции *f(x)*, в которых касательная параллельна оси абсцисс, если $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Теория.

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0

$$\boxed{y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).}$$

Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0:

1. Найти значение функции $f(x_0)$.

2. Найти производную функции $f'(x)$.

3. Найти значение производной в т. x_0 : $f'(x_0)$.

Составить уравнение $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

<u>*Пример 1:*</u> Для функции $f(x)=x^3-5x^2$ составить уравнение касательной в точке $x_0=2$.

Решение.

1. $f(x_0)=f(2)=2^3-5\cdot 2^2=8-20=-16$

2. $f'(x)=(x^3-5x^2)'=3x^2-10x$

3. $f'(x_0)=f'(2)=3\cdot 2^2-10\cdot 2=12-20=-8$

4. $y=-16-8(x-2)$

$y=-16-8x+16$

$y=-8x$ - искомое уравнение.

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 129: выполнить задания № 255, 256

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 87

Тема: Механический смысл производной.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие производной, правила вычисления производных.

2. Выполнить задания практической работы.

3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

Механический смысл производной

Пусть задан путь $s = f(t)$ движения материальной точки.

- Скорость данной материальной точки в момент времени t есть производная от пути S по времени t : $\upsilon(t) = S'(t)$
- Ускорение данной материальной точки в момент времени t есть производная от скорости υ по времени t : $a(t) = \upsilon'(t)$

<u>*Пример 1:*</u> Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = \frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t$ (м). Определить скорость его движения в момент $t = 10\ c$.

Решение: Искомая скорость - это производная от пути, то есть $\upsilon(t) = S'(t)$, тогда

$$\upsilon(t) = \left(\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 4t\right)' = \left(\frac{2}{3}t^3\right)' - (2t^2)' + (4t)' = \frac{2}{3}\cdot 3t^2 - 2\cdot 2t + 4 = 2t^2 - 4t + 4$$

В заданный момент времени

$\upsilon(10) = 2\cdot 10^2 - 4\cdot 10 + 4 = 200 - 40 + 4 = 164$ (м/с).

Ответ: $\upsilon(10) = 164$ (м/с).

<u>*Пример 2:*</u> Точка движется по координатной прямой согласно закону $x(t) = t^3 - 3t^2 + 6$. В какой момент времени ускорение точки будет равно 6?

Решение:

Ускорение данной материальной точки в момент времени t есть производная от скорости υ по времени t : $a(t) = \upsilon'(t)$

Скорость данной материальной точки в момент времени t есть производная от пути x по времени t : $\upsilon(t) = x'(t)$. Получим:

$$\upsilon(t) = (t^3 - 3t^2 + 6)' = (t^3)' - (3t^2)' + 6' = 3t^2 - 3\cdot 2t + 0 = 3t^2 - 6t$$

$$a(t) = (3t^2 - 6t)' = (3t^2)' - (6t)' = 3\cdot 2t - 6 = 6t - 6$$

По условию задачи ускорение равно 6, составим уравнение:

$6t - 6 = 6$

$6t = 12$

$t = 2$

Ответ: $t = 6$ с.

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 138: выполнить задания № 267, 268, 269, 271, 272, 274, 275.

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Механический смысл производной».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Составьте уравнение касательной к графику функции в точке x_0, если а) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x, \quad x_0=3$; б) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}, \quad x_0=-2$. 2. Найдите скорость и ускорение тела через 2 с после начала движения, если тело движется по закону $x(t)=t^3-2t^2+5$.	1. Составьте уравнение касательной к графику функции в точке x_0, если а) $f(x)=2x^2+\frac{1}{3}x^3, \quad x_0=-3$; б) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}, \quad x_0=2$. 2. Найдите скорость и ускорение тела через 2 с после начала движения, если тело движется по закону $x(t)=t^4+0{,}5t^2-3t$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 88

Тема: Признаки возрастания (убывания) функции.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие производной, правила вычисления производных.

2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Алгоритм

1. Вычислить   данной функции.
2. Найти критические точки, для этого решить уравнение.
3. Критическими точками разбить область определения на интервалы.
4. На каждом из интервалов определяем знак производной. Для этого берем произвольное число из рассматриваемого интервала и подставляем в производную функции. По знаку ответа определяем знак производной.

5. По знаку производной делаем вывод о возрастании, убывании функции:

- если $f'(x) > 0$, то функция возрастает на данном интервале;
- если $f'(x) < 0$, то функция убывает на данном интервале.

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 142: выполнить задания № 279, 280, 281, 283.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 89

Тема: Критические точки функции, максимумы и минимумы.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие производной, правила вычисления производных.

2. Выполнить задания практической работы.

3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

Алгоритм исследования функции на экстремум:

1. Найти производную функции $f'(x)$.
2. Решить уравнение $f'(x) = 0$ и найти критические точки.
3. Критическими точками разбить область определения на интервалы.
4. Исследовать знак производной в некоторой окрестности каждой критической точки:

а) если при переходе через т. x_0 производная меняет знак с «+» на «-», то x_0 - точка *максимума;*

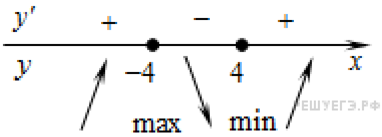
б) если при переходе через т. x_0 производная меняет знак с «-» на «+», то т. x_0 - точка *минимума.*

Пример 1. Найдите точку максимума функции $y = x^3 – 48x +17$.

Решение. Найдем производную заданной функции: $y' = 3x^2 - 48 = 3(x^2 – 16) = 3(x - 4)(x + 4)$.

Найдем нули производной: $3(x - 4)(x + 4) = 0$ $x = 4$; $x = - 4$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума x = - 4.

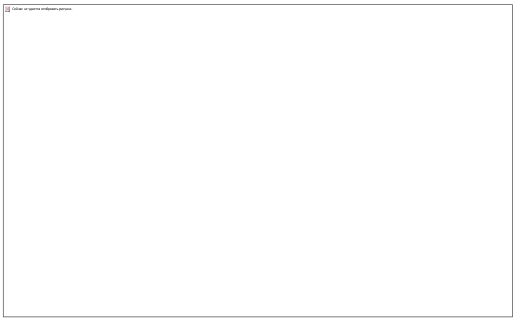
Ответ: -4

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 145: выполнить задания № 288, 290, 292

Задания самостоятельной работы.

1 вариант	**2 вариант**
1. Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 108x + 5$.	1. Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 147x + 14$.
2. Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 6{,}5x^2 + 8$.	2. Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 17{,}5x^2 + 50x + 18$.
3. Найдите точку максимума функции $y = 19 + 4x - \dfrac{x^3}{3}$.	3. Найдите точку минимума функции $y = 19 + 81x - \dfrac{x^3}{3}$.
4. Найдите точку минимума функции $y = \dfrac{72}{x} + 2x + 6$.	4. Найдите точку максимума функции $y = \dfrac{50}{x} + 2x + 6$.
5. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (- 1; 3). Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$. 	5. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (- 9; 5). Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$. 

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 90

Тема: Применение производной к исследованию функций.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие производной, правила вычисления производных.

2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Алгоритм исследования функции.

4. Найти область определения функции $D(f)$.

5. Исследовать функцию на четность, нечетность.

6. а) найти точки пересечения с осью Ox (если возможно), для этого достаточно решить систему $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$

б) найти точки пересечения с осью Oy, для этого решить систему $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$

4. Найти $f'(x)$ и решить уравнение $f'(x) = 0$.

5. Найти интервалы монотонности и экстремума функции.

6. Найти дополнительные точки.

7. Построить график функции.

<u>*Пример 1:*</u> Исследовать функцию $y = (x+1)\cdot(x-2)^2$ и построить ее график.

Решение:

1) Данная функция является многочленом (можно раскрыть скобки, получим многочлен третьей степени), поэтому она определена, непрерывна и дифференцируема при любых x. Поэтому область определения функции – вся числовая прямая.

2) Вычислим точки пересечения графика функции с осями координат:
график функции $y = (x+1)\cdot(x-2)^2$ пересекает ось Оx при $y = 0$, т. е.

$(x + 1)\cdot(x - 2)^2 = 0;$

$x + 1 = 0$ или $(x - 2)^2 = 0;$

$x = - 1$ или $x = 2.$

График функции $y=(x+1)\cdot(x-2)^2$ пересекает ось Оy при $x = 0$, т. е.

$y = (0 + 1)\cdot(0 - 2)^2 = 1\cdot4 = 4.$

Т.о. мы получили три точки: (–1; 0), (2; 0), (0; 4).

3) Найдем промежутки монотонности функции и ее экстремумы с помощью первой производной:

$y' = ((x + 1)\cdot(x - 2)^2)' = 3x\cdot(x - 2)$.

Из уравнения $y' = 0$ найдем критические точки: $3x\cdot(x - 2) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

Результаты решения занесем в таблицу:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$
	возрастает	max	убывает	min	возрастает

Функция возрастает на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$, убывает на интервале (0; 2), имеет максимум при x = 0 и минимум при x = 2: $y_{\max} = y(0) = 4$; $y_{\min} = y(2) = 0$.

4) Найдем промежутки выпуклости и точки перегиба с помощью второй производной:

$y'' = (3x\cdot(x - 2))' = 6\cdot(x - 1)$.

Кривая выпукла там, где $y'' < 0$, т. е. $6\cdot(x - 1) < 0$, $x < 1$.

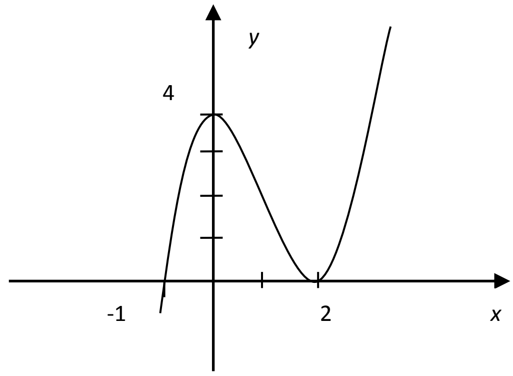
Кривая вогнута там, где $y'' > 0$, т. е. $x > 1$.

На интервале $(-\infty, 1)$ кривая выпукла; на интервале $(1, +\infty)$ – вогнута.

Точку перегиба найдем из уравнения $y''=0$. Т. о., $x=1$ – абсцисса точки перегиба, т.к. эта точка разделяет интервалы выпуклости и вогнутости кривой. Ордината точки перегиба: $y(1)=2$.Результаты решения занесем в таблицу:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	-	0	+
y		2	
	выпукла	перегиб	вогнута

5) По полученным точкам строим график:



Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 149: выполнить задания № 296 (а; б), 301 (а; б).

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 91

Тема: Решение примеров на исследование функций с помощью производной.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.
2. Отработать навыки исследования функций с помощью производной

Порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие производной, правила вычисления производных.
2. Выполнить задания практической работы.
3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

Алгоритм исследования функции.

7. Найти область определения функции $D(f)$.

8. Исследовать функцию на четность, нечетность.

9. а) найти точки пересечения с осью *Ox* (если возможно), для этого достаточно решить систему $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$

б) найти точки пересечения с осью *Oy*, для этого решить систему $\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$

8. Найти $f'(x)$ и решить уравнение $f'(x) = 0$.

9. Найти интервалы монотонности и экстремума функции.

10. Найти дополнительные точки.

11. Построить график функции.

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 149: выполнить задания № 300 (а; б), 301 (в; г).

Задания самостоятельной работы.

1 вариант	**2 вариант**
Исследуйте следующие функции и постройте их графики: 1. $y=-x^4+8x^2+9$ 2. $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2$	Исследуйте следующие функции и постройте их графики: 1. $y=x^3+6x^2+9x+8$ 2. $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 92

Тема: Контрольная работа по теме: «Производная функции и её применение».

Время выполнения: 2 ч.

Цель: проконтролировать знания студентов по теме: «Производная функции и её применение».

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- правила вычисления производных;
- геометрический и механический смысл производной;
- применение производной к исследованию функций.

2. Выполнить задания контрольной работы.

Контрольная работа по теме: «Производная функции и её применение».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Найдите производную функции в точке x_0 а). $y=3x^2, x_0=1$; б). $y=\cos x, x_0=\frac{\pi}{6}$; в). $y=-2\sin x, x_0=\frac{\pi}{4}$; г). $y=2+\sqrt{x}, x_0=4$. 2. Найдите производные функций:	1. Найдите производную функции в точке x_0 а). $y=2x^3, x_0=-1$; б). $y=\sin x, x_0=\frac{\pi}{3}$; в). $y=-2\cos x, x_0\,\frac{\pi}{4}$; г). $y=1+2\sqrt{x}, x_0=9$. 1. Найдите производные функций:

а). $y=\frac{2}{x^2}$; б). $y=x^2-5x+1$; в). $y=\frac{x^3-5x^2+1}{x}$; г). $y=\cos^2 x$; д). $y=(x^2-3x+1)^7$; е). $y=\sqrt{x^2-3x+1}$; ж). $y=x^3+e^x-\cos 3x$; з). $y=\sqrt{x}+2\ln x$; и). $y=\frac{\cos 3x}{x+1}$; к). $y=(4x=3)\cdot(x^2+1)$. 3. Напишите уравнение касательной к графику функции в точке x_0: а). $f(x)=\frac{1}{2}x^2, x_0=2$; б). $f(x)=\cos x, x_0=0$. 4. Исследуйте функцию и постройте её график: $y=x^3-12x$.	а). $y=\frac{3}{x^3}$; б). $y=\frac{x^5+4x^4-1}{x^2}$ в). $y=x\cdot(x^3+4x^2-1)$; г). $y=(x^2-4x-1)^2$; д). $y=\sqrt{x^2-4x-1}$; е). $y=\sin^2 x$; ж). $y=x^4-e^x-\cos x$; з). $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\ln x}$; и). $y=\frac{\sin 2x}{x-1}$; к). $y=(x^3+3x)\cdot(5x-2)$. 2. Напишите уравнение касательной к графику функции в точке x_0: а). $f(x)=x^2, x_0=-1$; б). $f(x)=\sin x, x_0=0$. 4. Исследуйте функцию и постройте её график: $y=6x-2x^3$.

<u>ТЕМА 10. ТЕЛА И ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ.</u>

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 93

Тема: Цилиндр. Площадь поверхности и объем цилиндра.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

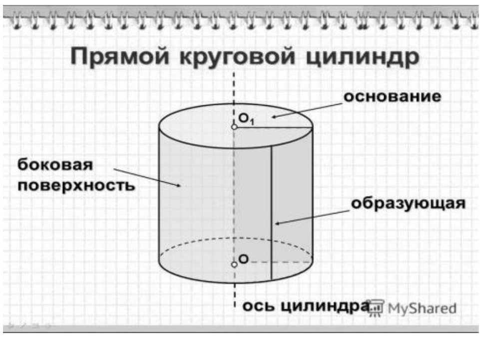
1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие цилиндра, его основных элементов, формулы площади поверхности и объема.
2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Цилиндр (круговой цилиндр) - это тело, которое состоит: из двух кругов, что совмещаются при параллельном переносе отрезков, что соединяют соответствующие точки данных кругов.



Основания цилиндра (их два) - это и есть вышеупомянутые круги, а отрезки, которые также упомянуты выше - это образующие данного цилиндра.

Свойства цилиндра.

1. Основания цилиндра лежат в параллельных плоскостях и равны между собой.

2. Образующие - равны и параллельны между собой. 3. Поверхность такого цилиндра состоит из боковой поверхности и оснований.

Основные элементы цилиндра.

1. Высота любого цилиндра H - это расстояние между плоскостями, в которых лежат основания.
2. Радиус любого цилиндра R - это радиус его основания.
3. Ось цилиндра - это прямая, которая проходит через оба центра оснований цилиндра. Она параллельна образующим.
4. Плоскость, которая проходит через любую образующую прямого цилиндра и в тоже время перпендикулярна осевому сечению, которое проведено через эту же образующую, называют касательной плоскостью прямого цилиндра.
5. Сечение любого цилиндра плоскостью, которая проходит через его же ось, называют осевым сечением.
6. Плоскость, которая перпендикулярна оси цилиндра, будет пересекать боковую поверхность цилиндра по окружности, которая равна окружности основания.

Площадь боковой поверхности цилиндра: $S_{б.\,п.} = 2\pi RH = \pi dH$

Площадь полной поверхности цилиндра: $S_{п.\,п.} = 2\pi R(H+R)$

Объем цилиндра: $V = \pi R^2 H = \pi \dfrac{d^2}{4} H$,

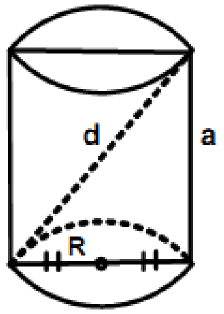
где R - радиус цилиндра;

H - высота цилиндра;

d - диаметр цилиндра.

<u>*Пример 1:*</u> Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна 8√2 см. Найдите объем цилиндра.

Решение:



$d = \sqrt{2}a$

$a = 2R \quad \Rightarrow \quad d = 2\sqrt{2}R$

$8\sqrt{2} = 2\sqrt{2}R$

$R = 4\ см$

$S_{осн} = \pi R^2 = 4^2\pi = 16\pi\ см$

$V = \pi R^2 H = S_{осн} \cdot a = 16\pi \cdot 2R = 16\pi \cdot 2 \cdot 4 = 128\pi\ см^3$

Ответ: $128\pi\ см^3$

Задания практической работы.

1. Вычислить объём цилиндра, если $d_{осн} = 4см,\ H = 10см.$
2. Вычислить объём цилиндра, если в осевом сечении квадрат с площадью 16 см^2.
3. Вычислить объём цилиндра, если диагональ осевого сечения цилиндра наклонена к плоскости основания под углом 60^0 и равна 20 см.
4. Осевое сечение цилиндра – квадрат, длина диагонали которого равна 20 см. Найдите радиус основания цилиндра.
5. Площадь осевого сечения цилиндра равна $6\sqrt{\pi}$ дм^2, а площадь основания цилиндра равна 25 дм^2. Найдите высоту цилиндра.
6. Найдите объем тела, которое получено при вращении квадрата со стороной 7 см вокруг прямой, соединяющей середины противоположных сторон.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 94

Тема: Конус. Площадь поверхности и объем конуса.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Выполнить задания самостоятельной работы.
2. Повторить понятие конуса, его основных элементов, формулы площади поверхности и объема.
3. Выполнить задания практической работы.

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Объём цилиндра».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Радиус цилиндра равен 4. Найдите отношение объёма цилиндра к его площади боковой поверхности. 2. Высота цилиндра на 10 больше радиуса основания. Площадь полной поверхности равна 144π. Найдите объём цилиндра.	1. Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ квадрата равна $8\sqrt{2}$. Найдите объём цилиндра. 2. Высота цилиндра на 2 меньше радиуса основания. Отношение объёма цилиндра к его площади боковой поверхности равно 4. Найдите высоту цилиндра.

Теория.

Конусом (прямым круговым конусом) называется тело, состоящее из круга (основания конуса), точки, не лежащей в плоскости этого круга (вершины конуса), и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания.

Элементы конуса.

Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются *образующими конуса.*

Конус называется *прямым,* если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания. В противном случае, конус называется *наклонным*.

Круговой конус — конус, у которого в основании круг.

Прямой круговой конус (просто конус) — круговой конус, у которого прямая, соединяющая вершину конуса с центром круга, лежащего в основании, перпендикулярна плоскости основания.

Ось конуса — прямая, проходящая через вершину конуса и центр основания конуса.

Высота конуса — отрезок оси конуса, соединяющий вершину конуса с центром основания.

Конус можно рассматривать как тело, полученное вращением прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его катет.

Образующие конуса - отрезок, соединяющий вершину конуса с точкой окружности основания.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называется *осевым сечением.*

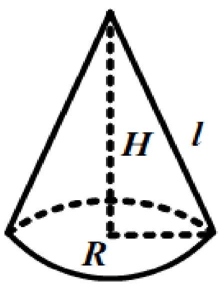
Площадь боковой поверхности конуса: $S_{б.\ п.} = \pi Rl$
Площадь полной поверхности конуса: $S_{п.\ п.} = \pi R(l + R)$

Объем конуса: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi\frac{d^2}{4}H$,

где R - радиус конуса;
H - высота конуса;
d - диаметр конуса;
l – образующая конуса.

<u>*Пример 1:*</u> Высота конуса равна 8 см, объем 24π см^3 . Найдите площадь полной поверхности конуса.

Решение:



$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{8}{3}\pi R^2 = 24\pi \ => R = 3$$

$$S_{\text{пол.}} = \pi R(l + R) =$$

$$= \pi R(\sqrt{H^2 + R^2} + R) = \pi \cdot 3(\sqrt{64 + 9} + 3) =$$

$$= 3\pi(\sqrt{73} + 3) \ \text{см}^2$$

Ответ: $3\pi(\ \overline{73} + 3)$*см*^{2}.

Задания практической работы.

1. Высота конуса равна $4\sqrt{3}$ см, а угол при вершине осевого сечения конуса равен 120°. Найдите площадь основания конуса.
2. Высота конуса 15 см, радиус основания – 20 см. Найти образующую конуса.
3. Площадь основания конуса 9π *см*^{2} ; полная поверхность 24π *см*^{2} . Найдите объем конуса.
4. Высота конуса равна *15 м*, а объем равен 320π *см*^{3}. Определите полную поверхность конуса.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 95

Тема: Усеченный конус. Площадь поверхности и объем усеченного конуса.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

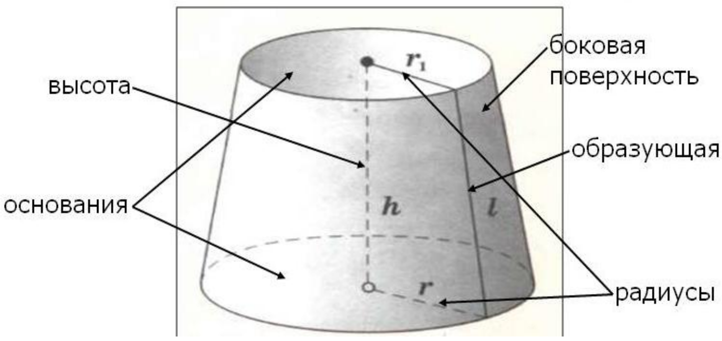
1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Выполнить задания самостоятельной работы.
2. Повторить понятие усеченного конуса, его основных элементов, формулы площади поверхности и объема.
3. Выполнить задания практической работы.

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Объём конуса».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Найдите объём конуса, высота которого равна 12 м, а образующая – 15 м. 2. Площадь основания конуса 16π см^2, полная поверхность его 32π см^2. Определите объём конуса.	1. Высота конуса равна 6 см, а боковая поверхность 24π см^2. Определите объём конуса. 2. Найдите объём конуса, высота которого равна 24 м, а образующая – 25м.

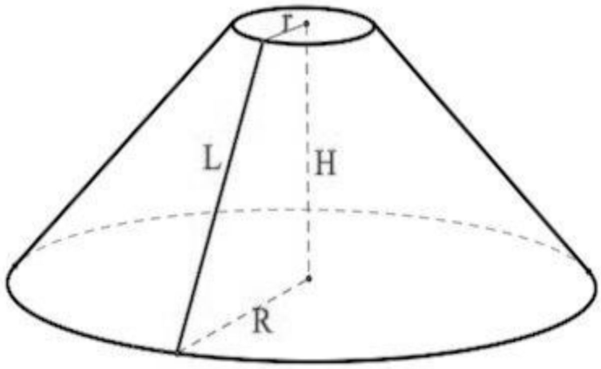


Теория.

Возьмем произвольный конус и проведем секущую плоскость, перпендикулярную к его оси. Эта плоскость пересекается с конусом по кругу и разбивает конус на две части. Одна из частей представляет собой конус, а другая называется усеченным конусом.

Основание исходного конуса и круг, полученный в сечении этого конуса плоскостью, называются *основаниями усеченного конуса*, а отрезок, соединяющий их центры — *высотой усеченного конуса.* Отрезки образующих полного конуса, заключенные между основаниями усеченного конуса, называют *образующими усеченного конуса.* При этом $l = \sqrt{(r - r_1)^2 + h^2}$.

УСЕЧЕННЫЙ КОНУС



$S_{бок}=\pi L(r+R)$

$S_{полн}=\pi\ (r^2+(r+R)\ L+R^2)$

$V=\frac{1}{3}\pi\ H(r^2+r\cdot R+R^2)$

Пример 1: Ведро имеет форму усеченного конуса, радиусы оснований которого равны 15 см и 10 см, а образующая равна 30 см. Сколько килограммов краски нужно взять для того, чтобы покрасить с обеих сторон 100 таких ведер, если на 1 м^2 требуется 150 гр. краски? (Толщину стенок ведер в расчет не принимать.)

Дано: $r_1 = 10$ см $= 0{,}1$ м; $r = 15$ см $= 0{,}15$ м; $l = 30$ см $= 0{,}3$ м; $n = 100$; на $1 м^2 – 150$ гр. краски.

Найти: m.

Решение: Найдем сначала площадь одного ведра внешней и внутренней поверхности, поэтому используя полученную формулу площади усеченного конуса, умножаем значение на 2: $S = 2 \cdot S_1 = 2 \cdot \pi l(r + r_1)$.

Подставим в формулу все известные величины: $S = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}3 \cdot (0{,}1 + 0{,}15) = 0{,}471$ м^2

Найдем суммарную поверхность 100 таких ведер: $S_{100} = 100 \cdot 0{,}471 = 47{,}1$ м^2.

Теперь найдем массу краски в килограммах, необходимую для покраски всех ведер:

$m = 47{,}1 \cdot 150 = 7065 гр. \approx 7{,}1 кг$.

Ответ: 7,1кг.

Задания практической работы.

1. Радиусы оснований усеченного конуса 3 дм и 7 дм, образующая 5 дм. Найдите площадь осевого сечения.
2. Радиусы оснований усеченного конуса 11см и 16см, образующая 13 см. Найти расстояние от центра верхнего основания до окружности большего.
3. Радиусы оснований усеченного конуса 1см и 5см, образующая 5 см. Найти радиус цилиндра с такой же высотой и такой же величиной боковой поверхности.
4. Радиусы оснований усеченного конуса 6см и 10см, образующая 5 см. Найти:
   а) радиус цилиндра с такой же высотой, полная поверхность которого была бы равновелика боковой поверхности данного усеченного конуса ;

   б) радиус цилиндра с такой же высотой, полная поверхность которого была бы равновелика полной поверхности данного усеченного конуса.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 96

Тема: Шар, сечение шара плоскостью. Площадь поверхности и объем шара и его частей

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Выполнить задания самостоятельной работы.
2. Повторить понятие шара и его частей, их основные элементы, формулы площади поверхности и объема.
3. Выполнить задания практической работы.

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Объём усеченного конуса».	
1 вариант	**2 вариант**
1. В усечённом конусе разность радиусов оснований равна 2 см, высота равна 9 см и его объём равен 42π см^3. Определите площади оснований.	1. Определите объём усечённого конуса, у которого радиусы оснований 15 м и 10 м, а боковая поверхность равновелика сумме оснований.
2. В равнобедренном треугольнике ABC AB = BC = 10, AC = 12. Треугольник вращается вокруг оси, проходящей через вершину B и перпендикулярной AC. Найдите объём тела вращения.	2. В равнобедренном треугольнике ABC AC = BC = 25, AB = 48. Треугольник вращается вокруг оси, проходящей через вершину C и перпендикулярной AB. Найдите объём тела вращения.

Теория.

Шаром принято называть тело, ограниченное сферой, т.е. шар и сфера – это разные геометрические тела.

Сфера – это фигура, состоящая из всех точек пространства, удалённых от данной точки на данном расстоянии.

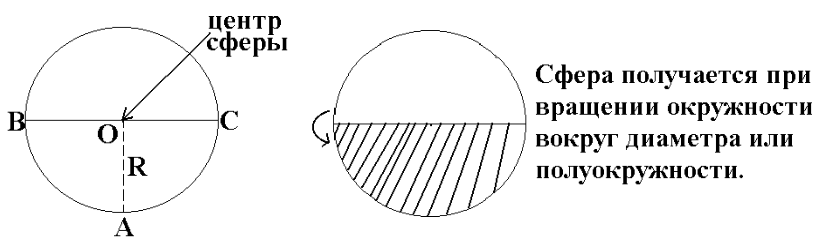


Рис.1. Сфера

Поверхность шара называют сферой. Если рассечь сферу плоскостью, получим в сечении окружность. Такие окружности имеют разные радиусы: чем дальше плоскость от центра сферы, тем меньше радиус сечения. Самые большие окружности получаются при сечении сферы плоскостями, проходящими через её центр. Такими большими окружностями на земной поверхности являются экватор и меридианы. А параллели – это сечения земной поверхности плоскостями, которые параллельны экваториальной плоскости.

Сферой называется фигура, состоящая из всех точек пространства, равноудалённых от данной точки. Эта точка называется *центром сферы и обычно обозначается О.*

Расстояние от точек сферы до её центра называется *радиусом сферы и обычно обозначается R. Радиусом* также называется любой отрезок, соединяющий точку сферы с её центром. *Сфера* – это граница шара. Центр, радиус и диаметр сферы являются также центром, радиусом и диаметром шара.

Шаром называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии не более чем на данное расстояние. Другими словами, *шар* – это объединение сферы и всех ее внутренних точек.

Всякое *сечение шара* плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

Основные геометрические формулы

Площадь сферы: $S = 4\pi r^2 = \pi d^2$.

Объем шара, ограниченного сферой: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

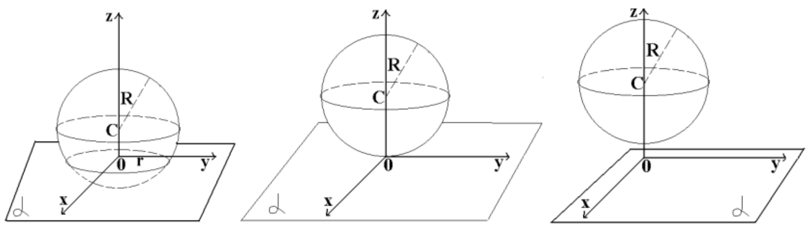


Рис.2 Взаимное расположение сферы и плоскости

Касательная плоскость к сфере

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется касательной плоскостью к сфере, а их общая точка называется точкой касания плоскости и сферы.

Радиус сферы, проведённый в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

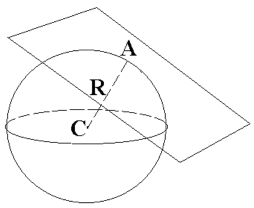
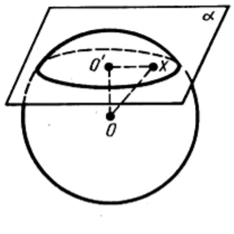


Рис. 3 Касательная плоскость к сфере

Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащий на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

Сечение шара

Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.



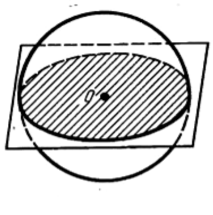


Рис. 4. Сечение шара

Пример 1: Два сечения шара радиуса 10 см параллельными плоскостями имеют радиусы, равные 6 см и 8 см. Найти расстояние между секущими плоскостями.

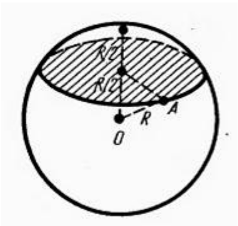
Решение:

находим расстояние каждой из параллельных плоскостей до центра шара из прямоугольных треугольников по теореме Пифагора: $d_1 = \sqrt{100-36} = 8$ см

или $d_2 = \sqrt{100-64} = 6$ см.

В зависимости от того, лежит ли центр шара между плоскостями или нет, получаем два различных ответа к задаче: *d*=14 см.

Пример 2: Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга



Решение:

отношение площади круга к площади полученного сечения равно:

$$\frac{\pi\left(R\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}{\pi R^2} = \frac{3}{4}.$$

Задания практической работы.

1. Шар, радиус которого равен 41 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Вычислите площадь получившегося сечения.
2. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная к нему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большого круга?
3. Радиус шара равен 63см. Точка находится на касательной плоскости на расстоянии 16 см от точки касания. Найти ее кратчайшее расстояние от поверхности шара.
4. Радиус шара *R*. Через конец радиуса проведена плоскость под углом в 60^0 к нему. Найти площадь сечения.
5. На поверхности шара даны три точки. Прямолинейные расстояния между ними: 6 см, 8 см и 10 см. Радиус шара равен 13см. Радиус шара равен 13см. Найти расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через эти три точки.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 97

Тема: Контрольная работа по теме: «Тела и поверхности вращения».

Время выполнения: 2 ч.

Цель: проконтролировать знания студентов по теме: «Тела и поверхности вращения».

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- Основные элементы тел вращения;
- Формулы площади поверхности и объема тел вращения.

2. Выполнить задания контрольной работы.

1 вариант	2 вариант
1. В цилиндре радиуса осевым сечением является квадрат, а площадь основания равна 36π дм^2. Найдите площадь полной поверхности цилиндра. 2. Высота конуса равна 6 см, а боковая поверхность 24π см^2. Определите объём конуса. 3. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 80π, а высота — 8. Найдите диаметр основания. 4. Осевое сечение конуса равносторонний треугольник со стороной 10 см. Найти площадь боковой поверхности конуса. 5. Радиусы шаров 20 дм и 26 дм, расстояние между их центрами 30 дм. Определите длину окружности, по которой пересекаются их поверхности. 6. Диаметры оснований усеченного конуса 10 см и 16 см, высота 4 см. Найти площадь его полной поверхности.	1. Радиус основания цилиндра равен 8 см, высота – 3 см. Найдите площадь полной поверхности цилиндра. 2. Площадь основания конуса 16π см^2, полная поверхность его 36π см^2. Определите объём конуса. 3. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 56π, а высота — 7. Найдите диаметр основания. 4. Высота конуса 12 см, образующая – 13 см. Найти боковую поверхность конуса. 5. Найти диаметр шара, если площадь его поверхности равна 289π. 6. Радиусы оснований усеченного конуса 4 дм и 8 дм, высота 5 дм. Найти площадь его полной поверхности.

ТЕМА 11. ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 98

Тема: Первообразная и её основное свойство. Таблица первообразных. Правила нахождения первообразных.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Вычисление первообразной функции».

2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие первообразной, правила вычисления первообразных.
2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Функция $F(x)$ называется первообразной от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если для всех $x \in [a;b]$ выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$

	Функция $f(x)$	**Первообразная** $F(x)$		**Функция** $f(x)$	**Первообразная** $F(x)$
1	k	$kx + C$	11	e^x	$e^x + C$
2	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	12	$sinx$	$-\cos x + C$
3	$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	13	$sin\ ax$	$-\frac{1}{a}\cos ax + C$
4	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$	14	$\cos x$	$\sin x + C$
5	$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	15	$\cos ax$	$\frac{1}{a}\sin ax + C$
6	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	16	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tgx + C$
7	$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$	17	$\frac{1}{\cos^2 ax}$	$\frac{1}{a}tgax + C$
8	a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	18	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-ctgx + C$
9	$(ax+b)^n$	$\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$	19	$\frac{1}{\sin^2 ax}$	$-\frac{1}{a}ctgax + C$
10	$\frac{1}{(ax+b)^n}$	$-\frac{1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}}$	20	$\frac{1}{\sqrt{ax+b}}$	$\frac{2\sqrt{ax+b}}{a} + C$

Пример 1: Выясните, является ли $F(x)=\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x-1$ первообразной для функции $f(x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x$ на $\boldsymbol{R}$?

Решение: Находим $F'(x)=(\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x-1)'=\frac{2}{9}\cdot 3x^2-3+(-\sin x)=$

$\frac{2}{3}x^2-3-\sin x=f(x)$

Следовательно, по определению $F(x)=\frac{2}{9}x^3-3x+\cos x-1$ является первообразной для функции $f(x)=\frac{2}{3}x^2-3-\sin x$ на $\boldsymbol{R}$.

Пример 2: Для функции $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\cos^2 x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4};1+2\sqrt{\pi}\right)$.

Решение: По основному свойству первообразных любая первообразная функции $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\cos^2 x}$ записывается в виде $F(x)=2\cdot 2\sqrt{x}-tgx+C$. Координаты точки $M\left(\frac{\pi}{4};1+2\sqrt{\pi}\right)$ графика искомой первообразной должны удовлетворять уравнению:

$$1+2\sqrt{\pi}=4\sqrt{\frac{\pi}{4}}-tg\frac{\pi}{4}+C$$
$$1+2\sqrt{\pi}=2\sqrt{\pi}-1+C$$
$$C=1+2\sqrt{\pi}-2\sqrt{\pi}+1$$
$$C=2$$

Следовательно, уравнение искомой первообразной имеет вид: $F(x)=4\sqrt{x}-tgx+2$.

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 170: выполнить задания № 326, 328, 332,

стр. 175: выполнить задания № 335, 336

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 99

Тема: Нахождение первообразных функции.

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Нахождение первообразной функции».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие первообразной, правила вычисления первообразных.
2. Выполнить задания самостоятельной работы.
3. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Функция $F(x)$ называется первообразной от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если для всех $x \in [a;b]$ выполняется равенство: $F'(x) = f(x)$

	Функция $f(x)$	Первообразная $F(x)$		Функция $f(x)$	Первообразная $F(x)$
1	k	$kx + C$	11	e^x	$e^x + C$
2	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	12	$\sin x$	$-\cos x + C$
3	$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	13	$\sin ax$	$-\frac{1}{a}\cos ax + C$
4	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$	14	$\cos x$	$\sin x + C$
5	$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	15	$\cos ax$	$\frac{1}{a}\sin ax + C$
6	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	16	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tgx + C$
7	$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$	17	$\frac{1}{\cos^2 ax}$	$\frac{1}{a}tgax + C$
8	a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	18	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-ctgx + C$
9	$(ax+b)^n$	$\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$	19	$\frac{1}{\sin^2 ax}$	$-\frac{1}{a}ctgax + C$
10	$\frac{1}{(ax+b)^n}$	$-\frac{1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}}$	20	$\frac{1}{\sqrt{ax+b}}$	$\frac{2\sqrt{ax+b}}{a} + C$

Задания самостоятельной работы.

1 вариант		2 вариант	
Функция f(x)	**Первообразная F(x)**	**Функция f(x)**	**Первообразная F(x)**
x^2	$\ln x$	e^x	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x^4}$	$\frac{1}{2}\sin 2x$	$\cos x$	$\frac{1}{3}tgx$
3^x	$-\cos x$	6	e^x
e^x	$\frac{x^3}{3}$	x^3	$-2\cos\frac{x}{2}$
$\sin x$	e^x	2^x	$6x$
$\cos 2x$	$-\frac{1}{2}ctgx$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{2^x}{\ln 2}$
$(3x-1)^3$	$\frac{3^x}{\ln 3}$	$(5x+3)^4$	$-\frac{1}{4(2x-4)^2}$
$\frac{1}{2\sin^2 x}$	$\frac{(3x-1)^4}{12}$	$\frac{1}{3\cos^2 x}$	$\frac{x^4}{4}$
-5	$-5x$	$\sin\frac{x}{2}$	$\frac{(5x+3)^5}{25}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{3x^3}$	$\frac{1}{(2x-4)^3}$	$\sin x$

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 178: выполнить задания № 342 (а: б), 343 (а: б), 344 (а: б), 345(а: б),

стр. 244: выполнить задания № 541.

стр. 251: выполнить задания № 563.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 100

Тема: Определенный интеграл.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Определенный интеграл».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие интеграла, правила вычисления определенного интеграла.
2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Определённым интегралом от непрерывной функции *f(x)* на конечном отрезке [a, b] (где $a \neq b$) называется приращение какой-нибудь её первообразной на этом отрезке. При этом употребляется запись $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Решить определенный интеграл – это значит, найти число.

Вычисляется определенный интеграл с помощью ***формулы Ньютона-Лейбница:***

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

a – нижний предел интегрирования;

b – верхний предел интегрирования;

f(x) – подинтегральная функция;

F(X) – первообразная.

Этапы решения определенного интеграла:

1) Сначала находим первообразную функцию *F(X)* (неопределенный интеграл). Обратите внимание, что константа *C* в определенном интеграле *не добавляется.*

2) Подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию: *F(b)* .

3) Подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию: *F(a)* .

4) Рассчитываем разность *F(b) - F(a)* , то есть, находим число.

Пример 1: Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 e^{2x}dx$.

Решение: На основании таблицы основных интегралов и формулы имеем:

$$\int\limits_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right).$$

Пример 2: Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^2 \left(x^2 + 2x + 1\right)dx$.

Решение: На основании таблицы основных интегралов имеем:

$$\int_{-1}^{2}(x^2+2x+1)dx=\left(\frac{1}{3}x^3+2\cdot\frac{1}{2}x^2+x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\left(\frac{1}{3}\cdot 2^3+2^2+2\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot(-1)^3+(-1)^2+(-1)\right)=9$$

<u>*Пример 3*</u>: Вычислить интеграл $\int_0^8(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})dx$.

Решение: На основании таблицы основных интегралов имеем:

$$\int_0^8(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})dx=\int_0^8\left(\sqrt{2\cdot\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}\right)dx=\sqrt{2}\int_0^8\sqrt{x}dx+\int_0^8\sqrt[3]{x}dx=\sqrt{2}\int_0^8 x^{\frac{1}{2}}dx+\int_0^8 x^{\frac{1}{3}}dx=$$

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\right)\Bigg|_0^8=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\right)\Bigg|_0^8=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{8^3}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{8^4}\right)-$$

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{0^3}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{0^4}\right)=33\frac{1}{3}$$

<u>*Пример 4:*</u> Вычислить интеграл $\int_4^{4\sqrt{3}}\frac{dx}{16+x^2}$.

Решение. На основании таблицы основных интегралов имеем:

$$\int_4^{4\sqrt{3}}\frac{dx}{16+x^2}=\int_4^{4\sqrt{3}}\frac{dx}{4^2+x^2}=\frac{1}{2}arctg\frac{x}{4}\Bigg|_4^{4\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\left(arctg\frac{4\sqrt{3}}{4}-arctg\frac{4}{4}\right)=\frac{1}{2}(arctg\sqrt{3}-arctg1)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{24}$$

Таблица интегралов.

1	$\int dx=x+C$;	9	$\int\sin xdx=-\cos x+C$;
2	$\int adx=ax+C$;	10	$\int\cos xdx=\sin x+C$;
3	$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$;	11	$\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=-ctgx+C$;
4	$\int\frac{dx}{x}=\ln\mid x\mid+C$;	12	$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=tgx+C$
5	$\int\frac{1}{x^n}dx=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+C$;	13	$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{2}arctg\frac{x}{a}+C$;
6	$\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C$;	14	$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\|+C$;

7	$\int e^x dx = e^x + C;$	15	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$
8	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$	16	$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C;$

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 186: выполнить задания № 357, 358, 359, 362, 363.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 101

Тема: Вычисление определённого интеграла.

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Определенный интеграл».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие определенного интеграла, его правила вычисления.
2. Выполнить задания самостоятельной работы.
3. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Этапы решения определенного интеграла:

1) Сначала находим первообразную функцию *F(X)* (неопределенный интеграл). Обратите внимание, что константа *C* в определенном интеграле *не добавляется.*

2) Подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию: *F(b)* .

3) Подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию: *F(a)* .

4) Рассчитываем разность *F(b) - F(a)* , то есть, находим число.

Таблица интегралов.

1	$\int dx = x + C;$	9	$\int \sin x dx = -\cos x + C;$
2	$\int a dx = ax + C;$	10	$\int \cos x dx = \sin x + C;$

3	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;$	11	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C;$
4	$\int \frac{dx}{x} = \ln\| x \| + C;$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$
5	$\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C;$	13	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2} arctg \frac{x}{a} + C;$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C;$	14	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{a+x}{a-x} \right\| + C;$
7	$\int e^x dx = e^x + C;$	15	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$
8	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$	16	$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C;$

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Первообразная и интеграл».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Найдите общий вид первообразных для функции: а). $f(x) = x^2 - \sin x$; б). $f(x) = 4 - \frac{2}{x^3}$ 2. Вычислите интегралы: а). $\int_0^3 (x^2 + 4x - 1)dx$; б). $\int_{\frac{1}{3}}^{1} (3 - \frac{1}{x^2})dx$; в). $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} dx$.	1. Найдите общий вид первообразных для функции: а). $f(x) = 4x^3 + \cos x$; б). $f(x) = \frac{4}{x^5} - 3$ 2. Вычислите интегралы: а). $\int_0^2 (2x^2 - 2x + 4)dx$; б). $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{2}{x^3} + 8 \right) dx$ в). $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 3 \sin 3x dx$.

Задания практической работы.

Вычислите интегралы следующих функций:

1) $\int\limits_{-\frac{2}{3}}^{1} x^3 dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx$; 3) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 3x}$; 4) $\int\limits_{1}^{2} (3x^2 - x + 5) dx$; 5) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^3}$; 6) $\int\limits_{0}^{4} \sqrt{x} dx$;

7) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$; 8) $\int\limits_{0}^{4} (x - 3\sqrt{x}) dx$; 9) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x + 3}}$; 10) $\int\limits_{0}^{4} \sqrt[3]{3x - 4} dx$; 11) $\int\limits_{-1}^{2} x^4 dx$; 12) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; 13) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 2x}$; 14) $\int\limits_{0}^{1} e^x dx$; 1 5) $\int\limits_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$; 16) $\int\limits_{1}^{8} \sqrt[3]{x^2} dx$; 17) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9 + x^2}$;

1 8) $\int\limits_{1}^{9} \left(2x - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx$ 19) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{5x - 2}}$; 20) $\int\limits_{0}^{4} \sqrt{3 - 4x} dx$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 102

Тема: Площадь криволинейной трапеции.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Площадь криволинейной трапеции».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие интеграла, правила вычисления определенного интеграла.
2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Таблица интегралов.

1	$\int dx = x + C$;	9	$\int \sin x dx = -\cos x + C$;
2	$\int a dx = ax + C$;	10	$\int \cos x dx = \sin x + C$;
3	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$;	11	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$;
4	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C$;	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$
5	$\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$;	13	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2} arctg \frac{x}{a} + C$;

6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;	14	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{a+x}{a-x} \right\| + C$;
7	$\int e^x dx = e^x + C;$	15	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$;
8	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$	16	$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C;$

*Геометрический смысл определенного интеграла***.** Если интегрируемая на отрезке $[a; b]$ функция $y = f(x)$ неотрицательна, то $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции: $\int_a^b f(x)dx = S_{кр.тр.}$

Криволинейная трапеция - фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$, $x = b$**.**

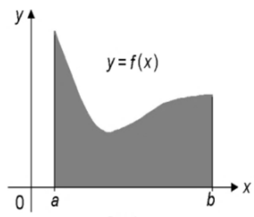
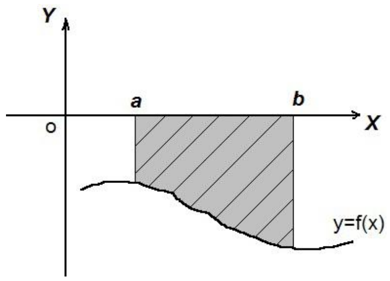


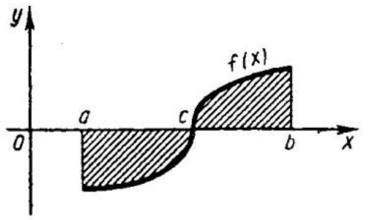
Рис. 1

<u>Возможны различные случаи расположения плоских фигур в координатной плоскости:</u>

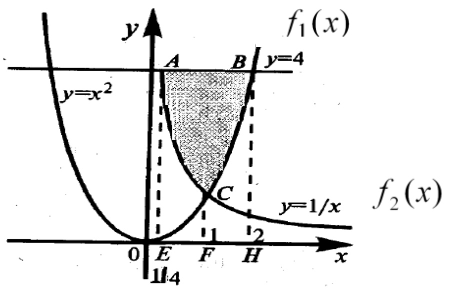
1) Если криволинейная трапеция с основанием $[a; b]$ ограничена снизу кривой $y = f(x)$**,** то из соображений симметрии видно, что площадь фигуры равна $S_ф = -\int_a^b f(x)dx$ или $S_ф = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$.



2) Если фигура ограничена кривой, которая принимает и положительные, и отрицательные значения**.** В этом случае, чтобы вычислить площадь искомой фигуры, необходимо разбить ее на части, тогда $S_ф = \left| \int_a^c f(x)dx \right| + \int_c^b f(x)dx$.



3) Если плоская фигура ограничена двумя кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, то ее площадь можно найти с помощью площадей двух криволинейных трапеций: $S_1 = \int_a^b f_1(x)dx$ и $S_2 = \int_a^b f_2(x)dx$. В данном случае площадь искомой фигуры можно вычислить по формуле: $S_ф = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx$.



Алгоритм решения задачи на вычисление площади фигуры, ограниченной заданными линиями:

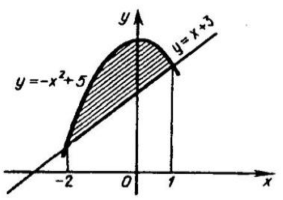
1) Построить в одной координатной плоскости заданные линии.
2) Заштриховать фигуру, ограниченную данными линиями.
3) Определить пределы интегрирования (найти абсциссы точек пересечения кривых).
4) Вычислить площадь фигуры, выбрав необходимую формулу.
5) Записать ответ.

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 5$; $y = x + 3$.

Решение.

1) Построим параболу $y = -x^2 + 5$ и прямую $y = x + 3$ в координатной плоскости.

2) Выделим (заштрихуем) фигуру, ограниченную данными линиями



3) Найдем абсциссы точек пересечения параболы и прямой. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 5 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

$$-x^2 + 5 = x + 3$$

$x^2 + x - 2 = 0$ $x_1 = -2$; $x_2 = 1$.

4) Площадь фигуры найдем как разность площадей криволинейных трапеций, ограниченных параболой и прямой.

$$S_1 = \int_{-2}^{1} (-x^2 + 5)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 5x\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \left(-\frac{1^3}{3} + 5\cdot 1\right) - \left(-\frac{(-2)^3}{3} + 5\cdot(-2)\right) = -\frac{1}{3} + 5 - \frac{8}{3} + 10 =$$

$12\ (ед^2)$

$$S_2 = \int_{-2}^{1} (x + 3)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \left(\frac{1^2}{2} + 3\cdot 1\right) - \left(\frac{(-2)^2}{2} + 3\cdot(-2)\right) = \frac{1}{2} + 3 - 2 + 6 = 7{,}5\ (ед^2)$$

$$S_ф = S_1 - S_2 = 12 - 7{,}5 = 4{,}5\ (ед^2)$$

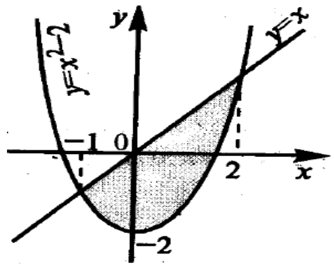
Ответ. $S_ф = 4{,}5\ (ед^2)$

<u>*Пример 2.*</u> Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2$ и $y = x$.

Решение.

1) Построим параболу $y = x^2 - 2$ и прямую $y = x$ в координатной плоскости.

2) Выделим (заштрихуем) фигуру, ограниченную данными линиями



3) Найдем абсциссы точек пересечения параболы и прямой. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = x \end{cases}$$

$$x^2 - 2 = x$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -1$$

4) Площадь фигуры найдем как разность площадей криволинейных трапеций, ограниченных параболой и прямой.

$$S_1 = \int_{-1}^{2}(x^2-2)dx = \left(\frac{x^3}{3}-2x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \left(\frac{2^3}{3}-2\cdot 2\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}-2\cdot(-1)\right)=\frac{8}{3}-4+\frac{1}{3}-2=3-6=-3(ед^2)$$

$$S_2 = \int_{-1}^{2}x dx = \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{2^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2} = 2-\frac{1}{2} = 1{,}5(ед^2)$$

$$S_ф = S_2 - S_1 = 1{,}5-(-3) = 4{,}5\ (ед^2)$$

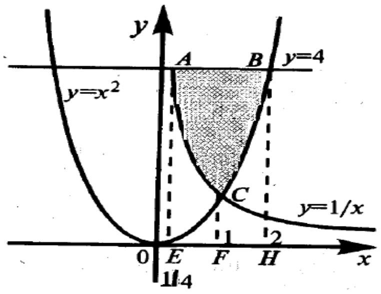
Ответ. $S_ф = 4{,}5\ (ед^2)$

<u>*Пример 3.*</u> Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{x}$, $y=x^2$, $y=4$ в неотрицательной координатной четверти.

Решение.

1) Построим параболу $y=x^2$, гиперболу $y=\frac{1}{x}$, и прямую $y=4$ в координатной плоскости.

2) Выделим (заштрихуем) фигуру, ограниченную данными линиями.



3) Найдем абсциссы точек пересечения параболы и гиперболы. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{aligned} x^2 &= \frac{1}{x} \\ x^3 &= 1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

4) Найдем абсциссы точек пересечения параболы и прямой, гиперболы и прямой. Для этого решим уравнения $x^2=4$ и $\frac{1}{x}=4$. Получим $x=\pm 2$ и $x=\frac{1}{4}$.

5) Искомая площадь фигуры ABC равна разности между площадью прямоугольника ABHE и суммой площадей двух криволинейных трапеций ACFE и CBHF.

6) Вычислим площадь ABHE: AE = 4 (*ед*), EH = $4-\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}$ (*ед*), тогда

$$S_{ABHE}=4\cdot 3\frac{1}{4}=12(ед^2)$$

7) Вычислим площадь ACFE: $S_{ACFE}=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}=\ln 1-\ln\frac{1}{4}=\ln 1:\frac{1}{4}=\ln 4(ед^2)$

8) Вычислим площадь CBHF: $S_{CBHF}=\int_{1}^{2}x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{1}^{2}=\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}(ед^2)$

9) Искомая площадь ABC:

$$S_{ABC}=S_{ABHE}-(S_{ACFE}+S_{CBHF})=12-\left(\ln 4+2\frac{1}{3}\right)\approx 12-(1{,}386+2{,}333)\approx 8{,}281\,(ед^2).$$

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 186: выполнить задания № 360 (а: б), 361 (а: б), 364 (а: б).

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 103

Тема: Вычисление площади криволинейной трапеции.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Площадь криволинейной трапеции».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить понятие интеграла, правила вычисления определенного интеграла.
2. Выполнить задания практической работы.
3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

Таблица интегралов.

1	$\int dx=x+C$;	9	$\int\sin xdx=-\cos x+C$;
2	$\int adx=ax+C$;	10	$\int\cos xdx=\sin x+C$;

3	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;$	11	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C;$
4	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C;$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$
5	$\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C;$	13	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2} arctg \frac{x}{a} + C;$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;	14	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{a+x}{a-x} \right\rvert + C;$
7	$\int e^x dx = e^x + C;$	15	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$
8	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$	16	$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C;$

*Геометрический смысл определенного интеграла***.** Если интегрируемая на отрезке $[a;b]$ функция $y = f(x)$ неотрицательна, то $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции: $\int_a^b f(x)dx = S_{кр.тр.}$

Криволинейная трапеция - фигура, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$, $x = b$**.**

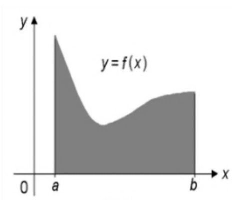
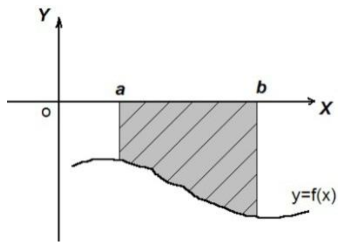


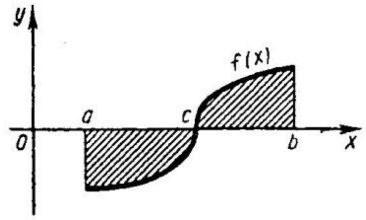
Рис. 1

Возможны различные случаи расположения плоских фигур в координатной плоскости:

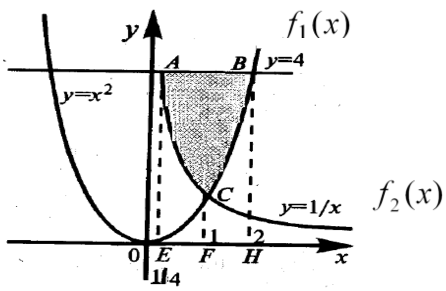
5) Если криволинейная трапеция с основанием $[a;b]$ ограничена снизу кривой $y = f(x)$**,** то из соображений симметрии видно, что площадь фигуры равна $S_ф = -\int_a^b f(x)dx$ или $S_ф = \left\lvert \int_a^b f(x)dx \right\rvert$.



6) Если фигура ограничена кривой, которая принимает и положительные, и отрицательные значения**.** В этом случае, чтобы вычислить площадь искомой фигуры, необходимо разбить ее на части, тогда $S_{ф} = \left|\int\limits_{a}^{c} f(x)dx\right| + \int\limits_{c}^{b} f(x)dx$.



7) Если плоская фигура ограничена двумя кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$**,** то ее площадь можно найти с помощью площадей двух криволинейных трапеций: $S_1 = \int\limits_{a}^{b} f_1(x)dx$ и $S_2 = \int\limits_{a}^{b} f_2(x)dx$. В данном случае площадь искомой фигуры можно вычислить по формуле: $S_{ф} = \int\limits_{a}^{b} f_1(x)dx - \int\limits_{a}^{b} f_2(x)dx$.



Алгоритм решения задачи на вычисление площади фигуры, ограниченной заданными линиями:

6) Построить в одной координатной плоскости заданные линии.
7) Заштриховать фигуру, ограниченную данными линиями.
8) Определить пределы интегрирования (найти абсциссы точек пересечения кривых).
9) Вычислить площадь фигуры, выбрав необходимую формулу.
10) Записать ответ.

Задания практической работы.

«Алгебра и начала анализа, 10—11»: учебник для 10 – 11 классов общеобразовательных учреждений под редакцией А. Н. Колмогорова.

стр 187: выполнить задания № 364 (а: б), 365 (а: б).

Задания самостоятельной работы.

1 вариант	**2 вариант**
Вычислить площади фигур, ограниченных линиями: 1) $y = x^4, \quad y = 0, \quad y = -1, \quad y = 1;$ 2) $y = x^3, \quad y = 8, \quad x = 1;$ 3) $y = 4x - x^2, \qquad y = 4 - x.$	Вычислить площади фигур, ограниченных линиями: 1) $y = x^2 - 4x + 5, \qquad y = 0, \quad x = 0, x = 4;$ 2) $y = -x^2 - 4x, \quad y = 0, \quad y = -3, \quad x = -1;$ 3) $y = x^2, \qquad y = 2x.$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 104

Тема: Контрольная работа по теме: «Первообразная и интеграл».

Время выполнения: 2 ч.

Цель: проконтролировать знания студентов по теме: «Первообразная и интеграл».

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- правила вычисления первообразной;
- правила вычисления интеграла;
- площадь криволинейной трапеции.

2. Выполнить задания контрольной работы.

Контрольная работа по теме: «Первообразная и интеграл».	
1 вариант	**3 вариант 4**
1. Найдите общий вид первообразной *F(x)* для функции *f(x):* а). $f(x) = 3x^2 - 2$; б). $f(x) = 4\cos 2x$; в). $f(x) = \frac{1}{x^2} - 2x$; г). $f(x) = (2x+5)^4$; 2. Для функции $f(x)$ найдите ту первообразную, график которой проходит	1. Найдите общий вид первообразной *F(x)* для функции *f(x):* а). $f(x) = 4x^3 - 6x$; б). $f(x) = \sin(2x - 4)$; в). $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} - x$; г). $f(x) = (3x+6)^5$; 2. Для функции $f(x)$ найдите ту первообразную, график которой

через точку M, если: а). $f(x)=3x^2,\quad M(-1\,;2)$; б). $f(x)=\sin\, x,\quad M(\frac{\pi}{2}\,;-1)$. 3. Вычислите: а) $\int\limits_2^5 4\ \ dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x+1)^5}$; в) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\, 3x dx$; г). $\int\limits_1^4 (x^2-6x+9)dx$. 4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: а). $y=x^2\quad ,y=0,\quad x=1,\quad x=3$; б). $y=\frac{1}{2}\cos x,\quad x=\frac{\pi}{6},\quad y=\frac{\pi}{3}$; в). $y=2x^2,\quad y=2x$.	проходит через точку M, если: а). $f(x)=2x^3,\quad M(1\,;-1)$; б). $f(x)=\cos x,\quad M(\pi\,;1)$. 3. Вычислите: а). $\int\limits_1^3 x^3 dx$; б). $\int\limits_0^1 (x^2-2x+1)dx$; в). $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x dx$; г). $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}$. 4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: а). $y=x^3,\quad y=0,\quad x=1,\quad x=2$; б). $y=2\sin\, x,\quad y=0,\quad y=\pi$. в). $y=0{,}5x^2,\quad y=x$.

ТЕМА 12. КОМБИНАТОРИКА.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 105

Тема: Основные понятия комбинаторики.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Основные понятия комбинаторики.».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить основные понятия комбинаторики.
2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Соединения, их виды

Группы, составленные из каких – либо элементов, называются *соединениями*.

Различаю три основных вида соединений: *размещения, перестановки и сочетания*.

Размещениями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m обозначается и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...[n-(m-1)].$$

Перестановками из n элементов называются такие соединения из всех n элементов, которые отличаются друг от друга порядком расположения элементов.

Перестановки представляют частный случай размещений из n элементов по n в каждом.

Число всех перестановок из n элементов равно произведению последовательных чисел от 1 до n включительно: $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1)n$,

$n!$-читается «n-факториал», причем 0!=1 и 1!=1.

Используя приведенные выше определения имеем формулы: $A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!}$,

при решении задач часто используется равенство: $A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m$.

Сочетаниями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается и вычисляется по формуле: $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n^m}$,

которую можно записать также в виде $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

или $C_n^m = \frac{n(n-1)...[n-(m-1)]}{m!}$.

Кроме того, при решении задач используются следующие формулы, выражающие основные свойства сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \ (0 \le m \le n), \quad C_n^n = 1; \quad C_n^0 = 1; \quad C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$$

<u>*Пример 1:*</u> Найти число размещений из 10 элементов по 4.

Решение: по формуле $A_n^m = n(n-1)(n-2)...[n-(m-1)]$:

$$A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

<u>*Пример 2:*</u> Решить уравнение: $A_n^5 = 30A_{n-2}^4$.

Решение:

используя формулу для вычисления числа размещений имеем:

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 30(n-2)(n-3)(n-4)(n-5).$$

Разделим обе части на одинаковые выражения, получим: $n(n-1)=30(n-5)$,

и решим получившееся квадратное уравнение: $n_1=6, \ \ n_2=25$.

Пример 3: Решите систему: $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 66 \end{cases}$.

Решение: решим второе уравнение:

$$C_x^2 = 66 \Rightarrow \frac{x(x-1)}{1\cdot 2} = 66;$$

$$x^2 - x - 132 = 0;$$
$$x_1 = -11, \ \ x_2 = 12.$$

Т. к. $x>2$, то -11 не удовлетворяет условию задачи. Подставив x=12 в первое уравнение системы, получим $C_{12}^y = C_{12}^{y+2}$.

Используя основное свойство сочетаний, имеем: $C_{12}^y = C_{12}^{12-y}$,

тогда $C_{12}^{12-y} = C_{12}^{y+2} \Rightarrow 12-y = y+2 \Rightarrow y=5$.

Ответ: x= 12, y = 5.

Пример 4: Сколькими способами из восьми кандидатов можно выбрать три лица на три должности?

Решение: условию задачи соответствуют размещения 3 из 8, имеем: $A_8^3 = 8\cdot 7\cdot 6 = 336$.

Задания практической работы.

1. Вычислите: а) $\frac{7!+8!}{5!+6!}$ б) $\frac{17*6!+8!}{7!+9!}$ в) $\frac{7}{11}*\frac{(10!)^2-(9!)^2}{(8!)^2-(7!)^2}$ г) $\frac{(7!)^2*(6!)^2}{4!*5!*8!*9!}$
2. Сколько различных двузначных чисел с разными цифрами можно записать, используя цифры: 1) 1, 2 и 3; 2) 6, 7, 8 и 9;
3. Сколько различных пятизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, чтобы: 1) последней была цифра 3; 2) первой была цифра 5, а второй — цифра 1;
4. Сколько существует способов для обозначения с помощью букв A, B, C, D, E , F вершин данного: 1) четырёхугольника; 2) треугольника?
5. Сколькими способами для участия в конференции из 9 членов научного общества можно выбрать: 1) троих студентов; 2) четверых студентов?
6. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 8, 9 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр?
7. Из 6 открыток надо выбрать 3. Сколькими способами это можно сделать?
8. Решите уравнение: $A_x^3 = \frac{1}{20}A_x^4$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 106

Тема: Правила комбинаторики. Решение комбинаторных задач.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Основные понятия комбинаторики.».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить основные понятия комбинаторики.
2. Выполнить задания практической работы.
3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

Соединения, их виды

Группы, составленные из каких – либо элементов, называются *соединениями*.

Различаю три основных вида соединений: *размещения, перестановки и сочетания*.

Размещениями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m обозначается и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...[n-(m-1)].$$

Перестановками из n элементов называются такие соединения из всех n элементов, которые отличаются друг от друга порядком расположения элементов.

Перестановки представляют частный случай размещений из n элементов по n в каждом.

Число всех перестановок из n элементов равно произведению последовательных чисел от 1 до n включительно: $P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot(n-1)n$,

$n!$-читается «n-факториал», причем 0!=1 и 1!=1.

Используя приведенные выше определения имеем формулы: $A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!}$,

при решении задач часто используется равенство: $A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m$.

Сочетаниями из n элементов по m в каждом называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается и вычисляется по формуле: $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_n^m}$,

которую можно записать также в виде $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

или $C_n^m = \dfrac{n(n-1)...[n-(m-1)]}{m!}$.

Кроме того, при решении задач используются следующие формулы, выражающие основные свойства сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \ (0 \le m \le n),\ \ C_n^n = 1;\ \ C_n^0 = 1;\ \ C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$$

Пример 1: Найти число размещений из 10 элементов по 4.

Решение: по формуле $A_n^m = n(n-1)(n-2)...[n-(m-1)]$:

$A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

Пример 2: Решить уравнение: $A_n^5 = 30 A_{n-2}^4$.

Решение:

используя формулу для вычисления числа размещений имеем:

$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 30(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$.

Разделим обе части на одинаковые выражения, получим: $n(n-1) = 30(n-5)$,

и решим получившееся квадратное уравнение: $n_1 = 6,\ \ n_2 = 25$.

Пример 3: Решите систему: $\begin{cases} C_x^y = C_x^{y+2} \\ C_x^2 = 66 \end{cases}$.

Решение: решим второе уравнение:

$C_x^2 = 66 \Rightarrow \dfrac{x(x-1)}{1 \cdot 2} = 66;$

$x^2 - x - 132 = 0;$
$x_1 = -11,\ \ x_2 = 12$.

Т. к. $x > 2$, то –11 не удовлетворяет условию задачи. Подставив x=12 в первое уравнение системы, получим $C_{12}^y = C_{12}^{y+2}$.

Используя основное свойство сочетаний, имеем: $C_{12}^{y} = C_{12}^{12-y}$,

тогда $C_{12}^{12-y} = C_{12}^{y+2} \Rightarrow 12 - y = y + 2 \Rightarrow y = 5$.

Ответ: x= 12, y = 5.

Пример 4: Сколькими способами из восьми кандидатов можно выбрать три лица на три должности?

Решение: условию задачи соответствуют размещения 3 из 8, имеем: $A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Задания практической работы.

1. Вычислите, а затем сравните: а) C_{17}^{3} или C_{18}^{4} б) C_{18}^{4} или C_{19}^{5} в) C_{19}^{5} или C_{18}^{6}
2. Из 10 кандидатов нужно выбрать 3 человека на конференцию. Сколькими различными способами это можно сделать?
3. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр?
4. Решите уравнение: а) $30A_{x-2}^{4} = A_x^5$ б) $30x = A_x^3$.
5. Сколькими способами могут разместиться 5 человек вокруг круглого стола?
6. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал семи различных цветов?
7. Бригадир должен отправить на работу бригаду из 3 человек. Сколько таких бригад можно составить из 8 человек?
8. На собрании должны выступить 5 человек (*А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д*). Сколькими способами их можно разместить в списке выступающих, если *А* должен выступать первым?

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Элементы комбинаторики».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Учащиеся изучают 10 предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день так, чтобы было 6 различных уроков? 2. Сколькими способами могут сесть в автомобиль 5 человек, каждый из которых может быть водителем? 3. У некоторых народов принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен 200, а дают ему не более 3 имен?	1. Труппа театра состоит из 12 актеров. Сколькими способами можно выбрать 4 претендентов на ведущие роли в пьесе? 2. Собрание сочинений Дж. Лондона состоит из 7 томов. Сколькими способами можно разместить эти тома на книжной полке? 3. Комплексная бригада состоит из 2 маляров, 3 штукатуров и 2 столяров. Сколько различных бригад можно создать из коллектива, в котором 15 маляров, 10 штукатуров и 5 столяров?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 107

Тема: Решение комбинаторных задач.

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Основные понятия комбинаторики.».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить основные понятия комбинаторики.
2. Выполнить задания практической работы.
3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

Число размещений из *n* элементов по *m* обозначается и вычисляется по формуле:

$A_n^m = n(n-1)(n-2)...[n-(m-1)]$.

Число всех перестановок из *n* элементов равно произведению последовательных чисел от 1 до *n* включительно: $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1)n$,

$n!$-читается «*n*-факториал», причем 0!=1 и 1!=1.

Используя приведенные выше формулы имеем: $A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!}$,

при решении задач часто используется равенство: $A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m$.

Число сочетаний из *n* элементов по *m* обозначается и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n^m},$$

которую можно записать также в виде $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

или $C_n^m = \frac{n(n-1)...[n-(m-1)]}{m!}$.

Кроме того, при решении задач используются следующие формулы, выражающие основные свойства сочетаний:

$C_n^m = C_n^{n-m}$ $(0 \le m \le n)$, $C_n^n = 1$; $C_n^0 = 1$; $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$

Задания практической работы.

1. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеются ткани 6 цветов?
2. В забеге участвуют 12 спортсменов. Сколько существует способов занять на финише 1-е, 2-е или 3- е место?
3. Имеется 10 кроликов. Необходимо выбрать из них 4 и посадить их в 4 клетки, обозначенные $К_1$, $К_2$, $К_3$, $К_4$. Сколькими способами можно это сделать?
4. Дано множество $\{1, 3, 4, 6, 8, 9\}$. Сколько трехзначных чисел можно образовать из элементов этого множества, если не допускать повторений цифр?
5. Сколькими способами можно заполнить карточку «Спортлото» (зачеркнуть 6 номеров их 49)?
6. В лабораторной клетке находится 8 белых и 6 коричневых кроликов. Найдите число способов выбора пяти кроликов их клетки, если: а) они могут быть любого цвета; б) 3 из них должны быть белыми, а 2 коричневыми; в) все 5 кроликов должны быть белыми; г) все 5 кроликов должны быть коричневыми.
7. В первые три вагона поезда садятся 9 пассажиров по 3 человека в каждый вагон. Сколькими способами можно это сделать?
8. Сколько можно составить семизначных телефонных номеров из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, чтобы в каждом отдельно взятом номере все цифры были различны?
9. В школьной лотерее на 50 билетов разыгрывается 8 выигрышей. Первый подошедший к урне ученик выбирает из урны 5 билетов. Сколькими способами он может их вынуть, чтобы: а) среди них оказалось ровно 2 выигрышных; б) по крайней мере 2 из них оказались выигрышными?
10. Из 10 роз и 8 георгинов нужно составить букет, содержащий 2 розы и 3 георгина. Сколько можно составить различных букетов?
11. Определите число элементов n из условия: а) $A_{2n}^3 = 20A_n^2$; б) $5C_n^3 = C_{n+2}^4$; в) $A_{n-4}^2 + A_{n-3}^2 + A_{n-2}^2 = 20$;
12. В урне находится 10 белых и 7 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать из урны 5 шаров, из которых белыми будут 3 шара?

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Элементы комбинаторики».	
1 вариант	**2 вариант**
1. Решите уравнение: $A_x^3 = \frac{1}{20} \cdot A_x^4$ 2. Бригадир должен отправить на работу бригаду из 3-х человек. Сколько таких бригад можно составить из 8 человек? 3. Группа учащихся изучает семь учебных	1. Решите уравнение: $30x = A_x^3$ 2. Сколькими способами можно расставить 6 томов энциклопедии, чтобы они стояли в беспорядке? 3. Сколько матчей будет сыграно в

дисциплин. сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот учебный день должно быть четыре различных урока?	футбольном чемпионате с участием 16 команд, если каждые две команды встречаются между собой один раз?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 108

Тема: Решение задач на перебор вариантов.

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Основные понятия комбинаторики».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить основные понятия комбинаторики.
2. Выполнить задания практической работы.
3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

Число размещений из n элементов по m обозначается и вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...[n-(m-1)].$$

Число всех перестановок из n элементов равно произведению последовательных чисел от 1 до n включительно: $P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (n-1)n$,

$n!$-читается «n-факториал», причем 0!=1 и 1!=1.

Используя приведенные выше формулы имеем: $A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!}$,

при решении задач часто используется равенство: $A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m$.

Число сочетаний из n элементов по m обозначается и вычисляется по формуле: $C_n^m = \frac{A_n^m}{P_n^m}$,

которую можно записать также в виде $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

или $C_n^m = \frac{n(n-1)...[n-(m-1)]}{m!}$.

Кроме того, при решении задач используются следующие формулы, выражающие основные свойства сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \quad (0 \le m \le n), \quad C_n^n = 1; \quad C_n^0 = 1; \quad C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$$

Задания практической работы.

1. Для своих двух книг Маша купила три разные обложки. Сколькими различными способами она может обернуть книги купленными обложками?
2. Какие двузначные числа можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?
3. В финальном забеге на 100 м участвуют Иванов, Громов и Орлов. Назовите возможные варианты распределения призовых мест.
4. В кружок бального танца записались Петя, Коля, Витя, Олег, Таня, Оля, Наташа, Света. Какие танцевальные пары девочки и мальчика могут образоваться?
5. Сколько нечетных двузначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9?
6. Маша, Оля, Вера, Ира, Андрей, Миша и Игорь готовились стать ведущими на Новогоднем празднике. Назовите возможные варианты, если ведущими могут быть только одна девочка и один мальчик.
7. Катя собирается на каникулы. Она может поехать с бабушкой или с родителями. Если Катя поедет с бабушкой, то она сможет провести каникулы или на даче, или в городе, или в деревне. Если она поедет с родителями, то она сможет провести каникулы или отдыхая в санатории, или путешествия по горам, или путешествуя на теплоходе. Сколько разных вариантов есть у Кати, чтобы провести свои каникулы?
8. В парке 4 пруда. Было решено засыпать песком дорожки между ними так, чтобы можно было пройти от одного пруда к другому кратчайшим путем, т.е. не нужно было идти в обход. Задание: покажи, какие дорожки надо сделать.
9. Андрей, Борис, Виктор и Григорий играли в шахматы. Каждый сыграл с каждым по одной партии. Сколько партий было сыграно?

Задания самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по теме: «Элементы комбинаторики».	
1 вариант	**2 вариант**
4. При окончании деловой встречи специалисты обменялись визитными карточками. Сколько всего визитных карточек перешло из рук в руки, если во встрече участвовали 6 специалистов? 5. В понедельник в пятом классе 5 уроков: музыка, математика, русский язык, литература и история. Сколько различных способов составления расписания на понедельник существует? 6. В магазине продаются блокноты 7 разных видов и ручки 4 разных видов.	4. В хоровом кружке занимаются 9 человек. Необходимо выбрать двух солистов. Сколькими способами это можно сделать? 5. Сколькими способами 10 футбольных команд могут разыграть между собой золотые, бронзовые и серебряные медали? 6. Имеется 6 видов овощей. Решено готовить салаты из трёх видов овощей. Сколько различных вариантов салатов можно приготовить?

Сколькими разными способами можно выбрать покупку из одного блокнота и одной ручки?	

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 109

Тема: Формула бинома Ньютона. Свойства биноминальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Формула бинома Ньютона. Свойства биноминальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить основные понятия комбинаторики.
2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Формула бинома Ньютона

Бином Ньютона – это формула разложения степени двучлена (бинома) $(a+b)^n$ в виде многочлена от a и b.

Запишем разложения бинома Ньютона для нескольких первых значений n:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Чтобы найти коэффициент при a^kb^{n-k} в разложении бинома $(a+b)^n$ в общем случае, представим себе, что мы перемножаем n скобок и приводим подобные члены. Член a^kb^{n-k} встретится столько раз, сколько можно указать k скобок (из n возможных), из которых мы возьмем множитель a (а из остальных автоматически возьмем b). Это число равно числу выборок k скобок из n возможных, которое носит название числа сочетаний из n по k и обозначается C_n^k .

В этих обозначениях формула имеет следующий вид:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Иными словами, число сочетаний из n по k равно коэффициенту при члене $a^{n-k}b^k$ в разложении n-ой степени двучлена $(a+b)$ поэтому числа сочетаний называют иначе *биномиальными коэффициентами*.

Эту связь можно использовать для вывода свойств сочетаний алгебраическими методами. Такой подход к выводу свойств комбинаторных объектов носит название *метода производящих функций*.

Свойства биномиальных коэффициентов

Биномиальные коэффициенты обладают большим количеством свойств.

Свойство 1. $C_n^1 = n$.

Свойство 2. $C_n^k = C_n^{n-k}$ – биномиальные коэффициенты, равноотстоящие от концов, равны между собой

Свойство 3. $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$ – сумма биномиальных коэффициентов при фиксированном n равна 2^n.

Свойство 4. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... = 2^{n-1}$ – суммы биномиальных коэффициентов, стоящих на четных и на нечетных местах, равны между собой (и равны по половине от общей суммы).

Свойство 5. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ – рекуррентное соотношение, связывающее биномиальные коэффициенты для соседних степеней.

Треугольник Паскаля – бесконечная таблица биномиальных коэффициентов, имеющая треугольную форму. В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Строки треугольника симметричны относительно вертикальной оси. Назван треугольник в честь Блеза Паскаля.

```
            1     1
         1     2     1
      1     3     3     1
   1     4     6     4     1
  1    5    10    10    5    1
 1   6   15   20   15   6   1
1  7  21  35  35  21  7  1
1  8  28  56  70  56  28  8  1
...............................................
```

Первая строка в этой таблице содержит биномиальные коэффициенты для $n = 1$; вторая – для $n = 2$; третья – для $n = 3$ и т.д.

<u>*Пример 1:*</u> Разложить выражение: $(a+b)^7$.

Решение:

мы можем получить результат моментально, используя из таблицы разложение по седьмой строке (т.к. седьмая степень двучлена):

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

Задания практической работы.

1. Возведите в степень:

а) $(2+3x)^6$; б) $(x^2-2y)^5$; в) $(2x^3-y^2)^4$; г) $(x^3+\frac{1}{x^3})^6$; д) $(3x-2y)^7$.

2. Решите уравнение: $(x-2)^6+(x-4)^6=64$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 110

Тема: Решение примеров по теме:

« Бином Ньютона»

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Формула бинома Ньютона. Свойства биноминальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить формулы бинома Ньютона.
2. Выполнить задания практической работы.
3. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Формула бинома Ньютона

Бином Ньютона – это формула разложения степени двучлена (бинома) $(a+b)^n$ в виде многочлена от a и b.

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + ... + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Треугольник Паскаля – бесконечная таблица биномиальных коэффициентов, имеющая треугольную форму. В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Строки треугольника симметричны относительно вертикальной оси. Назван треугольник в честь Блеза Паскаля.

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
. . . .

Пример 1: Разложить выражение: $(a+b)^7$.

Решение: мы можем получить результат моментально, используя из таблицы разложение по седьмой строке (т.к. седьмая степень двучлена):

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

Пример 2: Разложить выражение: $(2a+3b)^3$.

Решение: $(2a+3b)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2 \cdot 3b + 3 \cdot 2a(3b)^2 + (3b)^3 = 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$

Задания практической работы.

2. Возведите в степень:

1) $(2a+3b)^4$; 2) $(a-2b)^3$; 3) $\left(\frac{1}{2}c+4\right)^4$; 4) $\left(\frac{1}{3}c-3\right)^4$;

5) $(a^2+2b)^4$; 6) $(2a^3-b^2)^5$; 7) $\left(\frac{1}{3}c-a^4\right)^7$; 8) $\left(\frac{1}{4}c^3-4x\right)^6$.

Задания самостоятельной работы.

1 вариант	**2 вариант**
Возведите в степень: 1) $(2a+3b)^4$; 2) $(a^3-2b)^5$; 3) $\left(\frac{1}{4}c+2x^2\right)^6$; 4) $(2c^2-d^3)^7$	Возведите в степень: 1) $(2a^2-3b)^4$; 2) $(a^2+2b^3)^5$; 3) $\left(\frac{1}{4}c^2+2x\right)^6$; 4) $(2c^3+d^4)^7$

ТЕМА 13. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 111

Тема: Событие и его виды. Вероятность события.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Событие и его виды. Вероятность события.
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить основные понятия теории вероятностей.
2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Случайные события

Изучение каждого явления в порядке наблюдения или производства опыта связано с осуществлением некоторого комплекса условий (испытаний). Всякий результат или исход испытания называется *событием*.

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется *случайным*.

В том случае, когда событие должно непременно произойти, его называют *достоверным*, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти, *невозможным*.

События называются *несовместными*, если каждый раз возможно появление только одного из них. События называются *совместными*, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

События называются *противоположными*, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

Вероятность события рассматривается как мера объективной возможности появления случайного события.

Классическое определение вероятности.

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных исходов m, к числу всех возможных исходов n: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы, т. е. $0 \le P(A) \le 1$.

Невозможному событию соответствует вероятность $P(A)=0$, а достоверному – вероятность $P(A)=1$.

Пример 1: В лотерее из 1000 билетов 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Какова вероятность, что этот билет выигрышный?

Решение: количество благоприятных событий, удовлетворяющих условию задачи m = 200.

Число всех возможных вариантов n = 1000.

По определению вероятности: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{200}{1000} = 0{,}2$

Пример 2: Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что этот шар черный?

Решение: общее число шаров m = 8, из них черных n = 3, по определению: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{8} = 0{,}375$

Пример 3: Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 черных шара, вынимают наудачу два шара. Найти вероятность того, что оба шара окажутся черными?

Решение:

общее число возможных случаев n равно числу сочетаний из 20 (12+8) элементов по два:

$$n = C_{20}^{2} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190 \;;$$

число благоприятных исходов m равно числу сочетаний из 8 элементов по два:

$$n = C_{8}^{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28 \,.$$

По определению: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{28}{190} = 0{,}147$

Пример 4: В партии из 18 деталей находятся 4 бракованных. Наугад выбирают 5 деталей. Какова вероятность того, что из этих 5 деталей две окажутся бракованными?

Решение:

число всех равновозможных независимых исходов n равно числу сочетаний из 18 по 5:

$$n = C_{18}^{5} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 8568 \,.$$

Подсчитаем число благоприятных исходов m. Среди 5 взятых наугад деталей должно быть 3 качественных и 2 бракованных. Число способов выборки двух бракованных деталей из 4 имеющихся бракованных равно числу сочетаний из 4 по 2: $C_{4}^{2} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$.

Число способов выборки трех качественных деталей из 14 имеющихся равно числу сочетаний из 14 по 3: $C_{14}^{3} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 364$.

Любая группа качественных деталей может комбинироваться с любой группой бракованных, поэтому общее число комбинаций *m* равно: $m = C_4^2 \cdot C_{14}^3 = 6 \cdot 364 = 2184$,

по определению: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2184}{8568} = 0{,}255$

Задания практической работы.

1. На книжной полке стоит 30 книг. Читатель, просмотрев их, обнаружил, что 10 книг он прочитал раньше. Какова вероятность того, что снятые читателем наугад 3 книги были прочитаны им раньше?

2. При бросании двух игральных кубиков сумма очков, выпавших на верхних гранях изменяется от 2 до 12. какова вероятность события: а) А: сумма очков равна 9? б) В: сумма очков равна 10 ?

3. Партия из 100 деталей проверяется контролёром, который наугад отбирает 10 деталей и определяет их качество. Если среди выбранных деталей нет ни одного бракованного, то вся партия принимается. Какова вероятность того , что партия , содержащая 10 бракованных деталей, будет принята контролером?

4. Из 60 экзаменационных вопросов студент знает 45. Студент взял один билет, который содержит 2 вопроса. Чему равны вероятности событий: а) А: студент знает на все вопросы билета; б) В: студент не знает ответа ни на один из вопросов, входящих в билет.

5. В урне имеется 20 шаров: 12 красных, а остальные белые. Из этих 20 шаров наугад вынимают 5 шаров. Найдите вероятность событий: а) А: среди выбранных шаров 3 красных; б) В: все выбранные шары белого цвета.

6. В ящике имеется 80 стандартных деталей и 20 нестандартных. Из ящика наудачу берут одну за другой две детали. Какова вероятность появления стандартной детали при первом испытании, при втором испытании?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 112

Тема: Сложение и умножение вероятностей.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Сложение и умножение вероятностей».

2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить основные понятия теории вероятностей.

2. Выполнить задания самостоятельной работы.

3. Выполнить задания практической работы.

Задания самостоятельной работы.

1 вариант	2 вариант
1. В лотерее участвуют 100 билетов, среди которых 4 выигрышных. Наугад берут один билет. Какова вероятность того, что взятый билет выигрышный? 2. В коробке находятся 7 белых и 3 чёрных шара. Не глядя из коробки, вынимают один шар. Найти вероятность того, что: 1) вынутый шар чёрный; 2) вынутый шар белый.	1. В коробке находятся 5 белых и 9 чёрных шаров. Не глядя из коробки вынимают один шар. Найти вероятность того, что: 1) вынутый шар чёрный; 2) вынутый шар белый. 2. В лотерее участвуют 100 билетов, среди которых 5 выигрышных. Наугад берут один билет. Какова вероятность того, что взятый билет выигрышный?

Теория.

Классическое определение вероятности.

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных исходов m, к числу всех возможных исходов n: $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

Вероятность любого события не может быть меньше нуля и больше единицы, т. е. $0 \le P(A) \le 1$.

Невозможному событию соответствует вероятность $P(A) = 0$, а достоверному – вероятность $P(A) = 1$.

Вероятность несовместных событий

Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Пример 1: В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем пять из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали. Найти вероятность того, что, по крайней мере, одна из взятых деталей окажется стандартной (событие A).

Решение:

очевидно, что, по крайней мере, одна из взятых деталей окажется стандартной, если произойдет любое из трех несовместных событий: B – одна деталь стандартная, две нестандартные; C – две детали стандартные, одна нестандартная; $Д$ – три детали стандартные.

Т.о., событие A можно представить в виде суммы этих трех событий: $A = B + C + Д$.

Тогда $P(A)=P(B)+P(C)+P(Д)$.

Вычислим вероятность каждого события:

$$P(B)=\frac{C_5^1\cdot C_5^2}{C_{20}^3}=\frac{5\cdot 15\cdot 14}{1\cdot 1\cdot 2}=\frac{35}{76}$$

$$P(C)=\frac{C_5^2\cdot C_{15}^1}{C_{20}^3}=\frac{5\cdot 4\cdot 15\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 20\cdot 19\cdot 18}=\frac{5}{38}$$

$$P(Д)=\frac{C_5^3}{C_{20}^3}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 20\cdot 19\cdot 18}=\frac{1}{114}$$

Итак,

$$P(A)=\frac{35}{76}+\frac{5}{38}+\frac{1}{114}=\frac{137}{228}=0{,}601$$

Вероятность совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

<u>*Пример 2:*</u> Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно?

Решение:

пусть A – число кратно 3, B – число кратно 5. Всего имеется 90 двузначных чисел: 10, 11, …, 98, 99. Из них 30 – кратные 3, 18 – кратные 5 и шесть чисел одновременно кратны и 3 и 5, поэтому:

$$P(A)=\frac{30}{90}=\frac{1}{3},\quad P(B)=\frac{18}{90}=\frac{1}{5},\quad P(AB)=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}\ .$$

Т.к. A и B совместные события, то по формуле имеем:

$$P(A)=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{15}=\frac{7}{15}=0{,}467\ .$$

Задания практической работы.

1. В первой урне находятся 10 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 9 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными?
2. Трое учащихся на экзамене независимо друг от друга решают одну и ту же задачу. Вероятности ее решения этими учащимися равны 0,8, 0,7 и 0,6 соответственно. Найдите вероятность того, что хотя бы один учащийся решит задачу.
3. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе – 0,9, в третье – 0,8. Найти вероятность следующих событий:

   а) только одно отделение получит газеты вовремя;

   б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

4. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.
5. В ящике находятся 3 белых, 4 синих и 5 красных шаров. Наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что этот шар: 1) цветной; 2) либо белый, либо красный; 3) либо белый, либо синий? Решить задачу двумя способами.
6. В первой партии из 20 деталей 6 нестандартных, а во второй партии из 30 деталей 5 нестандартных. Наугад из каждой партии изымают по одной детали. Найти вероятность того, что: 1) обе детали оказались нестандартными; 2) обе детали оказались стандартными; 3) хотя бы одна деталь оказалась стандартной; 4) хотя бы одна деталь оказалась нестандартной.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 113

Тема: Дискретная случайная величина, закон ее распределения. Числовые характеристики дискретной случайной величины.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Дискретная случайная величина, закон ее распределения. Числовые характеристики дискретной случайной величины..
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить основные понятия теории вероятностей.
2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Случайные величины. Функция распределения и плотность распределения случайной величины.

Величина называется *случайной*, если в результате испытания она принимает одно заранее неизвестное значение из некоторого числового множества. Случайная величина называется *дискретной*, если она принимает значения из некоторого фиксированного конечного или счетного множества.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между её возможными значениями и их вероятностями. Закон распределения задается аналитически, графически или таблично.

Функцией распределения случайной величины X называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение меньшее x, т.е. $F(x) = P(X \langle x)$.

Свойства функции распределения:

1. Значения функции распределения $F(x)$ принадлежат отрезку $[0;1]$; $0 \le F(x) \le 1$.

2. $F(x)$ - неубывающая функция, т.е. $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 \rangle x_1$.

3. Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a; b)$, то $F(x) = 0$ при $x \leq a$ и $F(x) = 1$ при $x \geq b$.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины.

Математическим ожиданием M(X) дискретной случайной величины *X* называют сумму произведений всех её возможных значений на их вероятности: для дискретной случайной величины *X*, принимающей значения $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ с вероятностями соответственно $p_1, p_2, p_3, ...p_n$, имеем: $M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_n \cdot p_n$.

Дисперсией $D(x)$ *дискретной* случайной величины *X* называют величину, равную

$$D(x) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Средним квадратичным отклонением называется квадратный корень из дисперсии: $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$.

<u>*Пример 1:*</u> по заданному закону распределения дискретной случайной величины *X* найти её: 1) математическое ожидание; 2) дисперсию; 3) среднее квадратичное отклонение; 4) привести графическое изображение функции распределения.

X	17	21	29	31	35
p	0,4	0,1	0,2	0,1	0,2

Решение:

1) математическое ожидание: $M(X) = 17 \cdot 0{,}4 + 21 \cdot 0{,}1 + 29 \cdot 0{,}2 + 31 \cdot 0{,}1 + 35 \cdot 0{,}2 = 24{,}8$.

2) дисперсия: $D(x) = M(X^2) - (M(X))^2$

Закон распределения случайной величины X^2:

X	17^2=289	21^2=441	29^2=841	31^2=961	35^2=1225
p	0,4	0,1	0,2	0,1	0,2

Тогда $M(X^2) = 289 \cdot 0{,}4 + 441 \cdot 0{,}1 + 841 \cdot 0{,}2 + 961 \cdot 0{,}1 + 1225 \cdot 0{,}2 = 773{,}1$.

$(M(X))^2 = 24{,}8^2 = 615{,}4$

$D(X) = 773{,}1 - 615{,}4 = 98{,}06$.

3) среднее квадратическое отклонение: $\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{98{,}06} \approx 9{,}9$.

4) учитывая закон распределения случайной величины X имеем:

$$F(X) = \begin{cases} 0\,, & x \le 7 \\ 0{,}4\,, & 17 \langle\, x \le 21 \\ 0{,}5\,, & 21 \langle\, x \le 29 \\ 0{,}7\,, & 29 \langle\, x \le 31 \\ 0{,}8\,, & 31 \langle\, x \le 35 \\ 1\,, & 35 \langle\, x \end{cases}$$

Задания практической работы.

По заданному закону распределения случайной величины Х найти её математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение, привести графическое изображение функции распределения.

1.

Х	11	16	20	25	30
p	0,4	0,1	0,3	0,1	0,1

2.

Х	14	18	23	28	30
p	0,1	0,2	0,2	0,1	0,4

3.

Х	14	16	22	38	50
p	0,2	0,2	0,1	0,1	0,4

4.

Х	10	26	32	40	50
p	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 114

Тема: Представление данных.

Время выполнения: 1 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Представление данных».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить основные понятия теории вероятностей.
2. Выполнить задания практической работы.

Теория.

Элементы математической статистики.

При проведении статистического исследования после сбора и группировки данных переходят к их анализу, используя для этого различные обобщающие показатели. Простейшими из них являются среднее арифметическое, мода, медиана, размах.

Статистические характеристики: среднее арифметическое, размах, мода и медиана.

Среднее арифметическое ряда чисел - это частное от деления суммы этих чисел на число слагаемых.

Пример 1. Пусть ученик получил в течение первой учебной четверти следующие отметки по алгебре: 5, 2, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5.

Найдем средний балл, то есть среднее арифметическое всех членов ряда: 4,4

Итак, *модой* числового ряда называют число, которое встречается в этом ряду наиболее часто. Можно сказать, что оно в этом ряду самое модное, для нашего примера мода равна 5.

В отличие от среднего арифметического. которое можно вычислить для любого числового ряда, моды у ряда может вообще не быть. Например, пусть ученик получил по русскому языку следующие отметки: 4, 2, 3, 5.

Каждая отметка встречается а этом ряду только один раз, и среди них нет числа, встречающегося чаще. Значит, у этого ряда нет моды.

Медиана - число ряда, которое делит его ровно пополам. Медианой ряда, состоящего из чётного количества чисел, называется среднее арифметическое двух стоящих посередине чисел этого ряда

Более точно, медианой числового ряда называют число этого ряда (или полу сумму двух его чисел), слева и справа от которого на числовой прямой лежит одинаковое количество членов ряда. Чтобы найти медиану числового ряда нужно его сначала упорядочить- составить ранжированный ряд. В нашем примере с отметками он выглядит так: 2, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5.

Если ряд содержит нечетное число членов, то нужно взять число, которое находится ровно посередине. Если ряд содержит четное число членов (как в нашем примере), то нужно взять два средних числа и найти их полу сумму:

Размах ряда чисел - это разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел.

- *Общий ряд данных* //генеральная совокупность//- множество всех возможных результатов измерения;

- *Выборка* //статистический ряд// - множество результатов реально получившихся в данном измерении;
- *Варианта* - значение одного из результатов измерения;
- *Ряд данных* //ранжированный ряд// - значения всех результатов измерений, перечисленные по порядку;
- *Репрезентативная выборка* – представительная;
- *Кратность варианты* – количество повторений выборки;
- *Частота варианты* = $\dfrac{\textit{кратность}}{\textit{объем выборки}}$
- *Полигон частот* - график распределения частот или кратностей;
- *Гистограмма* – столбчатая диаграмма.

Задания практической работы.

1. Рост учащихся 157,165,165,168,165,161,165,160,162,169,171:

1) составить ранжированный ряд ;

2) определить средний рост, размах ряда, моду ряда, медиану ряда.

2. Даны результаты успеваемости учащихся 9 “в” класса по геометрии за полугодие:

“5” - 3 учащихся
“4” - 6 учащихся
“3” - 7 учащихся
“2” - 0 учащихся

Постройте таблицу распределения выборки и полигон распределения кратностей.

3. Заполните таблицу, зная, что объем выборки равен 60.

Варианта (значение ряда)	1	2	3	4	5	6	Всего 6 вариант
Кратность варианты	3		15		12		Сумма = (объем выборки)
Частота варианты		0,1		0,35		0,05	Сумма =%

4. В отделе “Бытовая техника” в течение дня произведен учет стоимости проданного товара: 1200, 1110, 2300, 890, 320, 1200, 560, 1340, 1400, 1050, 1050, 4700, 3200, 2900, 2100, 2450, 890, 1110, 1200, 1200, 2300, 1050, 1400, 1200, 890, 320, 1320, 890, 1100,1050.

Представьте данные в виде интервальной таблицы, разбив на интервалы: от 0 до 1000; 1000-2000; 2000-3000; 3000-4000; 4000-5000 вычислите кратность и частоту варианты. Постройте гистограмму кратности. Какой интервал цен оказался наиболее популярным?

5 Среди учащихся 9 классов была проведена контрольная работа. Результаты контрольной работы представлены в виде таблицы:

Варианта (оценки)	“2”	“3”	“4”	“5”	Всего вариант
Кратность варианты	2	22	12	4	Сумма =
Частота варианты					Сумма =
Частота (%)варианты					Сумма =

Заполните таблицу и постройте круговую диаграмму частот.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 115

Тема: Решение задач по теме: ««Элементы комбинаторики и теории вероятностей. Математическая статистика».

Время выполнения: 2 ч.

Цель:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Решение задач по теме: ««Элементы комбинаторики и теории вероятностей. Математическая статистика».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

Порядок выполнения работы:

1. Повторить основные понятия теории вероятностей и математической статистики.
2. Выполнить задания практической работы.
3. Выполнить задания самостоятельной работы.

Теория.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины.

Математическим ожиданием M(X) дискретной случайной величины *X* называют сумму произведений всех её возможных значений на их вероятности: для дискретной случайной величины *X*, принимающей значения $x_1, x_2, x_3,.....x_n$ с вероятностями соответственно $p_1, p_2, p_3, ...p_n$, имеем: $M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_n \cdot p_n$.

Дисперсией $D(x)$ *дискретной* случайной величины *X* называют величину, равную

$$D(x) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Средним квадратичным отклонением называется квадратный корень из дисперсии: $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$.

Задания практической работы.

1. По заданному закону распределения случайной величины X найти её математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение, привести графическое изображение функции распределения.

X	10	26	30	45	50
p	0,4	0,1	0,3	0,1	0,1

2. В ящике находятся 5 резцов: два изношенных и три новых. Производится два последовательных извлечения резцов. Определить условную вероятность появления изношенного резца при втором извлечении при условии, что извлеченный в первый раз резец в ящик не возвращается.
3. В урне находятся 5 белых шаров, 4 черных и 3 синих. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его в урну. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар (событие A), при втором - черный (событие B) и при третьем – синий (событие C).
4. Среди школьников седьмых классов был проведен выборочный опрос: из скольких человек состоят их семьи? В результате такого опроса была получена сле- дующая выборка: 2 2 3 3 3 3 4 2 3 3 2 3 2 3 2 3 2 4 3 2 2 3 2 4 5 2 3 3 2 4 3 2 3 4 3 2 3 5 3.
   - определить средний рост, размах ряда, моду ряда, медиану ряда.
   - постройте таблицу распределения выборки и полигон распределения кратностей.

Варианта (значение ряда)							Всего __ вариант
Кратность варианты							Сумма = (объем выборки)
Частота варианты							Сумма =%

Задания самостоятельной работы.

1 вариант	**2 вариант**
На школьниках 1 «А» класса было проведено исследование для выяснения того, сколько весит портфель первоклассника. В результате взвешиваний был получен следующий числовой ряд (вес каждого портфеля в кг): 2, 2, 4, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 3, 1, 1, 4, 2, 2, 3, 1, 3, 1, 2, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 4, 4, 1, 2, 2, 3, 3, 1, 1. • определить средний рост, размах ряда, моду ряда, медиану ряда. • постройте таблицу распределения выборки и полигон распределения кратностей.	На выборах мэра города будут баллотироваться три кандидата: Алексеев, Иванов, Карпов (обозначим их буквами А, И, К). Проводя опрос 50 избирателей, выяснили, за кого из кандидатов они собираются голосовать. Получили следующие данные: И, А, И, И, К, К, И, И, И, А, К, А, А, А, К, К, И, К, А, А, И, К, И, И, К, И, К, А, И, И, И, А, И, И, К. • определить средний рост, размах ряда, моду ряда, медиану ряда. • постройте таблицу распределения

	выборки и полигон распределения кратностей.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 116

Тема: Контрольная работа по теме: «Элементы комбинаторики и теории вероятностей. Математическая статистика».

Время выполнения: 2 ч.

Цель: проконтролировать знания студентов по теме: «Элементы комбинаторики и теории вероятностей. Математическая статистика».

Порядок выполнения работы:

1. Повторить:

- элементы комбинаторики;
- элементы теории вероятностей;
- элементы математической статистики.

2. Выполнить задания контрольной работы.

1 вариант	**2 вариант**
1. Сколькими способами можно переставить на полке 8 чайных чашек? 2. Дано множество $\{6, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Сколько трехзначных чисел можно образовать из элементов этого множества, если не допускать повторений цифр?	1. Дано множество $\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Сколько двузначных чисел можно образовать из элементов этого множества, если не допускать повторений цифр? 2. Сколькими способами можно составить букетов из 7 цветов?
3. В школьной лотерее на 50 билетов разыгрывается 10 выигрышей. Первый подошедший к урне ученик выбирает из урны 6 билетов. Сколькими способами он может их вынуть, чтобы среди них оказалось ровно 2 выигрышных?	3. В школьной лотерее на 60 билетов разыгрывается 12 выигрышей. Первый подошедший к урне ученик выбирает из урны 5 билетов. Сколькими способами он может их вынуть, чтобы среди них только 2 были проигрышными?
4. Из 60 экзаменационных вопросов студент знает 40. Студент взял один билет, который содержит 3 вопроса. Чему равна вероятность того, что студент знает ответы на все вопросы билета.	4. Из 60 экзаменационных вопросов студент знает 30. Студент взял один билет, который содержит 2 вопроса. Чему равна вероятность того, что студент не знает ответа ни на один из вопросов, входящих в билет.
5. В урне имеется 25 шаров: 10 красных, а остальные белые. Из этих 25 шаров наугад вынимают 5 шаров. Какова вероятность того, что среди выбранных шаров 3 красных.	5. В урне имеется 30 шаров: 12 черных, а остальные белые. Из этих 30 шаров наугад вынимают 4 шара. Какова вероятность того, что среди выбранных шаров 3 белых.
6. В урне находятся 15 белых и 5 черных шаров. Найдите вероятность того, что, 3	6. В урне находятся 14белых и 6 черных шаров. Найдите вероятность того, что, 3

вынутых один за другим шара окажутся черными.

7. В каждой серии монету подбрасывали 10 раз и регистрировали число появлений герба. Результаты испытаний приведены в таблице. Составьте таблицу частот, найдите моду, размах, медиану и постройте полигон частот.

Номер серии	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число выпадений герба	5	6	7	5	8	4	6	5	4	5

вынутых один за другим шара окажутся белыми.

7. Стрелок делает 10 серий выстрелов по мишени. В каждой серии 10 выстрелов. Результаты стрельб приведены в таблице. Составьте таблицу частот, найдите моду, размах, медиану и постройте полигон частот.

Номер серии	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число попаданий	6	6	7	7	8	5	6	7	8	9

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература по всем разделам:

1. А.Н.Колмогоров. «Алгебра и начала анализа 10-11 класс. Учебник для общеобразовательных организаций с приложением на электронном носителе. Москва «Просвещение» 2016
2. Погорелов А.В. «Геометрия: учебник для общеобразоват. организаций: базовый и профильный уровни», - 13 изд.- М., « Просвещение», 2014.- 175 стр.

Дополнительная литература:

1. Богомолов Н.В., Самойленко П.И. «Математика», М: Дрофа, 2014 г.,
2. Башмаков М.И. «Математика», учебник для 10 кл. (базовый уровень). М: Издательский центр «Академия»», 2014 г.
3. Башмаков М.И. «Математика», учебник для 11 кл. (базовый уровень). М: Издательский центр «Академия»», 2014 г.