Департамент образования Вологодской области
бюджетное профессиональное образовательное учреждение
Вологодской области
«ВОЛОГОДСКИЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим работам
по дисциплине **ЕН.01. Математика**

Специальность 21.02.05 Земельно – имущественные отношения.

2017 г.

Рассмотрены на заседании предметно - цикловой комиссии общеобразовательных дисциплин и рекомендована для внутреннего использования.

Данные методические указания предназначены для студентов по специальности 21.02.05 Земельно – имущественные отношения БПОУ ВО «Вологодский строительный колледж» при выполнении практических работ.

Объем практической работы по дисциплине ЕН.01. Математика составляет **32** часа.

Перечень практических работ соответствует содержанию программы. Практическая работа студентов повышает интеллектуальный уровень обучающихся, формирует умение находить нужную информацию, систематизировать, обобщать, что необходимо для профессиональной подготовки будущего специалиста. Навыки исследовательской работы помогут студентам на старших курсах при выполнении и оформлении курсовых и дипломных проектов.

Практические занятия служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на уроках теоретического обучения, а так же для получения практических навыков. Практические задания выполняются студентом, с применением знаний и умений, полученных на уроках, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания.

Целями проведения практических занятий являются:
- обобщение, систематизация, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам учебной дисциплины ЕН.01.Математика;
- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;
- выработка при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность.

Методические указания разработаны в соответствии с учебной программой. В зависимости от содержания они могут выполняться студентами индивидуально или фронтально.

Методические указания могут быть рекомендованы к использованию студентами и преподавателями БПОУ ВО «Вологодский строительный колледж».

Авторы:
Севалева Елена Анатольевна, преподаватель БПОУ ВО «Вологодский строительный колледж»

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Комплект методических указаний для студентов по выполнению практических работ предназначен для использования в учебном процессе.

В методических указаниях присутствует необходимый теоретический минимум, включающий важнейшие определения, теоремы и формулы.

К практическому занятию от студента требуется предварительная подготовка, которую он должен провести перед занятием. Список литературы и вопросы, необходимые при подготовке, студент получает перед занятием из методических рекомендаций к практическому занятию.

Если студент испытывает затруднения в освоении теоретического или практического материала, либо отсутствовал на занятии по уважительной причине, то он может получить консультацию преподавателя.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

При выполнении работы и ее оформлении необходимо соблюдать следующие правила:

- работа оформляется в тетради, имеющей поля для замечании преподавателя;
- решение задач необходимо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях;
- решение задач надо оформлять аккуратно, подробно объясняя все действия и используемые формулы;
- после получения проверенной преподавателем работы, студент должен исправить все отмеченные ошибки и недочеты;
- в случае незачета студент должен в кратчайший срок выполнить все требования преподавателя и представить работу на повторную проверку.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

№ п/п	Тема программы	Кол-во часов
1.	Предел функции. Раскрытие неопределённостей $\left[\frac{0}{0}\right];\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.	2
2.	Производная функции, производная сложной функции.	2
3.	Частные производные и полный дифференциал функции двух переменных.	2
4.	Неопределенный интеграл. Интегрирование методом подстановки и по частям.	2
5.	Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.	2
6.	Линейные дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.	2
7.	Понятие комплексного числа. Алгебраическая форма комплексного числа. Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных	2

	числел.	
8.	Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа. Возведение комплексных чисел в степень. Извлечение корней из комплексных чисел.	2
9.	Вероятность случайного события. Теоремы сложения и умножения вероятностей.	2
10.	Случайные величины. Их виды и числовые характеристики.	2
11.	Множества и операции над ними.	
12.	Элементы теории графов.	
13.	Матрицы и операции над ними.	
14.	Определители матриц. Миноры и алгебраические дополнения.	
15.	Обратная матрица.	
16.	Системы линейных уравнений. Правило Крамера. Матричный метод.	
	ИТОГО:	**32**

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гулиян Б.Ш. Математика. Базовый курс [Электронный ресурс]: учебник/ Гулиян Б.Ш., Хамидуллин Р.Я.— Электрон. текстовые данные.— М.: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2013.— 712 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/17023.html.— ЭБС «IPRbooks»
2. Григорьев С.Г.Математика, Академия, 2012
3. Орлова И.В. Экономико-математическое моделирование: Практическое пособие по решению задач.- М.: Вузовский учебник, 2010.-144 с.
4. Березина Н.А. Высшая математика [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Березина Н.А.— Электрон. текстовые данные.— Саратов: Научная книга, 2012.— 159 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/8233.html.— ЭБС «IPRbooks»

Интернет - ресурсы

1. Интернет-библиотека по математике http://ilib.mccme.ru

5. Учебная физико-математическая библиотека http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm

6. Math.ru - библиотека http://www.math.ru/lib/formats

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

по теме: «Предел функции».

Цель: научиться вычислять пределы функции, раскрывать неопределённости $\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Теория:

Определение предела: Число b – предел функции f(x) при x стремящемся к a, если для каждого положительного числа ε можно указать такое положительной число δ, что для всех x, отличных от a и удовлетворяющих неравенству |x-a|< ε , имеет место неравенство |f(x)-b|< δ.

Обозначение предела: Если b есть предел функции f(x) при x стремящемся к a, то записывают это так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$

Свойства пределов.

1. $\lim(x+y) = \lim x + \lim y$.
2. $\lim C = C, \quad C = const$.
3. $\lim(x \cdot y) = \lim x \cdot \lim y$.
4. $\lim \dfrac{x}{y} = \dfrac{\lim x}{\lim y}, \quad \lim y \neq 0$.
5. $\lim x^m = (\lim x)^m$.
6. $\lim \sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{\lim x}$.
7. $\lim(\log_a x) = \log_a(\lim x)$.

При нахождении пределов применяют соотношения: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{k}{x} = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{k}{x} = \infty$

Вычисление пределов функции основано на применении следующих основных теорем:

ТЕОРЕМА 1. Предел суммы двух функций при x стремящемся к a равен сумме пределов этих функций , то есть $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to a} (x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

ТЕОРЕМА 2. Предел произведения двух функций при x стремящемся к a равен произведению пределов этих функций, то есть $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} (x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

ТЕОРЕМА 3. Предел частного двух функций при x стремящемся к a равен частному пределов, если предел знаменателя отличен от нуля, то есть $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Вычисление предела функции способом подстановки.

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 7} (x+3)$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 7} (x+3) = \left| \, 7+3=10 \, \right| = 10$.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x+2}{2x-7} = \left| \dfrac{3\cdot 1+2}{2\cdot 1-7} = \dfrac{5}{-5} = -1 \right| = -1$.

Раскрытие неопределённости $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Для раскрытия неопределенности необходимо разложить числитель и знаменатель на множители, для чего обычно решается квадратное уравнение или используются формулы сокращенного умножения.

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \left| \dfrac{2^2-4}{2-2} = \dfrac{0}{0} \right|$. Мы получили неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ для раскрытия которой необходимо разложить числитель и знаменатель на множители:

$\dfrac{x^2-4}{x-2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$. Это преобразование справедливо при всех значениях x, отличных от 2, поэтому в соответствии с определением предела можем написать:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=\left|\ 2+2=4\ \right|=4.$$

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-3x-5}{x+1}$.

Решение: Подставим в место x число -1: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-3x-5}{x+1}=\left|\dfrac{2(-1)^2-3(-1)-5}{-1+1}\right|=\left[\dfrac{0}{0}\right].$

Получили неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, для раскрытия которой необходимо разложить числитель и знаменатель на множители, для чего в свою очередь обычно решается квадратное уравнение или используются формулы сокращенного умножения.

В нашем случае решаем уравнение: $2x^2-3x-5=0$.

Находим дискриминант: $D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5)=49,\quad \sqrt{D}=7$.

Если корень не извлекается целый, то вероятней всего D вычислен неправильно.

Теперь находим корни уравнения: $x_1=\dfrac{-(-3)-7}{2\cdot 2}=\dfrac{3-7}{4}=\dfrac{-4}{4}=-1$

$$x_2=\frac{-(-3)+7}{2\cdot 2}=\frac{3+7}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

Подставляем: $2x^2-3x-5=2(x-(-1))(x-\dfrac{5}{2})=2(x+1)(x-5)$.

В знаменателе $x+1$, что и так является простейшим множителем. Тогда предел примет вид:

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(2x-5)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(2x-5)=\left|\ 2(-1)-5\ \right|=-7.$$

<u>Раскрытие неопределённости</u> $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Существует группа пределов, когда $x\to\infty$, а функция представляет собой дробь, подставив в которую значение $x=\infty$ получим неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Для раскрытия неопределенности нужно разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени.

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$.

Решение: Подставим ∞ в функцию. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\left|\dfrac{\infty-\infty-5}{1+\infty+\infty}\right|=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right].$

Получили неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. В числителе находим x в старшей степени, которая равна 2. В знаменателе старшая степень так же равна 2. Надо из двух найденных степеней выбрать самую старшую. В нашем случае степень числителя и знаменателя совпадают и равна 2. Итак, для раскрытия неопределенности $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ потребуется разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени, т.е. на x^2 :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+3}=\left|\frac{2-\frac{3}{\infty}-\frac{5}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}+3}=\frac{2-0-0}{0+0+3}=\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}.$$

Пример 6. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.

Подставим вместо x число 2 : $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\left|\frac{\sqrt{2^2+5}-3}{2-2}=\frac{0}{0}\right|$.

Получили неопределённость $\left[\frac{0}{0}\right]$, для раскрытия которой необходимо числитель и знаменатель дроби умножить на выражение, сопряжённое числителю:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)\cdot(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5})^2-3^2}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\left|\frac{2+2}{\sqrt{2^2+5}+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\frac{2}{3}$.

Контрольные вопросы:

1. Дайте понятие предела функции в точке.
2. Перечислите свойства пределов.
3. Как раскрываются неопределённости вида $\left(\frac{0}{0}\right),\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

<u>1 вариант.</u>

Задание №1. Вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4+2x^2-1}{x^3+x+2}$; 2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^2-3x+1)^3}{x+4}$; 3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+1}{x^2-3}$.

Задание №2. Вычислите пределы, раскрывая неопределённость $\left(\frac{0}{0}\right)$:

1. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x-4}$;
2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-x-15}{3x^2-8x-3}$;
3. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$;
4. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{6-x-2x^2}$

Задание №3. Вычислите пределы, раскрывая неопределённость $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+4}{3x^3+x^2-x+5}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x^2-x}{x^3-1}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x+2}{3x^2+x-1}$; 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3x-2}{2x^4-x+1}$;

Задание №4. Вычислите пределы, уничтожив иррациональность:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-4}{\sqrt{5x-6}-2}$.

2 вариант.

Задание №1. Вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2}{x^3+3x+1}$; 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+7}{x^3+1}$; 3. $\lim\limits_{x\to -1}(x^5+2x^2-6)$.

Задание №2. Вычислите пределы, раскрывая неопределённость $\left(\dfrac{0}{0}\right)$:

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+3x-2}$; 3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$;

2. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{10x^2+9x-7}{4x^2-1}$; 4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{6x^2-5x-1}{x^2-3x+2}$.

Задание №3. Вычислите пределы, раскрывая неопределённость $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+4}{3x^3+x^2-x+5}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^2-x}{x^3-1}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{3x-x^2}$; 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x+6}{x^5-2x^3+9}$.

Задание №4. Вычислите пределы, уничтожив иррациональность:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-x}{x^2-x-2}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-2x}}{x}$.

3 вариант.

Задание №1. Вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x-5}{x+1}$; 2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x+6}{3x^2-2x-1}$; 3. $\lim\limits_{x\to -1}(2x^4-2x^2+3)$.

Задание №2. Вычислите пределы, раскрывая неопределённость $\left(\dfrac{0}{0}\right)$:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$; 3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$;

2. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{15x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$; 4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$.

Задание №3. Вычислите пределы, раскрывая неопределённость $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x+5}{2x^3-6x+1}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2+5x}{x^2-x-6}$ **;**
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+3x+1}{x^2+2x-2}$**;**
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-x^2+6}{x^2-4}$**.**

Задание №4. Вычислите пределы, уничтожив иррациональность:

1. $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}$;
2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

4 вариант.

Задание №1. Вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to1}\frac{17x^2+7x-10}{7x^2-x-8}$;
2. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+5x}{2x-1}$;
3. $\lim\limits_{x\to-1}(2x^3-5x^2+1)$.

Задание №2. Вычислите пределы, раскрывая неопределённость $\left(\frac{0}{0}\right)$**:**

1. $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-3x-4}{x^2-6x+8}$;
2. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{15x^2+13x-2}{3x^2+2x-1}$;
3. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}$;
4. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-8x+12}$.

Задание №3. Вычислите пределы, раскрывая неопределённость $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$**:**

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+1}{2x^3-x+2}$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2+3x}{4x^2-x-5}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+7}{2x^2+3x-2}$;
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x^2+6}{x^2-2}$.

Задание №4. Вычислите пределы, уничтожив иррациональность:

1. $\lim\limits_{x\to7}\frac{\sqrt{x-6}-1}{x-7}$;
2. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\sqrt{13-x^2}-3}{x+2}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

Тема: «Производная функции, производная сложной функции.»

Цель: научиться вычислять производные функций, производные сложной функции.

Теория.

<u>Определение:</u> Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Правила вычисления производных: 1. $(u+v)' = u' + v'$;

2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v + u \cdot v'}{v^2}$.

Пример 1: Найти производную функции $y = 2\sqrt{x} + \ln x - \dfrac{3}{x^4}$.

Решение: $y' = \left(2\sqrt{x} + \ln x - \dfrac{3}{x^4}\right)' = 2\left(\sqrt{x}\right)' + (\ln x)' - 3\left(\dfrac{1}{x^4}\right)' = 2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} - 3 \cdot \left(-\dfrac{4}{x^5}\right) =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{12}{x^5}$.

Пример 2: Найти производную функции $y = \ln x \cdot \sin x$.

Решение: $y' = (\ln x \cdot \sin x)' = (\ln x)' \cdot \sin x + \ln x \cdot (\sin x)' = \dfrac{1}{x}\sin x + \ln x \cdot \cos x = \dfrac{\sin x}{x} + \ln x \cdot \cos x$.

Пример 3: Найти производную функции $y = \dfrac{3x^4 - 2}{\sqrt{x}}$.

Решение: $y' = \left(\dfrac{3x^4 - 2}{\sqrt{x}}\right)' = \dfrac{\left(3x^4\right)' \cdot \sqrt{x} - 3x^4 \cdot \left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \dfrac{3 \cdot 4x^3 \cdot \sqrt{x} - 3x^4 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{12x^3\sqrt{x} - \dfrac{3x^4}{2\sqrt{x}}}{x} =$

$$= \dfrac{\dfrac{12x^3\sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x} - 3x^4}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{\dfrac{24x^3 \cdot x - 3x^4}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{24x^4 - 3x^4}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{21x^4}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{31x^3}{\sqrt{x}}.$$

<u>Определение:</u> Если $y = f(u)$**,** где $u = u(x)$, то есть y - сложная функция, то производная сложной функции находится по следующему правилу: $y' = f'(u) \cdot u'(x)$, то есть производную внешней функции нужно умножить на производную внутренней функции.

Пример 4: Найти производную функции $y = \sin(x^2 - 3x)$.

Решение:

$y' = \left(\sin(x^2 - 3x)\right)' = \left| \, x^2 - 3x = t \, \right| = \sin' t = \cos t \cdot t' = \sin(x^2 - 3x) \cdot \left(x^2 - 3x\right)' = \sin(x^2 - 3x) \cdot (2x - 3) =$

$= (2x - 3)\sin(x^2 - 3x)$

Пример 5: Найти производную функции $y = \sqrt{4x^3 - 12x + 8}$.

Решение:

$$y' = \left(\sqrt{4x^3 - 12x + 8}\right)' = \left| 4x^3 - 12x + 8 = t \right| = \left(\sqrt{t}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot t' = \frac{1}{2\sqrt{4x^3 - 12x + 8}} \cdot \left(4x^3 - 12x + 8\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{4x^3 - 12x + 8}} \cdot \left(12x^2 - 12\right) = \frac{12x^2 - 12}{2\sqrt{4x^3 - 12x + 8}} = \frac{2\left(6x^2 - 6\right)}{2\sqrt{4x^3 - 12x + 8}} = \frac{6x^2 - 6}{\sqrt{4x^3 - 12x + 8}}.$$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение производной функции.
2. Перечислите правила вычисления производной.
3. Как определяется производная сложной функции?

<u>1 вариант</u>

Задание № 1. Найдите производные функций:

1. $y = x^6 + 15x^{10} + 6$;
2. $y = (x^2 + 3)(2x^4 - 1)$;
3. $y = \sqrt{x}(8x - 10)$;
4. $y = x \cdot \cos x$;
5. $y = \frac{3x^2}{(3 - 4x)}$;
6. $y = 3x \cdot ctg\, 2x$;
7. $y = (12 - 3x)^5$;
8. $y = x^3 \cdot \ln x$;
9. $y = \sin(2x - 5)$;
10. $y = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$.

Задание № 2. Найдите производные сложных функций:

1. $y = \cos^3 2x$;
2. $y = \sqrt{3x^6 - 2x}$;
3. $y = \ln(x^2 + x + 1)$;
4. $y = arctg\left(\frac{x}{2}\right)$.

<u>2 вариант</u>

Задание № 1. Найдите производные функций:

1. $y = x^9 - 6x^{21} - 36$;
2. $y = (x^2 - 2)(x^7 + 4)$;
3 $y = \sqrt{x}(x^4 + 2)$;
2. $y = \sqrt{x} \cdot \sin x$;
3. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$;
6. $y = \cos x \cdot ctg\, 3x$;
7. $y = (6 + 2x)^4$;
8. $y = \frac{\ln x}{5x}$;
9. $y = \sin(3x + 1)$;
10. $y = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$.

Задание № 2. Найдите производные сложных функций:

1. $y = 5\sin^2 4x$;
2. $y = \ln^2 4x$;
3. $y = \sqrt{5x^2 + 4x}$;
4. $y = \cos 5x^3$.

<u>3 вариант</u>

Задание № 1. Найдите производные функций:

1. $y = x^7 - 4x^{16} - 3$;
2. $y = (x^4 + 8)(5x^3 - 2)$;
3. $y = \sqrt{x}(x^3 + 1)$;
4. $y = x^2 \cdot \sin x$;
5. $y = \frac{\cos x}{x}$;
6. $y = \sin x \cdot tg 2x$;
7. $y = (4x - 5)^6$;
8. $y = \frac{x^2}{\ln x}$;
9. $y = tg(5x + 1)$;
10. $y = \frac{\sqrt{x}}{e^x}$.

Задание № 2. Найдите производные сложных функций:

1. $y = \sin 5x^3$;
2. $y = tg(\ln 2x)$;
3. $y = \sqrt{2x + 5}$;
4. $y = \ln(\cos 2x)$

<u>4 вариант</u>

Задание № 1. Найдите производные функций:

1 $y = x^{10} - 5x^8 + 1$;
2. $y = (x^4 + 4)(3x^2 - 6)$;
3. $y = \sqrt{x}(x^6 - 2)$;
4. $y = \sqrt{x} \cdot \cos x$;
5. $y = \frac{\sqrt{x}}{8 - 3x}$;
6. $y = \cos 4x \cdot tgx$;
7. $y = (5x - 3)^7$;
8. $y = \frac{\sqrt{x}}{8 - 3x}$;
9. $y = ctg(4x + 3)$;
10. $y = \frac{\ln x}{e^x}$.

Задание № 2. Найдите производные сложных функций:

1. $y = \cos 3x^2$;
2. $y = \sin(\ln x)$;
3. $y = \sqrt{3x^2 + 2x}$;
4. $y = \ln(2x - 4)$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3

Тема: «Частные производные и полный дифференциал функции двух переменных»

Цель: научиться вычислять частные производные и полный дифференциал функции двух переменных.

Теория.

Определение: Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Правила вычисления производных: 1. $(u+v)' = u' + v'$;

2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v + u \cdot v'}{v^2}$.

Частная производная и полный дифференциал.

Определение: Частная производная функции двух переменных по одному из её аргументов равна пределу отношения частного приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$.

Пример 1: Найти частные производные функции: $z = x^2 y - 3y^2 + 5x$.

Решение: $\dfrac{\partial z}{\partial x}(y = const) = (x^2 y - 3y^2 + 5x)' = 2xy - 0 + 5 = 2xy + 5$;

$\dfrac{\partial z}{\partial y}(x = const) = (x^2 y - 3y^2 + 5x)' = x^2 \cdot 1 - 6y + 0 = x^2 - 6y$.

Определение: Полный дифференциал функции $z = f(x; y)$ обозначается dz и имеет вид:

$dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$ или $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

Пример 2: Найти полный дифференциал функции $z = xy^2 + 4y$.

Решение: Найдём частные производные: $\dfrac{\partial z}{\partial x}(y = const) = (xy^2 + 4y)' = 1 \cdot y^2 + 0 = y^2$;

$\dfrac{\partial z}{\partial y}(x = const) = (xy^2 + 4y)' = x \cdot 2y + 4 = 2xy + 4$;

тогда полный дифференциал будет иметь вид: $dz = y^2 dx + (2xy + 4)dy$

Пример 3: Найти полный дифференциал функции $z = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{y^4}{8}$ при $x = 2, \quad y = 1, \quad \Delta x = 0{,}1, \quad \Delta y = 0{,}2$.

Решение: Полный дифференциал функции имеет вид: $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$. Тогда найдём частные производные заданной функции: $\dfrac{\partial z}{\partial x}(y = const) = \left(\dfrac{x^3}{2} - \dfrac{y^4}{8}\right)' = \dfrac{3x^2}{2} - 0 = \dfrac{3x^2}{2}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x = const) = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{y^4}{8} \right)' = 0 - \frac{4y^3}{8} = \frac{y^3}{2} \;;$$

тогда полный дифференциал будет иметь вид: $dz = \frac{3x^2}{2}\Delta x - \frac{y^3}{2}\Delta y$. Подставим в формулу полного дифференциала заданные значения:

$$dz = \frac{3 \cdot 2^2}{2} \cdot 0{,}1 + \frac{1^3}{2} \cdot 0{,}2 = 6 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}6 + 0{,}1 = 0{,}7 .$$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение производной функции.
2. Перечислите правила вычисления производной.
3. Дайте понятие частной производной функции.
4. Дайте понятие полного дифференциала.

<u>1 вариант</u>

Задание № 1. Найдите частные производные функций:

1. $z = y^3 - 3y + 3x$;
2. $z = \ln y + \frac{y}{x}$;
3. $z = x^3 + y^3$;
4. $z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36}$.

Задание № 2. Найдите полный дифференциал функции:

1. $z = 3xy - 2x^2y^3$; 2. $z = \arccos(x - y)$; 3. $z = 3x^2 - \sin xy^2$.

Задание № 3. Найдите полный дифференциал при заданных значениях $x, y, \Delta x, \Delta y$:

1. $z = y^2 + 3xy + x, \quad x = 1,\ y = 2,\ \Delta x = 0{,}05,\ \Delta y = -0{,}05$;
2. $z = x^2 + 2xy + y^2, \quad x = 2,\ y = 1,\ \Delta x = 0{,}06,\ \Delta y = -0{,}02$

<u>2 вариант</u>

Задание № 1 . Найдите частные производные функций:

1. $z = y^2 - 2y + 5x$;
2. $z = 2y^3x - 3x^3y + 5x$;
3. $z = \ln(x^3 - 5y^2)$;
4. $z = \cos(x^2 - y^2)$.

Задание № 2. Найдите полный дифференциал функции:

1. $z = 2x^3 + 4y^2 + 5xy$; 2. $z = \arcsin(x + y)$; 3. $z = 2xy - \cos xy$.

Задание № 3. Найдите полный дифференциал при заданных значениях $x, y, \Delta x, \Delta y$:

1. $z = x^2 + 3xy + y^2, \quad x = 1,\ y = 1,\ \Delta x = -0{,}02,\ \Delta y = 0{,}04$;

2. $z = x^2 + y^2 + 2x - 2y, \quad x = 1,\ y = 1,\ \Delta x = -0{,}06,\ \Delta y = 0{,}05$.

3 вариант

Задание № 1. Найдите частные производные функций:

1. $z = y^4 - 3x^2 + 2xy$;
2. $z = 3y^2x^3 - 4yx^2 + 3y$;
3. $z = \ln(x^2 - 4y^3)$;
4. $z = e^{x^2 y}$.

Задание № 2. Найдите полный дифференциал функции:

1. $z = 3xy - 2x^2y^3$; 2. $z = \arccos(x - y)$; 3. $z = 3x^2 - \sin xy^2$.

Задание № 3. Найдите полный дифференциал при заданных значениях $x,\ y,\ \Delta x,\ \Delta y$:

1. $z = y^2 + 3xy + x, \quad x = 1,\ y = 2,\ \Delta x = 0{,}05,\ \Delta y = -0{,}05$;

2. $z = x^2 + 2xy + y^2, \quad x = 2,\ y = 1,\ \Delta x = 0{,}06,\ \Delta y = 0{,}02$.

4 вариант

Задание № 1. Найдите частные производные функций:

1. $z = xy^3 + x^2 + 2y$;
2. $z = y^2x - 2yx^3 + 3x$;
3. $z = \ln(x \quad - 4xy^3)$;
4. $z = e^{x^2 y^2}$.

Задание № 2. Найдите полный дифференциал функции:

1. $z = 2xy - 2x^2y^2$; 2. $z = \arcsin(x - y)$; 3. $z = 3x^2 - \cos xy$.

Задание № 3. Найдите полный дифференциал при заданных значениях $x,\ y,\ \Delta x,\ \Delta y$:

1. $z = y^2 + 3x^2y + y, \quad x = 1,\ y = 2,\ \Delta x = 0{,}05,\ \Delta y = -0{,}05$;

2. $z = x^2 + 2xy^3 + x^2, \quad x = 2,\ y = 1,\ \Delta x = 0{,}06,\ \Delta y = 0{,}02$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

По теме: «Неопределенный интеграл. Интегрирование методом подстановки и по частям».

Цель: научиться интегрировать функции, используя основные формулы интегрирования, а также способом подстановки и по частям.

Теория.

Неопределённый интегра́л для функции $f(x)$ — это совокупность всех *первообразных* данной функции. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $(a; b)$ и $F(x)$ - её первообразная, то есть $F'(x) = f(x)$ при $a \langle x \langle b$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Методы интегрирования.

Таблица интегралов.

1	$\int dx = x + C$;	9	$\int \sin x dx = -\cos x + C$;
2	$\int a dx = ax + C$;	10	$\int \cos x dx = \sin x + C$;
3	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$;	11	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$;
4	$\int \frac{dx}{x} = \ln\| x \| + C$;	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$
5	$\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$;	13	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$;
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;	14	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\| \frac{a+x}{a-x} \right\| + C$;
7	$\int e^x dx = e^x + C$;	15	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$;
8	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;		

Пример 1. Вычислить неопределенный интеграл $\int x^5 dx$.

Решение: Для решения данного интеграла не нужно использовать свойства неопределенных интегралов, достаточно формулы интеграла степенной функции:

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;$ в нашем случае $n = 5$, тогда искомый интеграл равен: $\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} = \frac{x^6}{6} + C$.

Пример 2. Вычислить неопределенный интеграл: $\int (4x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}})dx$.

Решение: Для этого интеграл суммы разложим на сумму интегралов.

$$\int (4x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}})dx = 4\int x^2 dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + 2\sqrt{x} = \frac{4x^3}{3} + 2\sqrt{x} + C.$$

Метод замены переменной (метод подстановки).

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (то есть подстановки). При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является **табличным** или к нему сводящимся. Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой. Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $dx=\varphi'(t)dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем *формулу интегрирования подстановкой:*

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt\,.$$

Пример 3: Вычислить интеграл $\int\frac{tg^3x}{\cos^2x}dx$**.**

Решение: Сделаем замену переменной tg x = t, тогда $dt=(\,tgx\,)'\cdot dx=\frac{1}{\cos^2x}dx$. Получим табличный интеграл $\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C$, где C - произвольная постоянная. Производя обратную замену переменной, получим: $\int\frac{tg^3x}{\cos^2x}dx=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{1}{4}tg^4x+C$**.**

Пример 4*:* Вычислить интеграл $\int\frac{x+1}{x^2+2x-5}dx$.

Решение: Сделаем замену переменной $x^2+2x-5=t$, тогда $dt=(x^2+2x-5)'\cdot dx=(2x+2)dx=$

$=2(x+1)dx$. Отсюда $(x+1)dx=\frac{dt}{2}$.

Получим табличный интеграл $\int\frac{\frac{dt}{2}}{t}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln t+C$, где C - произвольная постоянная.

Производя обратную замену переменной, получим: $\int\frac{x+1}{x^2+2x-5}dx=\int\frac{\frac{dt}{2}}{t}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln t+C==$
$\frac{1}{2}\ln\left|\,x^2+2x-5\,\right|+C$.

Метод интегрирования по частям.

Интегрирование по частям – применение следующей формулы интегрирования:

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du\,.$$

Пример 5: Найти интеграл $\int x\cdot\ln^2xdx$.

Решение: Применим формулу интегрирования по частям $\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$.

$$\int x\cdot\ln^2 xdx = \left| \begin{array}{ll} u=\ln^2 x & dv = xdx \\ du = \left(\ln^2 x\right)' dx & \int dv = \int xdx \\ du = \frac{2\ln x}{x}dx & v = \frac{x^2}{2}dx \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x - \int x\cdot\ln xdx$$

. Снова применим формулу интегрирования по частям:

$$\int x\ln xdx = \left| \begin{array}{ll} u=\ln x & dv = xdx \\ du = \left(\ln x\right)' dx & \int dv = \int xdx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$. Таким образом, получим:

$\int x\cdot\ln^2 xdx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4}\left(2\ln^2 x - \ln x + 1\right) + C$.

Пример 6. Вычислить $\int xe^x dx$**.**

Решение. $\int xe^x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & \int dv = \int e^x dx \\ & v = e^x \end{array} \right| = x\cdot e^x - \int e^x dx = x\cdot e^x - e^x + C$.

Контрольные вопросы:

1. Дайте понятие первообразной функции.
2. Дайте понятие неопределённого интеграла.
3. Перечислите свойства неопределённого интеграла.
4. В чём заключается интегрирование функций способом подстановки?
5. В чём заключается интегрирование функций по частям?

<u>1 вариант</u>

Задание № 1. Вычислите интегралы следующих функций:

1. $\int 2xdx$;
2. $\int x^{11}dx$;
6. $\int\frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$;
7. $\int 2^x dx$;

3. $\int 4\sqrt{x}dx$;

8. $\int\left(\frac{4}{3}x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{4}x^{\frac{1}{3}}+5\right)dx$;

4. $\int \sin 2xdx$;

9. $\int\sqrt[3]{x^2}\,dx$;

5. $\int\left(\cos x-\frac{4}{\cos^2 x}\right)dx$;

10. $\int\frac{x^3+3x^2+4x-1}{x}dx$.

Задание № 2. Проинтегрируйте функции способом подстановки:

1. $\int\frac{dz}{(5z+1)^3}$;

4. $\int\frac{x^2dx}{x^3-2}$;

2. $\int\sqrt[4]{3x-1}dx$;

5. $\int tgxdx$;

3. $\int\frac{5dx}{x-3}$;

6. $\int\frac{6z^3dz}{1-2z^4}$.

Задание № 3. Проинтегрируйте функции по частям:

1. $\int x\cdot\sin xdx$;
2. $\int x\cdot\ln xdx$.

<u>2 вариант</u>

Задание № 1. Вычислите интегралы следующих функций:

1. $\int\frac{3dx}{x}$;

6. $\int\frac{2dx}{9+x^2}$;

2. $\int -5zdx$;

7. $\int\sqrt[4]{x^3}dx$;

3. $\int 5x^{20}dx$;

8. $\int\left(\frac{7}{8}x^{\frac{1}{5}}-\frac{4}{3}x^{\frac{2}{3}}+4\right)dx$;

4. $\int 4(x^2-x+3)dx$;

9. $\int 3(2x^2-1)^2dx$;

5. $\int\cos 3xdx$;

10. $\int\frac{x^2-x+x^3+1}{x}dx$

Задание № 2. Проинтегрируйте функции способом подстановки:

1. $\int\frac{dx}{(4-3x)^3}$;

4. $\int\frac{\cos x}{2\sin x+1}dx$;

2. $\int\sqrt{(2x+1)^3}dx$;

5. $\int\frac{x^7dx}{x^8+4}$;

3. $\int\frac{2xdx}{x^2+1}$;

6. $\int\frac{2x-4}{x^2-4x-6}dx$.

Задание № 3. Проинтегрируйте функции по частям:

1. $\int x\cdot\cos xdx$;

2. $\int x^2\cdot e^xdx$.

<u>3 вариант</u>

Задание № 1. Вычислите интегралы следующих функций:

1. $\int\left(\frac{3}{x}+2x\right)dx$;

6. $\int\frac{2dx}{9+x^2}$;

2. $\int(5x^{20}-\frac{1}{\sqrt{x}})dx$;

7. $\int\left(\cos x-\frac{4}{\cos^2 x}\right)dx$;

3. $\int 4(x^2-x+3)dx$;

8. $\int\frac{2}{x^2+25}dx$;

4. $\int(\cos x-e^x)dx$;

9. $\int\frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

5. $\int\frac{5dx}{\sin^2 x}$;

10. $\int\left(\frac{1}{x}+\sin x\right)dx$.

Задание № 2. Проинтегрируйте функции способом подстановки:

1. $\int\frac{dz}{(5z+1)^3}$;

4. $\int\frac{\cos x}{2\sin x+1}dx$;

2. $\int\frac{x^2dx}{x^3-2}$;

5. $\int\sqrt{(2x+1)}\ dx$;

3. $\int\frac{5dx}{x-3}$;

6. $\int\frac{x^7dx}{x^8+4}$;

Задание № 3. Проинтегрируйте функции по частям:

1. $\int x\cdot\sin xdx$;

2. $\int\ln x\cdot e^xdx$.

<u>4 вариант</u>

Задание № 1. Вычислите интегралы следующих функций:

1. $\int \frac{5dx}{\sin^2 x}$;

2. $\int \frac{2}{x^2+25}dx$;

3. $\int (2x - 3\sqrt{x} + \sin x)dx$;

4. $\int \frac{3dx}{\sqrt{x}}$;

5. $\int (\cos x + tgx + 5)dx;$;

6. $\int \frac{dz}{3\sqrt{1-z^2}}$;

7. $\int \frac{3dx}{x}$;

8. $\int (\frac{2}{x} - 6x + e^x)dx;$;

9. $\int (\frac{1}{2\sqrt{x}} + ctgx)dx;$;

10. $\int (2 - 3x + 5x^2)dx$.

Задание № 2. Проинтегрируйте функции способом подстановки:

1. $\int \frac{6x^3dx}{1-2x^4}$;

2. $\int \frac{dx}{(4-3x)^3}$;

3. $\int \frac{\cos xdx}{\sin^2 x}$;

4. $\int \frac{2xdx}{x^2+1}$;

5. $\int \frac{2x}{x^2-6}dx$;

6. $\int \frac{4xdx}{5+2x^2}$.

Задание № 3. Проинтегрируйте функции по частям:

1. $\int x^2 \cdot e^x dx$;

2. $\int e^x \cdot \cos xdx$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5

По теме: «Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными».

Цель: научиться находить общие и частные решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Теория:

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Определение: Уравнение вида $f(x)P(y)dx + \varphi(y)Q(x)dy = 0$ называется уравнением с *разделяющимися переменными.*

Это уравнение можно привести к виду $f(x)dx + \varphi(y)dy = 0$, разделив все члены исходного уравнения на произведение $P(y)Q(x)$.

Пример 1: Решить уравнение $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$.

Решение:

- Разделим все члены данного уравнения на xy, получим: $\dfrac{(1+x)ydx}{xy}+\dfrac{(1-y)xdy}{xy}=0$

$$\frac{(1+x)dx}{x}+\frac{(1-y)dy}{y}=0.$$

- Перенесём второе слагаемое в правую часть: $\dfrac{(1+x)dx}{x}=-\dfrac{(1-y)dy}{y}$

$$\frac{(1+x)dx}{x}=\frac{(y-1)dy}{y}.$$

- Проинтегрируем полученное уравнение: $\displaystyle\int\frac{1+x}{x}dx=\int\frac{y-1}{y}dy$.

- Разделим почленно числитель на знаменатель: $\displaystyle\int\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{x}\right)dx=\int\left(\frac{y}{y}-\frac{1}{y}\right)dy$

$$\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx=\int\left(1-\frac{1}{y}\right)dy.$$

- Интегрируя, получим: $\displaystyle\int\frac{1}{x}dx+\int 1dx=\int 1dy-\int\frac{1}{y}dy$

$$\ln x+x=y-\ln y+C\ .$$

- Произвольную постоянную C можно обозначить через $-\ln C$, тогда получим: $\ln x+x=y-\ln y-\ln C$.

- Перенесём натуральные логарифмы в левую часть и представим их сумму как логарифм произведения: $\begin{array}{l}\ln x+\ln y+\ln C=y-x\\ \ln(\ xyC\ )=y-x\end{array}$.

- По определению логарифма числа получим: $xyC=e^{y-x}$. Это и есть общее решение данного дифференциального уравнения.

Пример 2: Найти частное решение уравнения $(1+y^2)dx=\sqrt{x}dy$, если $y=1$ при $x=0$.

Решение:

- Разделим все члены данного уравнения на $(1+y^2)\cdot\sqrt{x}$, получим: $\dfrac{(1+y^2)dx}{(1+y^2)\cdot\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}dy}{(1+y^2)\cdot\sqrt{x}}$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{dy}{1+y^2}$$

- Проинтегрируем полученное уравнение: $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int\frac{dy}{1+y^2}$.

- Интегрируя, получим: $2\sqrt{x}=arctgy+C$. Это есть общее решение дифференциального уравнения.

- Согласно условию $y=1$ при $x=0$, подставим данные значения в общее решение: $2\sqrt{0}=arctg1+C$.
- Выразим C: $0=arctg1+C$

$$C=-arctg1$$

$$C=-\frac{\pi}{4}.$$

- При найденном значении C из общего решения получим: $2\sqrt{x}-arctgy+\frac{\pi}{4}=0$. Это и есть частное решение дифференциального уравнения.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение дифференциального уравнения.
2. Что является общим решением дифференциального уравнения?
3. Что является частным решением дифференциального уравнения?
4. Дайте определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
5. Приведите алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

1 вариант.

Задание № 1. Решите дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

1. $y^2dx+(x-2)dy=0$ 2. $y^2dx+x^2dy=0$ 3. $\sqrt{y}dx-\sqrt{x}dy=0$

Задание № 2. Найдите частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям : $\frac{dy}{x-1}=\frac{dx}{y-2}$; при $y=4, \quad x=0$.

2 вариант.

Задание № 1. Решите дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

1. $(1+x^2)dx+y^2dy=0$ 2. $\frac{dy}{\sqrt{x}}=\frac{3dx}{\sqrt{y}}$ 3. $xydx=(1+x^2)dy$

Задание № 2. Найдите частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям : $y'(x^2+1)=2xy, \quad y=1 \;\; при \;\; x=0$.

3 вариант.

Задание № 1. Решите дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

1. $(1+y)dx=(x-1)dy$ 2. $y^2dx+(x-2)dy=0$ 3. $(1+y^2)dx-\sqrt{x}dy=0$

Задание № 2. Найдите частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными при заданных условиях: $y'(1-x)=1+y, \quad y=3 \;\; при \;\; x=-2$.

4 вариант.

Задание № 1. Решите дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

1. $\frac{dy}{x^2} = \frac{dx}{y^2}$ 2. $y^2 dx = e^x dy$ 3. $(2xy + 3y)dx - x^2 dy = 0$

Задание № 2. Найдите частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными при заданных условиях: $y'(2 + x) = 1 - y, \quad y = 1 \;\; при \;\; x = 2$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 6.

по теме: «Линейные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами».

Цель: научиться находить общее и частное решение линейных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Теория:

Линейные дифференциальные уравнения.

Линейными дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, которые содержат неизвестную

функцию и её производную в первой степени. Такие уравнения имеют следующий вид:
$y' + yf(x) = \varphi(x)$ или $\frac{dy}{dx} + yf(x) = \varphi(x)$.

Для решения линейных дифференциальных уравнений пользуются подстановками: $y = uv$ и $\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$.

Пример 1: решить уравнение $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x$.

Решение:

- В заданном уравнении заменим $y = uv$ и $\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$: $v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} - \frac{2uv}{x} = x$ ….(1)
- Сгруппируем второе и третье слагаемое и вынесем u за скобку: $v\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{2v}{x}\right) = x$ ….(2)
- Примем выражение, стоящее в скобках, равным нулю: $\frac{dv}{dx} - \frac{2v}{x} = 0$ ….(3)

- Решим уравнение (3) : $\frac{dv}{dx} - \frac{2v}{x} = 0$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x}.$$

- разделим на v: $\frac{dv}{vdx} = \frac{2}{x}$.
- умножим на dx: $\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x}$.
- Проинтегрируем данное уравнение: $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2dx}{x}$

$$\int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln v = 2\ln x$$

$\ln v = \ln x^2$, отсюда $v = x^2$ …(4)

- Так как в уравнении (2) скобка принята равной нулю, то уравнение (2) примет вид: $v\frac{du}{dx} = x$ …(5)
- В уравнение (5) подставим значение v из уравнения (4): $x^2 \frac{du}{dx} = x$.
- Разделим полученное уравнение на x^2 : $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$.
- Умножим на dx : $du = \frac{dx}{x}$.
- Проинтегрируем данное уравнение: $\int du = \int \frac{dx}{x}$.
- Получим: $u = \ln x + C$ и заменим произвольную постоянную C на $\ln C$.
- Тогда получим: $u = \ln x + \ln C$ или $u = \ln xC$ …..(6).
- Заменим u и v в подстановке $y = uv$, получим $y = x^2 \ln xC$ - это и есть общее решение линейного дифференциального уравнения.

Дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Общий вид линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$y'' + py' + qy = 0 \text{ ....(1)}$$

Алгоритм решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

- Составить *характеристическое уравнение.* Для его составления достаточно в уравнение (1) вместо y'', y' и y написать соответственно k^2, k и 1. Получим квадратное уравнение $k^2 + pk + q = 0$.
- Решить полученное квадратное уравнение и найти его корни k_1 и k_2.
- В зависимости от значения корней выбрать частное и общее решение уравнения.

Рассмотрим три случая решения уравнения (1) :

	Корни характеристического уравнения k_1 и k_2	**Частное решение**	**Общее решение**
1	k_1 и k_2 действительные и различные	$y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2	k_1 и k_2 действительные и равные $k_1 = k_2 = k$	$y_1 = e^{k\ x}$ и $y_2 = xe^{k\ x}$	$y = C_1 e^{k\ x} + C_2 xe^{k\ x}$
3	k_1 и k_2 мнимые, т.е. $k_1 = a + bi$, $k_2 = a - bi$, где $b \neq 0$	$y_1 = e^{ax}\cos(bx)$ и $y_2 = e^{ax}\sin(bx)$	$y = e^{ax}\left(C_1\cos(bx) + C_2\sin(bx)\right)$

Пример 2: решить уравнение $y'' + 10y' - 11y = 0$.

Решение:

- Составим характеристическое уравнение: $k^2 + 10k - 11 = 0$.
- Решим его и найдём, что $k_1 = 1$ и $k_2 = -11$. Это два действительных и различных корня.
- Получим два частных линейно независимых решения $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-11x}$.
- Общим решением данного уравнения будет: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-11x}$.

Пример 3: решить уравнение $y'' + 14y' + 49y = 0$.

Решение:

- Составим характеристическое уравнение: $k^2 + 14k + 49 = 0$.

- Решим его и найдём, что $k_1 = -7$ и $k_2 = -7$. Это два действительных и равных корня.

- Получим два частных линейно независимых решения $y_1 = e^{-7x}$ и $y_2 = xe^{-7x}$.

- Общим решением данного уравнения будет: $y = C_1 e^{-7x} + C_2 x e^{-7x}$.

Пример 4: решить уравнение $y'' + 6y' + 13y = 0$.

Решение:

- Составим характеристическое уравнение: $k^2 + 6k + 13 = 0$.

- Решим его и найдём, что $D = 36 - 52 = -16$, тогда $\sqrt{D} = \sqrt{-16} = 4i$ и $k_{1,2} = \dfrac{-6 \pm 4i}{2} = \dfrac{2(-3 \pm 2i)}{2} = -3 \pm 2i$, т. е. $k_1 = -3 + 2i$ и $k_2 = -3 - 2i$. Это два мнимых корня, где $a = -3$, $b = 2$.

- Получим два частных линейно независимых решения $y_1 = e^{-3x} \cos 2x$ и $y_2 = e^{-3x} \sin 2x$.

- Общим решением данного уравнения будет: $y = e^{-3x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x \right)$.

Пример 5: найти частное решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$, если $y = 2$, $y' = 3$ при $x = 0$.

Решение:

- Составим характеристическое уравнение: $k^2 - 3k + 2 = 0$.
- Решим его и найдём, что $k_1 = 1$ и $k_2 = 2$. Это два действительных и различных корня.

- Получим два частных линейно независимых решения $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{2x}$.

- Общим решением данного уравнения будет: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ …..(1)

- Найдём производную уравнения (1): $y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}$ …..(2)

- Согласно условию $y = 2$, $y' = 3$ при $x = 0$, из уравнений (1) и (2) составим систему:
$$\begin{cases} 2 = C_1 e^0 + C_2 e^{2 \cdot 0} \\ 3 = C_1 e^0 + 2C_2 e^{2 \cdot 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = C_1 + C_2 \\ 3 = C_1 + 2C_2 \end{cases}.$$

- Из второго уравнения вычтем первое $\begin{cases} 1 = C_2 \\ 2 = C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 1 \\ 2 = 1 + C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = 1 \end{cases}$.

- Подставим в уравнение (1) вместо C_1 и C_2 найденные значения получим частное решение данного дифференциального уравнения: $y = 1 \cdot e^x + 1 \cdot e^{2x} = e^x + e^{2x}$.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

2. Что является общим решением линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами?

3. Дайте определение линейного дифференциального уравнения.

4. Какие подстановки используются при решении линейного дифференциального уравнения?

Вариант 1.

Задание № 1. Решите линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

а) $y'' - 8y' + 16y = 0$; б) $y'' - y' - 2y = 0$; в) $2y'' + 2y' + 5y = 0$.

Задание № 2. Найти частное решение уравнения:

$y'' - y = 0$, если $y = 2$, $y' = 0$ при $x = 0$;

Задание № 3. Решите линейное дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$

Вариант 2.

Задание № 1. Решите линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

а) $y'' - 9y = 0$; б) $y'' - 4y' + 4y = 0$; в) $2y'' + 4y' + 4y = 0$.

Задание № 2. Найти частное решение уравнения:

$y'' - 10y' + 25y = 0$, если $y = 2$, $y' = 8$ при $x = 0$;

Задание № 3. Решите линейное дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2$

Вариант 3.

Задание № 1. Решите линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

а) $y'' - 10y' + 25y = 0$; б) $9y'' - 12y' + 4y = 0$; в) $y'' + 2y' + 17y = 0$.

Задание № 2. Найти частное решение уравнения:

$y'' + 6y' + 9y = 0$, если $y = 1$, $y' = 2$ при $x = 0$;

Задание № 3. Решите линейное дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3$.

Вариант 4.

Задание № 1. Решите линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

а) $y'' - 14y' + 49y = 0$; б) $4y'' - 25y' + 25y = 0$; в) $y'' + 16y = 0$.

Задание № 2. Найти частное решение уравнения:

а) $y'' - 4y' + 5y = 0$, если $y = 1$, $y' = -1$ при $x = 0$.

Задание № 3. Решите линейное дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x^2$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 7

По теме: Понятие комплексного числа. Алгебраическая форма комплексного числа. Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел.

Цель: познакомиться с понятием комплексного числа, научиться выполнять действия с комплексными числами, записанными в алгебраической форме.

Теория.

Комплексными числами называются числа вида $a + bi$, где a и b - действительные числа, а число i, определяемое равенством $i^2 = -1$, называется *мнимой единицей.*

Действия с комплексными числами.

1. Два комплексных числа $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ называются *равными*, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.
2. *Суммой* двух комплексных чисел $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ называется комплексное число $(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.
3. *Произведением* двух комплексных чисел $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ называется комплексное число $(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$.
4. *Частным* двух комплексных чисел $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ называется комплексное число $\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$.
5. Комплексные числа вида $a + bi$ и $-a - bi$ называются *противоположными.*
6. *Модулем* комплексного числа $z = a + bi$ называется число $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Запись комплексного числа в виде $z = a + bi$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.

Пример 1: Вычислить (2 – 2*i*) + (3 + 4*i*).

(2 – 2*i*) + (3 + 4*i*) = 2 + 3 – 2*i* + 4i = 5 + 2*i*

Пример 2: Вычислить $(6 – 2i) – (3 – 5i)$.

$(6 – 2i) – (3 – 5i) = 6 – 3 – 2i + 5i = 3 + 3i$

Пример 3: Вычислить $(6 – 2i)\cdot(3 – 5i)$.

$(6 – 2i)\cdot(3 – 5i) = 6\cdot3 – 6\cdot5i – 3\cdot2i + 2\cdot5\cdot i^2 = 8 + 36i$

Пример 4: Вычислить $(2 – i)$**:**$(3 – i)$.

$$\frac{2-i}{3-i}=\frac{2-i}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i}=\frac{(2-i)(3+i)}{10}=\frac{6+2i-3i+1}{10}=\frac{7-i}{10}=0{,}7-0{,}1i$$

Пример 5: Решить уравнение $x^2=-4$.

$x=\pm\sqrt{-4}$

$x=\pm\sqrt{4}\sqrt{-1}$

$x=\pm 2i$

Пример 6: Найти действительные числа x и y из уравнения

$(x+1)+(2-y)i=2+4i$

$$\begin{cases}x+1=2\\2-y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-2\end{cases}$$

Пример 7: Найти $(8 + i)$**:**$(2 – 3i)$.
Решение. Перепишем это отношение в виде дроби, умножив её числитель и знаменатель на 2 + 3i и выполнив все преобразования, получим:

$$\frac{8+i}{2-3i}=\frac{8+i}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{13+26i}{13}=1+2i$$

Пример 8: Возвести в квадрат комплексное число $z=2+3i$

Решение:

- первый способ это переписать степень как произведение множителей
  $z^2=(2+3i)^2=(2+3i)(2+3i)=2\cdot2+2\cdot3i+3i\cdot2+3i\cdot3i=4+6i+6i+9i^2=4+12i+9\cdot(-1)=$
  $=-5+12i$

- второй способ состоит в применение известной школьной формулы сокращенного умножения $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$:

  $z^2=(2+3i)^2=2^2+2\cdot2\cdot3i+(3i)^2=4+12i+9(-1)=-5+12i$

Пример 8: Возвести в степень числа i^{10} и i^{33}.

Решение:

- $i^{10}=(i^2)^5=(-1)^5=-1$.

- $i^{33}=i\cdot i^{32}=i\cdot(i^2)^{16}=i\cdot(-1)^{16}=i\cdot1=i$.

1 вариант.

Задание 1. Выполните сложение, вычитание и умножение комплексных чисел. Выпишите вещественную и мнимую части полученных комплексных чисел:

а) *(5+3i)* и *(1+10i);* б) *(3+i)* и *(- 3 - 8i);* в) *(- 6+2i)* и *(- 6 - 2i).*

Задание 2. Выполните действия:

а) *(2-3i)+(5+6i)+(-3-4i);* б) *(1-i)-(7-3i)-(2+i)+(6-2i).*

Задание 3. Выполните умножение комплексных чисел:

а) $\sqrt{12}i \cdot 2\sqrt{5}i$ б) $\sqrt{5}i \cdot 4\sqrt{5}i$.

Задание 4. Выполните деление комплексных чисел:

а) $\frac{1}{i}$; б) $\frac{1}{1-i}$; в) $\frac{1-i}{1+i}$; г) $\frac{3-2i}{1+3i}$.

Задание 5. Решите уравнения: а) $x^2+9=0$; б) $x^2+2x+10=0$.

Задание 6. Найти действительные числа х и у из уравнения: *9 + 2ix + 4iy =10i + 5x – 6y.*

Задание 7. Возвести в степень числа i^{12} и i^{27}.

2 вариант.

Задание 1. Выполните сложение, вычитание и умножение комплексных чисел. Выпишите вещественную и мнимую части полученных комплексных чисел:

а) *(5 - 4 i)* и *(7 + 4i);* б) *(1 - i)* и *(7 - 3i);* в) *(2 - 3i)* и *(5 + 6i).*

Задание 2. Выполните действия:

а) *(5 - 6i) + (7 + 2i) + (- 4 - 3i);* б) *(1- 2i) - (5 + 3i) - (4 + i) +(8 - 5i).*

Задание 3. Выполните умножение комплексных чисел:

а) $\sqrt{6}i \cdot 4\sqrt{8}i$ б) $\sqrt{7}i \cdot 3\sqrt{7}i$;

Задание 4. Выполните деление комплексных чисел:

а) $\frac{2-i}{1-i}$; б) $\frac{1}{1-4i}$; в) $\frac{-2+i}{3-5i}$; г) $\frac{1+i}{2+2i}$.

Задание 5. Решите уравнения: а) $x^2+16=0$; б) $x^2-4x+5=0$.

Задание 6. Найти действительные числа х и у из уравнения: *(1 + i)x + (- 2 + 5i) = - 4 + 17i*

Задание 7. Возвести в степень числа i^{14} и i^{45}.

3 вариант.

Задание 1. Выполните сложение, вычитание и умножение комплексных чисел. Выпишите вещественную и мнимую части полученных комплексных чисел:

а) *(- 2 + 3 i)* и *(3 - 5i);* б) *(5 + 10i)* и *(2 + 4i);* в) *(1 + 3i)* и *(4 - 5i).*

Задание 2. Выполните действия:

а) *(5+3i) + (- 4 - 3i) + (- 2 + 5i);* б) *(8 - 5i) - (- 5 + 3i) - (4 + 2i) +(4 - 5i).*

Задание 3. Выполните умножение комплексных чисел:

а) $\sqrt{5}i \cdot 4\sqrt{8}i$ б) $\sqrt{8}i \cdot 2\sqrt{8}i$ *;*

Задание 4. Выполните деление комплексных чисел:

а) $\frac{2+3i}{3-i}$ *;* б) $\frac{1}{4i}$ *;* в) $\frac{5+2i}{4-7i}$*;* г) $\frac{2+3i}{4+5i}$.

Задание 5. Решите уравнения: а) $x^2+25=0$ *;* б) $x^2-3x+10=0$.

Задание 6. Найти действительные числа х и у из уравнения: *2ix + 3iy + 17=3x + 2y + 18i.*

Задание 7. Возвести в степень числа i^{16} и i^{29}.

<u>4 вариант.</u>

Задание 1. Выполните сложение, вычитание и умножение комплексных чисел. Выпишите вещественную и мнимую части полученных комплексных чисел:

а) *(5 + 2 i)* и *(- 4 + 7i);* б) *(2 + 3i)* и *(4 + 5i);* в) *(4 + 8i)* и *(3 + 5i).*

Задание 2. Выполните действия:

а) *(6 - 3i) + (4 - 8i) + (- 3 + 2i);* б) *(6 - 2i) - (- 4 + 3i) - (5 - 3i) +(6 - 7i).*

Задание 3. Выполните умножение комплексных чисел:

а) $\sqrt{3}i \cdot 6\sqrt{9}i$ б) $\sqrt{3}i \cdot 5\sqrt{3}i$ *;*

Задание 4. Выполните деление комплексных чисел:

а) $\frac{-2+3i}{3-5i}$ *;* б) $\frac{1}{3i}$ *;* в) $\frac{5+10i}{4-5i}$*;* г) $\frac{2+i}{1-i}$.

Задание 5. Решите уравнения: а) $x^2+81=0$ *;* б) $x^2-2x+10=0$.

Задание 6. Найти действительные числа х и у из уравнения: *(3 – i)x + (4 + 2i)y = 1 – 3i.*

Задание 7. Возвести в степень числа i^{20} и i^{41}.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 8

По теме: Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа.

Возведение комплексных чисел в степень. Извлечение корней из комплексных чисел.

Цель: познакомиться с тригонометрической и показательной формой комплексного числа, научиться возводить комплексные числа в степень и извлекать корень из комплексного числа.

Теория.

<u>Тригонометрическая форма комплексного числа.</u>

Любое комплексное число (кроме нуля) $z = a + bi$ можно записать в тригонометрической форме: $z = |\,z\,| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $|\,z\,|$ – это *модуль комплексного числа*, а φ – *аргумент комплексного числа.*

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется число $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$|\,z\,| = r = |\,a + bi\,| = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Аргумент вычисляется по формуле: $\varphi = \arg z = arctg\,\dfrac{b}{a}$

Пример 1: Представить в тригонометрической форме число $z = 2i$.

Решение: Найдем его модуль и аргумент:

- $a = 0,\ \ b = 2$, тогда $|\,z\,| = r = |\,0 + 2i\,| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$
- $\varphi = \arg z = arctg\,\dfrac{2}{0}$ не существует $\Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{2}$
- число в тригонометрической форме: $z = 2 \cdot (\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2})$.

Пример 2: Представить в алгебраической форме число $z = \sqrt{2} \cdot (\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4})$.

Решение: подставим значения $z = \cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ в данное равенство, получим

$$z = \sqrt{2} \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1 + i$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Пусть даны два числа в тригонометрической форме: $z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

1). *При умножении* двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

2). *При делении* двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули делятся, а аргументы вычитаются: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

3). *При возведении* комплексного числа $z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в n-ую степень используется формула: $z^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, которая называется формулой Муавра.

4). *Для извлечения корня* n-ой степени из комплексного числа $z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ используется формула: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot (\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n})$, $k = 0,1,2\ldots\ldots n - 1$

Пример 3: Дано: $z_1 = 3 \cdot (\cos 330^\circ + i\sin 330^\circ)$, $z_2 = 2 \cdot (\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$.

Найти: 1). $z_1 \cdot z_2$, 2). $\frac{z_1}{z_2}$, 3). z_1^4 , 4). $\sqrt[3]{z_2}$

Решение:

1) Воспользуемся формулой $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$, получим:

$$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 2(\cos(330^\circ + 60^\circ) + i\sin(330^\circ + 60^\circ)) = 6(\cos 390^\circ + \sin 390^\circ) = 6(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) =$$
$$6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 3\sqrt{3} + 3i$$

2) Воспользуемся формулой $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2}(\cos(330^\circ - 60^\circ) + i\sin(330^\circ - 60^\circ)) = \frac{3}{2}\left(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ\right) = \frac{3}{2}(0 + i(-1)) = -\frac{3}{2}i$$

3) Воспользуемся формулой $z^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, получим:

$$z_1^4 = 3^4 \cdot (\cos 4 \cdot 330^\circ + i\sin 4 \cdot 330^\circ) = 81(\cos 1320^\circ + i\sin 1320^\circ) = 81(\cos(360^\circ \cdot 3 + 240^\circ) +$$
$$+ i\sin(360^\circ \cdot 3 + 240^\circ) = 81(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ) = 81(-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)) = -40{,}5 - 40{,}5\sqrt{3}i$$

4) Воспользуемся формулой $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot (\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n})$, получим:

$$\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{2} \cdot (\cos\frac{60^\circ + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{60^\circ + 2\pi k}{3}).$$

При $k = 0$, $\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{2} \cdot (\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)$;

$k = 1$, $\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{2} \cdot (\cos 140^\circ + i\sin 140^\circ)$;

$k = 2$, $\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{2} \cdot (\cos 260^\circ + i\sin 260^\circ)$

<u>Показательная форма комплексного числа.</u>

Формула Эйлера

Пусть $z = a + bi$ - некоторое *комплексное число*.

По определению полагают, что $e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a(\cos b + i\sin b)$

- Если число z - действительное, то есть $z = a = a + 0 \cdot i$, то
  $e^z = e^{a+0 \cdot i} = e^a e^{0 \cdot i} = e^a(\cos 0 + i\sin 0) = e^a$

- Если число z - чисто мнимое, то есть $z = bi = 0 + bi$, то
  $e^z = e^{0+bi} = e^0 e^{bi} = e^0(\cos b + i\sin b) = \cos b + i\sin b$

  Таким образом, имеем равенство $e^{bi} = \cos b + i\sin b$,которое называется *формулой Эйлера.*

Рассмотрим произвольное комплексное число, *записанное в тригонометрической форме:* $z = |\, z\,| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$. По формуле Эйлера $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\phi}$, а тогда $z = |\, z\,| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) = |\, z\,| e^{i\phi}$. Следовательно, любое комплексное число можно представить в так называемой *показательной форме:* $z = |\, z\,| e^{i\phi}$

Пример 4: Записать комплексное число $z = 3 - 4i$ в показательной форме.

Решение: Найдем его модуль и аргумент:

- $|\, z\,| = \sqrt{a^2 + b^2}$

  $a = 3,\ \ b = -4$, тогда $|\, z\,| = |\, 3 - 4i\,| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

- $\phi = \arg\ z = arctg\,\dfrac{b}{a}$

  $\phi = \arg\ z = arctg\,\dfrac{-4}{3} = -arctg\,\dfrac{4}{3}$

- число в показательной форме: $z = |\, z\,| e^{i\phi}$

  $z = 5e^{-iarctg\frac{4}{3}}$

Ответ: $z = 5e^{-iarctg\frac{4}{3}}$

<u>Операции с комплексными числами в показательной форме.</u>

1) *Умножение* комплексного числа $z_1 = |\, z_1\,| e^{i\phi_1}$ на комплексное число $z_2 = |\, z_2\,| e^{i\phi_2}$ выглядит следующим образом: $z_1 \cdot z_2 = |\, z_1\,| e^{i\phi_1} \cdot |\, z_2\,| e^{i\phi_2} = |\, z_1\,| \cdot |\, z_2\,| e^{i\,(\phi_1 + \phi_2)}$.

   То есть, чтобы найти произведение комплексных чисел, нужно перемножить их модули и сложить аргументы.

2) *Частное* от деления комплексного числа $z_1 = |\, z_1\,| e^{i\phi_1}$ на комплексное число $z_2 = |\, z_2\,| e^{i\phi_2}$:

   $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|\, z_1| e^{i\phi_1}}{|\, z_2| e^{i\phi_2}} = \frac{|\, z_1|}{|\, z_2|} e^{i\,(\phi_1 - \phi_2)}$$

   То есть, чтобы найти частное двух комплексных чисел, надо поделить их модули и отнять аргументы.

3) *Для возведения* комплексного числа $z = a + bi$ в целую степень n нужно:

- представить это число в показательной форме $z = |\, z\,| e^{i\phi}$;
- модуль возвести в степень, а аргумент увеличить в n раз: $z^n = (|\, z\,| e^{i\phi})^n = |\, z\,|^n e^{in\phi}$

4) *Для извлечения корня* n-ой степени из комплексного числа $z = a + bi$ нужно:

- представить это число в показательной форме $z = |z| e^{i\phi}$;
- использовать формулу: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{\frac{\phi + 2\pi k}{n} i}$, $k = 0, 1, 2 \ldots\ldots n-1$

Пример 5: Даны числа $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{4} i}$**,** $z_2 = 4e^{-\frac{\pi}{4} i}$

Найти: 1). $z_1 \cdot z_2$, 2). $\dfrac{z_1}{z_2}$, 3). z_2^6 , 4). $\sqrt[4]{z_1}$

Решение:

1) Воспользуемся формулой $z_1 \cdot z_2 = |z_1| e^{i\phi_1} \cdot |z_2| e^{i\phi_2} = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$, получим
$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 4 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} = 8e^0 = 8$.

2) Воспользуемся формулой $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1| e^{i\phi_1}}{|z_2| e^{i\phi_2}} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\phi_1 - \phi_2)}$, получим $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{2}{4} e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \dfrac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}}$.

3) Воспользуемся формулой $z^n = |z|^n e^{in\phi}$, получим $z_2^6 = 4^6 e^{i \cdot 6 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right)} = 4096 e^{-\frac{3\pi}{2} i}$.

4) Воспользуемся формулой $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{\frac{\phi + 2\pi k}{n} i}$, получим $\sqrt[4]{z_1} = \sqrt[4]{2} e^{\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{4} i} = \sqrt[4]{2} e^{\left(\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{2}\right) i}$.

При $k = 0$, $\sqrt[4]{z_1} = \sqrt[4]{2} e^{\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 0}{4} i} = \sqrt[4]{2} e^{\frac{\pi}{16} i}$;

$k = 1$, $\sqrt[4]{z_1} = \sqrt[4]{2} e^{\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 1}{4} i} = \sqrt[4]{2} e^{\frac{9\pi}{16} i}$;

$k = 2$, $\sqrt[4]{z_1} = \sqrt[4]{2} e^{\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi \cdot 2}{4} i} = \sqrt[4]{2} e^{\frac{17\pi}{16} i}$.

1 вариант.

Задание 1. Представить в алгебраической форме число $z = -\sqrt{2} \cdot (\cos\dfrac{\pi}{4} + i \sin\dfrac{\pi}{4})$.

Задание 2. Представить в тригонометрической форме число $z = 3 + 2i$.

Задание 3. Дано: $z_1 = 3 \cdot (\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$, $z_2 = 2 \cdot (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$.

Найти: 1). $z_1 \cdot z_2$, 2). $\dfrac{z_1}{z_2}$, 3). z_1^4 , 4). $\sqrt[3]{z_2}$

Задание 4. Записать комплексное число $z = 4 - 3i$ в показательной форме.

Задание 5. Даны числа $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$, $z_2 = 4e^{-\frac{\pi}{3}i}$

Найти: 1). $z_1 \cdot z_2$, 2). $\dfrac{z_1}{z_2}$, 3). z_2^7, 4). $\sqrt[5]{z_1}$

2 вариант.

Задание 1. Представить в алгебраической форме число $z = \sqrt{3} \cdot (\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3})$.

Задание 2. Представить в тригонометрической форме число $z = 4i$.

Задание 3. Дано: $z_1 = 2 \cdot (\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ)$, $z_2 = 4 \cdot (\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)$.

Найти: 1). $z_1 \cdot z_2$, 2). $\dfrac{z_1}{z_2}$, 3). z_2^3, 4). $\sqrt[3]{z_1}$

Задание 4. Записать комплексное число $z = 2 + 4i$ в показательной форме.

Задание 5. Даны числа $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$, $z_2 = 4e^{-\frac{\pi}{6}i}$

Найти: 1). $z_1 \cdot z_2$, 2). $\dfrac{z_1}{z_2}$, 3). z_1^6, 4). $\sqrt[4]{z_2}$

3 вариант.

Задание 1. Представить в алгебраической форме число $z = \sqrt{3} \cdot (\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6})$.

Задание 2. Представить в тригонометрической форме число $z = 3 - 2i$.

Задание 3. Дано: $z_1 = 3 \cdot (\cos 130^\circ + i\sin 130^\circ)$, $z_2 = 4 \cdot (\cos 110^\circ + i\sin 110^\circ)$.

Найти: 1). $z_1 \cdot z_2$, 2). $\dfrac{z_1}{z_2}$, 3). z_1^3, 4). $\sqrt[4]{z_2}$

Задание 4. Записать комплексное число $z = 1 - 4i$ в показательной форме.

Задание 5. Даны числа $z_1 = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$, $z_2 = 4e^{-\frac{\pi}{2}i}$

Найти: 1). $z_1 \cdot z_2$, 2). $\dfrac{z_1}{z_2}$, 3). z_2^8, 4). $\sqrt[5]{z_2}$

4 вариант.

Задание 1. Представить в алгебраической форме число $z = \sqrt{5} \cdot (\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2})$.

Задание 2. Представить в тригонометрической форме число $z = 1 + i$.

Задание 3. Дано: $z_1 = 3 \cdot (\cos 230^\circ + i\sin 230^\circ)$, $z_2 = 3 \cdot (\cos 40^\circ + i\sin 40^\circ)$.

Найти: 1). $z_1 \cdot z_2$, 2). $\frac{z_1}{z_2}$, 3). z_1^4 , 4). $\sqrt[3]{z_2}$

Задание 4. Записать комплексное число $z = 3 + 4i$ в показательной форме.

Задание 5. Даны числа $z_1 = 2e^{\frac{3\pi}{4}i}$ **,** $z_2 = 4e^{-\frac{3\pi}{4}i}$

Найти: 1). $z_1 \cdot z_2$, 2). $\frac{z_1}{z_2}$, 3). z_1^6 , 4). $\sqrt[4]{z_2}$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 9

«Элементы комбинаторики и теории вероятностей»

Цель: научиться решать задачи по комбинаторике, на классическое определение вероятности и теорем сложения и умножения вероятностей.

Теория.

1. Задачи, в которых производится подсчет всех возможных различных комбинаций, составленных из конечного числа элементов по некоторому правилу называются *комбинаторными.* Раздел математики, занимающийся их решением, называется комбинаторикой.

Размещением из n элементов по m называется любой упорядоченный набор из m различных элементов, выбранных из совокупности в n элементов. Число всевозможных размещений из n элементов по m в каждом равно $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Например: Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различные и нечетные?
Решение: т.к. нечетных цифр пять, а именно 1, 3, 5, 7, 9, то эта задача сводится к выбору и размещению на две разные позиции двух из пяти различных цифр, т.е. указанных чисел будет:
$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 4\cdot 5 = 20$. Ответ 20 двузначных чисел.

Перестановка – размещение из n элементов по n. Число перестановок из n элементов равно $P = n!$

Например: Составьте всевозможные перестановки из элементов множества А = $\{a, b, c, h\}$.
Решение: число элементов множества $n = 4$. Составим перестановку $P = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$. Ответ: 24 перестановки.

Сочетание - подмножество из m элементов множества n элементов, порядок которых не играет роли. Число сочетаний их n элементов по m в каждом равно $C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$.

Например: Сколькими способами читатель может выбрать две книжки из шести имеющихся? Решение: Число способов равно числу сочетаний из шести книжек по две, т.е. $m = 2$, $n = 6$. Тогда $C_6^2 = \frac{6!}{2!\cdot(6-2)!} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{(1\cdot 2)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)} = 15$. Ответ: 15 способами.

2. Основными понятиями в теории вероятностей являются понятия *события* и *вероятности события*. Под *событием* понимается такой результат эксперимента или наблюдения, который при реализации данного комплекса условий может произойти или не произойти. Обозначается событие большими буквами латинского алфавита А, В, С и т. д. если событие неизбежно произойдет при каждой реализации комплекса условий, то оно называется *достоверным*; если

же оно не может произойти, то *невозможным.* Если событие при реализации комплекса условий может произойти, а может не произойти, то оно называется *случайным.*

Вероятностью события А называют отношение числа m исходов, благоприятствующих этому событию, к числу n всех равновозможных исходов, т. е. $P = \frac{m}{n}$.

Например: В ящике 15 шаров: 5 белых и 10 черных. Какова вероятность вынуть из ящика белый шар?

Решение: число всех шаров n = 15, число белых шаров m = 5. Тогда вероятность вынуть белый шар $P = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \approx 0,33$. Ответ: Р = 0,33 .

Например: В корзине 10 яблок: 6 красных и 4 желтых. Вынули два яблока. Какова вероятность того, что оба яблока красные?

Решение: число всех случаев – взять 2 яблока из 10 : $n = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!\cdot(10-2)!} = 45$. Число благоприятствующих случаев взять 2 яблока из 6 красных: $m = C_6^2 = \frac{6!}{2!\cdot(6-2)!} = 15$. Тогда вероятность достать 2 красных яблока $P = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.

Контрольные вопросы:

1. Что изучает комбинаторика?
2. Перечислите основные виды комбинаций.
3. Что называется перестановкой, размещением, сочетанием? Запишите их формулы.
4. Дайте классическое определение вероятности.
5. Какие события называются достоверным? невозможным? случайным?

1 вариант

Задание № 1. Решите задачи по комбинаторике:

1. В ящике 20 фруктов: 15 яблок и 5 груш. Какова вероятность вынуть из ящика апельсин?
2. Из пункта А в пункт В ведут 5 дорог. Колонну автомашин необходимо разделить и направить по трём дорогам из имеющихся пяти. Сколькими способами это можно сделать?
3. В местные органы самоуправления выбрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, заместителя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?
4. Вычислите C_{15}^{12}.

Задание № 2. Решите задачи по теории вероятностей.

1. В читальном зале имеется 6 учебников по теории вероятностей, из которых 3 в переплёте. Библиотекарь на удачу взял 2 учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в переплёте.
2. В ящике 10 деталей, среди которых 6 окрашенных. Из ящика извлекли 2 детали. Найти вероятность того, что все извлечённые детали окажутся окрашенными?
3. Произведя 100 выстрелов, стрелок попал в цель 86 раз. Найти вероятность попадания в цель данного стрелка.
4. В лотерее 100 билетов. Из них 50 выигрышных и 50 – невыигрышных. Куплено 2 билета. Какова вероятность того , что оба билета выигрышные?

2 вариант

Задание № 1. Решите задачи по комбинаторике:

1. Сколькими способами можно составить трёхцветный полосатый флаг, если имеется материал пяти цветов?

2. Сколькими способами можно распределить 12 классных комнат под 12 учебных кабинетов?
3. Из спортивного клуба, насчитывающего 15 членов, необходимо составить команду из 4 человек для участия в беге на 1000 м. Сколькими способами можно это сделать?
4. Вычислите C_{16}^{14}.

Задание № 2. Решите задачи по теории вероятностей.

1. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень первого стрелка – 0,7, а второго – 0,8. Найти вероятность того, что один из стрелков попадёт в мишень.
2. Среди 100 лотерейных билетов 5 выигрышных. Найти вероятность того, что2 выбранных билета будут выигрышными.
3. Студент знает 20 вопросов из 25. Найти вероятность того, что студент знает 2 предложенных ему экзаменатором вопроса.
4. В группе 25 студентов, среди которых 8 отличников. Найти вероятность того, что среди 6 отобранных студентов все отличники.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 10

По теме: «Случайная величина и её функция распределения».

Цель: научиться вычислять математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение, графически изображать функцию распределения.

Теория.

Случайные величины. Функция распределения и плотность распределения случайной величины.

Величина называется *случайной*, если в результате испытания она принимает одно заранее неизвестное значение из некоторого числового множества. Случайная величина называется *дискретной*, если она принимает значения из некоторого фиксированного конечного или счетного множества.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между её возможными значениями и их вероятностями. Закон распределения задается аналитически, графически или таблично.

Функцией распределения случайной величины X называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение меньшее x, т.е. $F(x) = P(\ X \rangle\ x\ )$.

Свойства функции распределения:

1. Значения функции распределения $F(x)$ принадлежат отрезку $\left[\,0;1\,\right]$; $0 \le F(x) \le 1$.
2. $F(x)$ - неубывающая функция, т.е. $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2\ \rangle\ x_1$.
3. Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $\left(\,a\,;b\,\right)$, то $F(x)= 0$ при $x \le a$ и $F(x)= 1$ при $x \ge b$.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины называют первую производную $f(x)$ от функции распределения $F(x)$: $f(x) = F'(x)$.

Если известна функция плотности распределения $f(x)$, то функция распределения $F(x)$ находится по формуле: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Свойства плотности распределения:

1. $f(x)$ является неотрицательной функцией: $f(x) \ge 0$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины.

Математическим ожиданием M(X) дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех её возможных значений на их вероятности: для дискретной случайной величины X, принимающей значения $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ с вероятностями соответственно $p_1, p_2, p_3, ...p_n$, имеем:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_n \cdot p_n .$$

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины называется величина

$$M(x) = \int_a^b x \cdot f(x) dx .$$

Дисперсией $D(x)$ *дискретной* случайной величины X называют величину, равную

$$D(x) = M(X^2) - \left(M(X) \right)^2.$$

Дисперсией $D(x)$ *непрерывной* случайной величины называется величина

$$D(x) = \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx - \left[M(X) \right]^2 .$$

Средним квадратичным отклонением называется квадратный корень из дисперсии: $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$.

Пример 1: по заданному закону распределения дискретной случайной величины X найти её: 1) математическое ожидание; 2) дисперсию; 3) среднее квадратичное отклонение; 4) привести графическое изображение функции распределения.

X	17	21	29	31	35
p	0,4	0,1	0,2	0,1	0,2

Решение:

1) математическое ожидание: $M(X) = 17 \cdot 0{,}4 + 21 \cdot 0{,}1 + 29 \cdot 0{,}2 + 31 \cdot 0{,}1 + 35 \cdot 0{,}2 = 24{,}8$.

2) дисперсия: $D(x) = M(X^2) - \left(M(X) \right)^2$

Закон распределения случайной величины X^2:

X	17^2=289	21^2=441	29^2=841	31^2=961	35^2=1225
p	0,4	0,1	0,2	0,1	0,2

Тогда $M(X^2) = 289 \cdot 0{,}4 + 441 \cdot 0{,}1 + 841 \cdot 0{,}2 + 961 \cdot 0{,}1 + 1225 \cdot 0{,}2 = 773{,}1$.

$$\left(M(X) \right)^2 = 24{,}8^2 = 615{,}4$$

$$D(X) = 773{,}1 - 615{,}4 = 98{,}06 .$$

3) среднее квадратичное отклонение: $\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{98{,}06} \approx 9{,}9$.

4) учитывая закон распределения случайной величины X имеем:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \le 7 \\ 0{,}4, & 17 \langle x \le 21 \\ 0{,}5, & 21 \langle x \le 29 \\ 0{,}7, & 29 \langle x \le 31 \\ 0{,}8, & 31 \langle x \le 35 \\ 1, & 35 \langle x \end{cases}$$

Пример 2: Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = c(4x^2 + 2x)$ в интервале $(0;1)$. Найти: 1) параметр c; 2) функцию распределения $F(x)$ случайной величины X; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию.

Решение: 1) плотность распределения должна удовлетворять условию: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{0}^{1} c(4x^2 + 2x)dx = c\int\limits_{0}^{1}(4x^2 + 2x)dx = c\left(4\cdot\frac{x^3}{3} + 2\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = c\left(4\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{2}\right) =$$

$$= c\left(\frac{4}{3} + 1\right) = \frac{7}{3}c = 1$$

Отсюда находим $c = 1 : \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{3}{7}$.

2) функцию распределения $F(x)$ находим по формуле

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0\,, & x \le 0 \\ \frac{3}{7}\left(4\cdot\frac{x^3}{3} + 2\cdot\frac{x^2}{2}\right) = \frac{4}{7}x^3 + \frac{3}{7}x^2\,, & 0 \langle\, x \le 1 \\ 1\,, & 1 \langle\, x \end{cases}$$

3) математическое ожидание находим по формуле $M(x) = \int\limits_{a}^{b} x \cdot f(x)dx$.

$$M(x) = \int\limits_{0}^{1} x\cdot\frac{3}{7}(4x^2 + 2x)dx = \frac{3}{7}\int\limits_{0}^{1}\left(4x^3 + 2x^2\right)dx = \frac{3}{7}\left(4\cdot\frac{x^4}{4} + 2\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{7}\left(1 + 2\cdot\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{7}\cdot\frac{5}{3} = \frac{5}{7}.$$

4) дисперсию находим по формуле $D(x) = \int\limits_{a}^{b} x^2 \cdot f(x)dx - [\,M(X)\,]^2$.

$$D(x) = \int\limits_{0}^{1} x^2\cdot\frac{3}{7}(4x^2 + 2x)dx - [\,M(X)\,]^2 = \frac{3}{7}\int\limits_{0}^{1}(4x^4 + 2x^3)dx \; - \left[M\left(X^2\right)\right] =$$

$$\frac{3}{7}\left(4\cdot\frac{x^5}{5} + 2\cdot\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 - \left[M\left(X^2\right)\right] = \frac{3}{7}\left(\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{3}{7}\cdot\frac{13}{10} - \frac{25}{49} = \frac{39}{70} - \frac{25}{49} = \frac{273 - 250}{490} = \frac{23}{490}.$$

Контрольные вопросы:

1. Какая величина называется случайной?
2. Перечислите свойства функции распределения.
3. Что называется математическим ожиданием? Запишите формулу.
4. Что называется дисперсией? Запишите формулу.
5. Что называется средним квадратичным отклонением? Запишите формулу.

1 вариант

Задание №1.

По заданному закону распределения случайной величины X найти её математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение, привести графическое изображение функции распределения.

X	11	16	20	25	30
p	0,4	0,1	0,3	0,1	0,1

Задание №2.

Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = c(x^2 + 4x)$ в интервале (0;1), вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти параметр c; функцию распределения случайной величины X; математическое ожидание и дисперсию величины X.

2 вариант.

Задание №1.

По заданному закону распределения случайной величины X найти её математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение, привести графическое изображение функции распределения.

X	14	18	23	28	30
p	0,1	0,2	0,2	0,1	0,4

Задание №2.

Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = c(1{,}5x^2 + 2x)$ в интервале (0;1), вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти параметр c; функцию распределения случайной величины X; математическое ожидание и дисперсию величины X.

3 вариант.

Задание №1.

По заданному закону распределения случайной величины X найти её математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, привести графическое изображение функции распределения.

X	14	16	22	38	50
P	0,2	0,2	0,1	0,1	0,4

Задание №2.

Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = c(5x^2 + 2x)$ в интервале (0;1), вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти параметр c; функцию распределения случайной величины X; математическое ожидание и дисперсию величины X.

4 вариант.

Задание №1.

По заданному закону распределения случайной величины X найти её математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, привести графическое изображение функции распределения.

X	10	26	32	40	50
P	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3

Задание №2.

Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = c(3x^2 + 4x)$ в интервале (0;1), вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти параметр c; функцию распределения случайной величины X; математическое ожидание и дисперсию величины X.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 11.
По теме: «Множества и операции над ними».

Цель **:** научиться выполнять операции над множествами.

Теория.

Множество - одно из основных, неопределяемых понятий математики. Его синонимы – класс, совокупность, коллекция и т. д. Под множеством понимают совокупность объектов любой природы, обладающих общим свойством. Обозначается множество большими буквами латинского алфавита А, В, С и т. д. Множество считается данным, если о каждом его элементе можно сказать, является ли он элементом этого множества или нет.

Для обозначения *принадлежности* данного предмета множеству вводится символ $\in$ **,** например , если А – множество букв слова «*пух*», то $п \in$ А, $у \in$ А и $х \in$ А.

Для обозначения *непринадлежности* данного предмета множеству вводится символ $\bar{\in}$, например $к \bar{\in}$ А, $з \bar{\in}$ А и т. д.

Множество можно записать с помощью фигурных скобок, например $\{п\ ,\ у,\ х\}$; означает это то же множество, что и обозначенное буквой А, иначе А = $\{п\ ,\ у,\ х\}$.

Множества, содержащие одни и те же элементы, называются *равными*. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется странным или *пустым* (обозначается О).

Множество А называется *подмножеством* множества В, если каждый элемент множества А является так же элементом множества В. Например: если А = $\{a, b, c\}$ и В = $\{a, b, c, d\}$, то множество А есть подмножество множества В. Для обозначения понятия подмножества вводится символ $\subset$, в примере А$\subset$В.

<u>Операции над множествами:</u>

Пересечением двух множеств А и В называется новое множество, в которое входят те и только те элементы, которые принадлежат множеству А и множеству В. Для пересечения вводится символ $\cap$. Например, пересечением двух множеств А = $\{a, b, c, h\}$ и В = $\{a, b, c, d\}$, является множество С = $\{a, b, c\}$, т. е. А$\cap$В = С.

Объединением двух множеств А и В называется такое множество, в которое входят те и только те элементы, которые принадлежат множеству А или множеству В. Для пересечения вводится символ $\cup$. Например, пересечением двух множеств А = $\{a, b, c, h\}$ и В = $\{a, b, c, d\}$, является множество С = $\{a, b, c, d, h\}$, т. е. А $\cup$ В = С.

Разностью двух множеств А и В называется такое множество, элементы которого есть элементы множества А, не принадлежащие множеству В. Для разности вводится символ А \ В . Например, если А =$\{a, b, c, d\}$ и В = $\{a, c, e, f\}$, то А \ В = $\{e, f\}$.

Когда множество В есть подмножество множества А, разность А \ В называют *дополнением* множества В и обозначают так: $\bar{B}$, т. е. $\bar{B}$ = А \ В, если только В $\subset$ А. Например, если А = $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ и В = $\{1, 3, 4\}$, то $\bar{B}$ = $\{2, 5\}$.

Декартовым произведением множеств А и В называется множество, элементами которого являются упорядоченные пары, первая координата принадлежит множеству А, а вторая множеству В, и обозначается так: А $\times$В . Например, декартовым произведением множества А = $\{a, b\}$ и множества В = $\{c, d\}$ является множество А $\times$В = $\{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение множества.
2. Дайте определение пустого множества.
3. Дайте определение подмножества множеств.
4. Дайте определение пересечения множеств, его символ и графическое представление.
5. Дайте определение объединения множеств, его символ и графическое представление.
6. Дайте определение разности множеств, его символ и графическое представление.
7. Дайте определение дополнения множества и его символ.
8. Дайте определение декартово произведения множеств и его символ.

<u>**1 вариант.**</u>

Задание 1. Пусть А = $\{1, 3, 5\}$. Образуйте все возможные подмножества этого множества.

Задание 2. Даны множества А = $\{a, c, e, p\}$, В = $\{a, b, c, d, e, f, p\}$, С = $\{a, d, f, g\}$.

Выполните следующие операции:

1. А $\cup$ В.
2. А $\cup$ С.

3. C ∪ B.
4. A ∩ B.
5. A ∩C.
6. C ∩B.
7. A ∩ B ∪ C.
8. C ∪ B ∩ A.
9. A ∩B ∩C.
10. C \ B.
11. A \ C.
12. B \ C.
13. A × B.
14. C × B.
15. A × C.
16. B × C.

2 вариант.

Задание 1. Пусть А = $\{ a, b, c \}$. Образуйте все возможные подмножества этого множества.
Задание 2. Даны множества А = $\{1, 2, 3, 4 \}$, В = $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 \}$, С = $\{1, 4, 7, 9 \}$. Выполните следующие операции:
1. A ∪ B.
2. A ∪ C.
3. C ∪ B.
4. A ∩ B.
5. A ∩ C.
6. C ∩ B.
7. A ∩ B ∪C.
8. C ∪ B ∩ A.
9. A ∩ B ∩C.
10. C \ B.
11. A \ C.
12. B \ C.
13. A × B.
14. C × B.
15. A × C.
16. B × C.

3 вариант.

Задание 1. Пусть А = $\{1, b, 2 \}$. Образуйте все возможные подмножества этого множества.
Задание 2. Даны множества А = $\{ a, b, c, d \}$, В = $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 \}$, С = $\{1, 2, 3, 4 \}$. Выполните следующие операции:
1. A ∪ B.
2. A ∪ C.
3. C ∪ B.
4. A ∩ B.
5. A ∩ C.
6. C ∩ B.
7. A ∩ B ∪C.
8. C ∪ B ∩ A.
9. A ∩ B ∩C.
10. C \ B.
11. A \ C.

12. $B \setminus C$.
13. $A \times B$.
14. $C \times B$.
15. $A \times C$.
16. $B \times C$.

4 вариант.

Задание 1. Пусть $A = \{2, 4, 6\}$. Образуйте все возможные подмножества этого множества.
Задание 2. Даны множества $A = \{a, c, e, p\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{a, b, c, d\}$. Выполните следующие операции:
1. $A \cup B$.
2. $A \cup C$.
3. $C \cup B$.
4. $A \cap B$.
5. $A \cap C$.
6. $C \cap B$.
7. $A \cap B \cup C$.
8. $C \cup B \cap A$.
9. $A \cap B \cap C$.
10. $C \setminus B$.
11. $A \setminus C$.
12. $B \setminus C$.
13. $A \times B$.
14. $C \times B$.
15. $A \times C$.
16. $B \times C$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 12.

По теме: «Элементы теории графов».

Цель: научиться находить кратчайшее расстояние между узлами графа с помощью алгоритма Дейкстры.

Теория.
Слово «граф» в математике означает картинку, где нарисовано несколько точек, некоторые из которых соединены линиями. Прежде всего, стоит сказать о том, что графы, о которых пойдет речь, к аристократам былых времен никакого отношения не имеют. Наши «графы» имеют корнем греческое слово «графо», что значит «пишу». Тот же корень в словах «график», «биография». В математике ***определение графа*** дается так: графом называется конечное множество точек, некоторые из которых соединены линиями. Точки называются вершинами графа, а соединяющие линии – рёбрами.
Схема графа, состоящая из «изолированных» вершин, называется ***нулевым графом. (рис.2)***
Графы, в которых не построены все возможные ребра, называются ***неполными графами. (рис.3)***
Графы, в которых построены все возможные ребра, называются ***полными графами. (рис.4)***

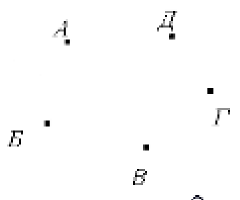


рис. 2

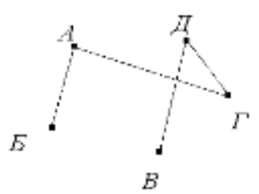


рис.3

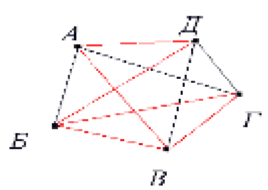
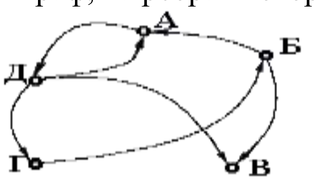


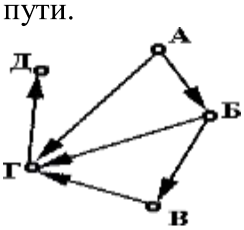
рис. 4

Граф, каждая вершина которого соединена с ребром любой другой вершины, называется ***полным.***

Граф называется ***связным,*** если любые две его вершины могут быть соединены путем, т. е. последовательностью ребер, каждое следующее из которых начинается в конце предыдущего.
Граф называется ***несвязным,*** если это условие не выполняется.
Граф, который можно нарисовать так, чтобы его рёбра не пересекались нигде, кроме вершин, называются ***плоским*** или *планарным.*
Существуют значительные классы практических задач, которые решить с помощью ранее рассмотренных типов графов невозможно.
Так, например, схема дорог и площадей города изображается с помощью
плоского графа. Но если нужно этой схемой воспользоваться с целью проезда по городу на автомашине, а движение на отдельных (или на всех) улицах одностороннее?
Граф, на рёбрах которого расставлены стрелки, называется ***ориентированным.***



Путем, в ориентированном графе от вершины A_1 к вершине A_n называется последовательность ориентированных ребер
Ориентированным циклом называется замкнутый путь в ориентированном графе. На предыдущем рисунке приведены примеры ориентированных циклов в последних двух графах. Цикл, как и любой другой путь в графе, имеет длину, которая определяется числом ребер в этом пути.

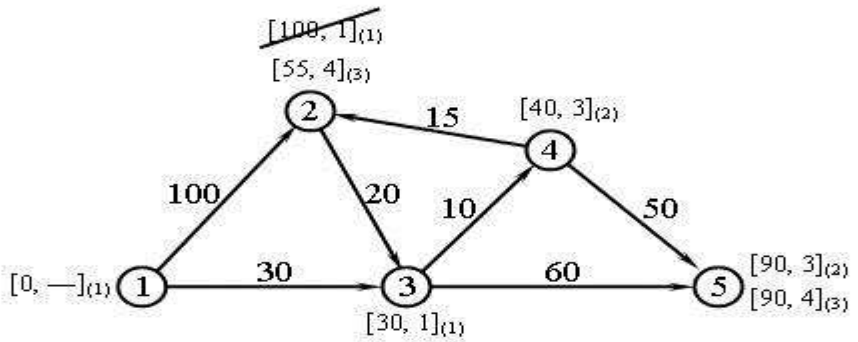


Так, на рисунке показаны пути от А к Д могут быть различны и иметь различную длину. Первый путь имеет длину 2, второй - 3, а третий — 4.
Длина «кратчайшего пути» между двумя вершинами называется ***расстоянием между ними***.
Зада́ча о кратча́йшем пути́ (англ. *shortest path problem*) — задача поиска самого короткого пути (цепи) между двумя точками (вершинами) на графе, в которой минимизируется сумма весов ребер, составляющих путь.
Задача о кратчайшем пути является одной из важнейших классических задач теории графов. Значимость данной задачи определяется ее различными практическими применениями[⇨]. Например в GPS-навигаторах, где осуществляется поиск кратчайшего пути между двумя перекрестками. В качестве вершин выступают перекрестки, а дороги являются ребрами, которые лежат между ними. Сумма расстояний всех дорог между перекрестками должна быть минимальной, тогда найден самый короткий путь.
Существуют различные постановки задачи о кратчайшем пути:
Задача о кратчайшем пути в заданный пункт назначения. Требуется найти кратчайший путь в заданную вершину назначения t, который начинается в каждой из вершин графа (кроме t). Поменяв направление каждого принадлежащего графу ребра, эту задачу можно свести к задаче о единой исходной вершине (в которой осуществляется поиск кратчайшего пути из заданной вершины во все остальные).
Задача о кратчайшем пути между заданной парой вершин. Требуется найти кратчайший путь из заданной вершины u в заданную вершину v.
Задача о кратчайшем пути между всеми парами вершин. Требуется найти кратчайший путь из каждой вершины u в каждую вершину v. Эту задачу тоже можно решить с помощью алгоритма, предназначенного для решения задачи об одной исходной вершине, однако обычно она решается быстрее.
В различных постановках задачи, роль длины ребра могут играть не только сами длины, но и время, стоимость, расходы, объем затрачиваемых ресурсов (материальных, финансовых, топливно-энергетических и т. п.) или другие характеристики, связанные с прохождением каждого

ребра. Таким образом, задача находит практическое применение в большом количестве областей (информатика, экономика, география и др.).
Алгоритм Дейкстры разработан для нахождения кратчайшего пути между заданным исходным узлом и любым другим узлом сети.
В процессе выполнения этого алгоритма при переходе от узла i к следующему узлу j используется специальная процедура пометки ребер. Обозначим через u_i кратчайшее расстояние от исходного узла 1 до узла i, через d_{ij} - длину ребра (i, j). Тогда для узла j определим метку $[u_j, i]$ следующим образом:
$[u_j, i]$ = [ui + dij, i], dij >= 0
Метки узлов в алгоритме Дейкстры могут быть двух типов: временные и постоянные. Временная метка впоследствии может быть заменена на другую временную, если будет найден более короткий путь к данному узлу. Когда же станет очевидным, что не существует более короткого пути от исходного узла к данному, статус временной метки изменяется на постоянный
Вычислительная схема алгоритма состоит из следующих шагов.
Шаг 0. Исходному узлу (узел 1) присваивается метка [0, -]. Полагаем i = 1.
Шаг i. a) Вычисляются временные метки $[u_i + d_{ij}, i]$ для всех узлов j, которые можно достичь непосредственно из узла i и которые не имеют постоянных меток. Если узел j уже имеет метку $[u_j, k]$, полученную от другого узла k, и если $u_i + d_{ij} < u_j$, тогда метка $[u_j, k]$ заменяется на
$[u_i + d_{ij}, i]$.
b) Если все узлы имеют постоянные метки, процесс вычислений заканчивается. В противном случае выбирается метка $[u_r, s]$ с наименьшим значением расстояния u_r среди всех временных меток (если таких меток несколько, то выбор произволен). Полагаем i = r и повторяем шаг i.
Пример 1. Построить граф, заданный следующей таблицей и найти кратчайшее расстояние от первой вершины до всех остальных вершин.

1; 2	1; 3	2; 3	3; 4	3; 5	4; 2	4; 5
100	30	20	10	60	15	50

Решение:



шаг 0. Назначаем узлу 1 постоянную метку [0, -].
Шаг 1. Из узла 1 можно достичь узлов 2 и 3. Вычисляем метки для этих узлов, в результате получаем следующую таблицу меток:
1 [0, -] Постоянная
2 [0 + 100, 1] = [100, 1] Временная
3 [0 + 30, 1] = [30, 1] <-Временная
Среди узлов 2 и 3 узел 3 имеет наименьшее значение расстояния (u_3 = 30). Поэтому статус метки этого узла изменяется на "постоянная".
Шаг 2. Из узла 3 (последнего узла с постоянной меткой) можно попасть в узлы 4 и 5. Получаем следующий список узлов:
1 [0, -] Постоянная
2 [100, 1] Временная
3 [30, 1] Постоянная
4 [30 + 10, 3] = [40, 3] <-Временная
5 [30 + 60, 3] = [90, 3] Временная
Временный статус метки [40, 3] узла 4 заменяется на постоянный (u_4 = 40).

Шаг 3. Из узла 4 можно достичь узлов 2 и 5. После вычисления меток получим следующий их список:
1 [0, -] Постоянная
2 [40 + 15, 4] = [55, 4] <-Временная
3 [30, 1] Постоянная
4 [40, 3] Постоянная
5 [90, 3] или [40 + 50, 4] = [90, 4] Временная

Временная метка [100, 1], полученная узлом 2 на втором шаге, изменена на [55, 4]. Это указывает на то, что найден более короткий путь к этому узлу (проходящий через узел 4). На третьем шаге узел 5 получает две метки с одинаковым значением расстояния $u_5 = 90$.

Шаг 4. Из узла 2 можно перейти только в узел 3, но он уже имеет постоянную метку, которую нельзя изменить. Поэтому на данном шаге получаем такой же список меток, как и на предыдущем шаге, но с единственным изменением: метка узла 2 получает статус постоянной. С временной меткой остается только узел 5, но так как из этого узла нельзя попасть ни в какой другой, процесс вычислений заканчивается.

Контрольные вопросы:
1. Что называется графом?
2. Какой граф называется нулевым?
3. Какой граф называется полным?
4. Какой граф называется связным, несвязным?
5. Какой граф называется плоским?
6. Какой граф называется ориентированным?
7. Что называется ориентированным циклом?

1 вариант.

Построить граф, заданный следующей таблицей и найти кратчайшее расстояние от первой вершины до всех остальных вершин.

1.

0,1	0,2	0,3	1,4	1,6	2,4	2,5	3,5	3,6	4,7	4,8	5,4	5,8	6,8	7,8
10	11	20	8	7	10	12	14	13	11	9	14	17	4	12

2.

0,1	0,2	0,3	1,4	1,6	2,4	2,5	3,5	3,6	4,7	4,8	5,4	5,8	6,8	7,8
11	12	16	4	17	7	9	14	11	9	21	22	8	11	13

3.

0,1	0,2	0,3	1,4	1,5	2,4	2,5	2,6	3,6	4,7	4,8	5,7	5,8	6,8	7,8
12	14	18	12	11	6	21	15	19	23	16	15	12	11	8

4.

0,1	0,2	0,3	1,4	1,5	2,4	2,5	2,6	3,6	4,7	4,8	5,7	5,8	6,8	7,8
17	14	11	12	8	7	12	14	13	9	14	20	17	21	10

2 вариант.

Построить граф, заданный следующей таблицей и найти кратчайшее расстояние от первой вершины до всех остальных вершин.

1.

0,1	0,2	0,3	1,4	1,6	2,4	2,5	3,5	3,6	4,7	4,8	5,4	5,8	6,8	7,8
20	6	17	12	11	8	13	9	11	21	18	16	14	9	8

2.

0,1	0,2	0,3	1,4	1,6	2,4	2,5	3,5	3,6	4,7	4,8	5,4	5,8	6,8	7,8
16	15	14	13	11	15	9	7	18	23	11	7	18	12	11

3.

0,1	0,2	0,3	1,4	1,5	2,4	2,5	2,6	3,6	4,7	4,8	5,7	5,8	6,8	7,8

10	12	4	9	11	13	7	12	14	18	21	23	16	11	15

4.

0,1	0,2	0,3	1,4	1,5	2,4	2,5	2,6	3,6	4,7	4,8	5,7	5,8	6,8	7,8
27	19	18	12	16	23	21	16	18	13	10	8	11	19	20

3 вариант.

Построить граф, заданный следующей таблицей и найти кратчайшее расстояние от первой вершины до всех остальных вершин.

1.

0,1	0,2	0,3	1,4	1,6	2,4	2,5	3,5	3,6	4,7	4,8	5,4	5,8	6,8	7,8
10	7	18	21	17	25	9	14	32	16	24	7	13	15	23

2.

0,1	0,2	0,3	1,4	1,6	2,4	2,5	3,5	3,6	4,7	4,8	5,4	5,8	6,8	7,8
11	8	3	15	7	21	24	32	16	18	9	12	14	19	25

3.

0,1	0,2	0,3	1,4	1,5	2,4	2,5	2,6	3,6	4,7	4,8	5,7	5,8	6,8	7,8
10	11	20	8	7	10	12	14	13	11	9	14	17	4	12

4.

0,1	0,2	0,3	1,4	1,5	2,4	2,5	2,6	3,6	4,7	4,8	5,7	5,8	6,8	7,8
11	12	16	4	17	7	9	14	11	9	21	22	8	11	13

4 вариант.

Построить граф, заданный следующей таблицей и найти кратчайшее расстояние от первой вершины до всех остальных вершин.

1.

0,1	0,2	0,3	1,4	1,6	2,4	2,5	3,5	3,6	4,7	4,8	5,4	5,8	6,8	7,8
27	19	18	12	16	23	21	16	18	13	10	8	11	19	20

2.

0,1	0,2	0,3	1,4	1,6	2,4	2,5	3,5	3,6	4,7	4,8	5,4	5,8	6,8	7,8
10	12	4	9	11	13	7	12	14	18	21	23	16	11	15

3.

0,1	0,2	0,3	1,4	1,5	2,4	2,5	2,6	3,6	4,7	4,8	5,7	5,8	6,8	7,8
16	15	14	13	11	15	9	7	18	23	11	7	18	12	11

4.

0,1	0,2	0,3	1,4	1,5	2,4	2,5	2,6	3,6	4,7	4,8	5,7	5,8	6,8	7,8
20	6	17	12	11	8	13	9	11	21	18	16	14	9	8

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 13

Тема: «Матрицы. Действия над матрицами.»

Цель: научиться складывать, умножать на число и перемножать матрицы.

Теория.
Матрицы. Действия над матрицами.

Матрицей размером m×n называется совокупность m·n чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов. Эту таблицу обычно заключают в круглые скобки. Для краткости матрицу можно обозначать одной заглавной буквой, например, А или В.В общем виде матрицу размером m×n записывают так: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Числа, составляющие матрицу, называются *элементами матрицы.* Элементы матрицы удобно снабжать двумя индексами aij: первый указывает номер строки, а второй – номер столбца. Например, a_{23} – элемент стоит во 2-ой строке, 3-м столбце. Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной,* причём число ее строк или столбцов называется порядком матрицы.

Пример 1: Пусть даны матрицы $\underset{2\times3}{\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \pi & 1 \end{pmatrix}}$; $\underset{3\times3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & \sqrt{2} & 0 \\ 1{,}5 & 3 & -1 \end{pmatrix}}$; $\underset{3\times1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$; $\underset{1\times1}{\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}}$, тогда квадратными являются вторая матрица – её порядок равен 3, и четвёртая матрица – её порядок 1. Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется *прямоугольной.* В примере это первая матрица и третья.

Сложение матриц. Пусть матрицы А и В состоят из одинакового числа строк и одинакового числа столбцов, т.е. имеют одинаковые размеры. Тогда для того, чтобы сложить матрицы А и В нужно к элементам матрицы А прибавить элементы матрицы В, стоящие на тех же местах. Таким образом, суммой двух матриц А и В называется матрица С, которая определяется по правилу:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}.$$

Пример 2: Найти сумму матриц: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2 & 2+3 \\ 2+4 & 4+0 \\ 3+1 & 5+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$.

Умножение матрицы на число. Для того чтобы умножить матрицу А на число k нужно каждый элемент матрицы А умножить на это число. Таким образом, произведение матрицы А на число k:

$$kA=k\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \\ ka_{31} & ka_{32} \end{pmatrix}.$$

Пример3: $-2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 2 & -4 & -8 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$

Пример 4: Найти 2А-В, если $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение: $2A-B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 5 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$

Умножение матриц. Эта операция осуществляется по своеобразному закону. Прежде всего, заметим, что размеры матриц–сомножителей должны быть согласованы. Перемножать можно только те матрицы, у которых число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы (т.е. длина строки первой равна высоте столбца второй). Произведением матрицы A не матрицу B называется новая матрица C=AB, элементы которой составляются следующим образом: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} & a_{11}\cdot b_{13} + a_{12}\cdot b_{23} \\ a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} & a_{21}\cdot b_{13} + a_{22}\cdot b_{23} \end{pmatrix}.$$

Пример 5: Найти произведение матриц:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 4\cdot 6 + 0\cdot 7 & 2\cdot 2 + 4\cdot 1 + 0\cdot 8 \\ 3\cdot 1 + 5\cdot 6 + 1\cdot 7 & 3\cdot 2 + 5\cdot 1 + 1\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 8 \\ 40 & 19 \end{pmatrix}.$$

Контрольные вопросы:

1. Что называется матрицей?
2. Какие матрицы называются квадратными? треугольными?
3. Что называется суммой матриц?
4. Что называется произведением матрицы на число?
5. Как найти произведение двух матриц?
6. В чём состоит обязательное условие существования произведения матриц?

<u>1 вариант.</u>

Задание № 1. Даны матрицы A и B. Выполните действия: а) 6A; б) -2B; в) 3A + 4B.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 3 \\ 8 & 7 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Задание № 2. Даны матрицы A, B и C. Выполните действия: а) AB; б). (AC) – B; в) (CB) + 3A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

<u>2 вариант.</u>

Задание № 1. Даны матрицы A и B. Выполните действия: а) 6A; б) -2B; в) 3A + 4B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 8 \\ 3 & 10 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Задание № 2. Даны матрицы A, B и C. Выполните действия: а) AB; б). (AC) – B; в) (CB) + 3A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

3 вариант.

Задание № 1. Даны матрицы А и В. Выполните действия: а) 6А; б) -2В; в) 3А + 4В.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 6 & 3 & 3 \\ 8 & 7 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 7 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \\ 8 & -10 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задание № 2. Даны матрицы А, В и С. Выполните действия: а) АВ; б). (АС) – В; в) (СВ) + 3А.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \\ -6 & 9 & 7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

4 вариант.

Задание № 1. Даны матрицы А и В. Выполните действия: а) 6А; б) -2В; в) 3А + 4В.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание № 2. Даны матрицы А, В и С. Выполните действия: а) АВ; б). (АС) – В; в) (СВ) + 3А.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 14

Тема: «Определитель матрицы. Миноры и алгебраические дополнения.»

Цель: научиться вычислять: определители 2-го и 3-го порядков; миноры и алгебраические дополнения.

Теория.

Определитель матрицы.

Пусть дана матрица второго порядка – квадратная матрица, состоящая из двух строк и двух столбцов: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Определителем второго порядка, соответствующим данной матрице, называется число, получаемое следующим образом: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определитель обозначается символом $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Пример 1: Вычислить определители второго порядка.

Решение: $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 15 = -23$.

Определителем третьего порядка, соответствующим данной квадратной матрице третьего порядка, называется число, обозначаемое $|A|$ и получаемое следующим образом:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Пример 2: Вычислить определитель третьего порядка.

Решение: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 3\cdot(-1) - 4\cdot 2 = 3.$

Минором M_{ij} к элементу a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$ -го порядка, полученный из исходного вычеркиванием i -той строки и j - того столбца.

Пример 3: Найти минор M_{23} к элементу определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение: Вычеркиваем в заданном определителе вторую строку и третий столбец:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$, тогда $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot 8 - 2\cdot 7 = 8 - 14 = -6$.

Алгебраическим дополнением A_{ij} к элементу a_{ij} определителя n -го порядка называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$.

Пример 4: Найти алгебраическое дополнение A_{23} к элементу a_{23} определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение: $A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -(-6) = 6.$

Контрольные вопросы:

1. Что называется определителем 2-го порядка? 3-го порядка?
2. Изобразите правило Сарруса для вычисления определителя 3-го порядка.
3. Что называется минором?
4. Что называется алгебраическим дополнением?

<u>1 вариант.</u>

Задание № 1. Вычислите определитель матрицы: $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$.

Задание № 2. Вычислите миноры и алгебраические дополнения матрицы: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>2 вариант.</u>

Задание № 1. Вычислите определитель матрицы: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 8 \\ 3 & 10 & 8 \end{vmatrix}$.

Задание № 2. Вычислите миноры и алгебраические дополнения матрицы: $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

<u>3 вариант.</u>

Задание № 1. Вычислите определитель матрицы: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

Задание № 2. Вычислите миноры и алгебраические дополнения матрицы: В = $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

<u>4 вариант.</u>

Задание № 1. Вычислите определитель матрицы: $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & 6 \\ 7 & 8 & -1 \end{vmatrix}$.

Задание № 2. Вычислите миноры и алгебраические дополнения матрицы: В = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 15

Тема: «Обратная матрица».

Цель: научиться находить обратные матрицы.

Теория.

Обратная матрица.

Матрица A^{-1} является *обратной* для матрицы A , определитель которой отличен от нуля , если справедливы равенства $A^{-1} \cdot A = E$, где E – единичная матрица порядка n на n.

<u>*План вычисления обратной матрицы:*</u>

1. Вычисляем определитель матрицы A . Если $|A| \neq 0$, то матрица A имеет обратную.
2. Составляем матрицу из алгебраических дополнений элементов матрицы A :

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

3. Находим транспонированную матрицу: $\tilde{A}^T = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$.
4. Разделив матрицу $\tilde{A}^T$ на определитель $|A|$, получаем искомую обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{21} & A_{22} & A_{32} \\ A_{31} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

5. Проверяем, что $A^{-1} \cdot A = E$, и записываем ответ.

Контрольные вопросы:

1. Что называется обратной матрицей?
2. Каков порядок вычисления обратной матрицы?

1 вариант.

Задание № 1. Найдите обратную матрицу:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 2 & 0 & -3\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ -5 & 0 & -4\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{pmatrix}.$$

2 вариант.

Задание № 1. Найдите обратную матрицу:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -7 & 1\\ 0 & 3 & 4\\ -5 & 1 & 3\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 7 & 8\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & 4 & -2\end{pmatrix}.$$

3 вариант.

Задание № 1. Найдите обратную матрицу:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -7 & 1\\ 0 & 3 & 4\\ -5 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\ -5 & 1 & 0\\ 0 & 15 & 2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}6 & -4 & 5\\ 2 & 3 & -2\\ 0 & 4 & -4\end{pmatrix}.$$

4 вариант.

Задание № 1. Найдите обратную матрицу:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & 6 & 4\\ -2 & 4 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & -4 & 3\\ 7 & 5 & 8\\ -6 & 9 & 7\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & 3 & -1\\ 0 & 4 & -2\end{pmatrix}.$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 16

Тема: «Решение систем линейных уравнений матричным методом и по формулам Крамера».

Цель: научиться решать системы линейных уравнений матричным методом и по формулам Крамера.

Теория.

Рассмотрим решение системы трех уравнений с тремя неизвестными: $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}$.

Находим главный определитель системы:

$$|\,D\,|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

Если $D = 0$, то система имеет бесконечно много решений или несовместна (не имеет решений).
Если $D \neq 0$, то система имеет единственное решение.

Решение систем линейных уравнений матричным методом:

1. Записать систему линейных уравнений в матричной форме $AX = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определитель матрицы A.
3. Если $|A| \neq 0$, то найти матрицу A^{-1}, обратную для матрицы A по плану:

- Составляем матрицу из алгебраических дополнений элементов матрицы A:

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

- Находим транспонированную матрицу: $\tilde{A}^T = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{21} & A_{22} & A_{32} \\ A_{31} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$.

- Разделив матрицу $\tilde{A}^T$ на определитель $|A|$, получаем искомую обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{21} & A_{22} & A_{32} \\ A_{31} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

4. Находим $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot b$.

Пример 1: Решить систему с матричным методом : $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$.

Решение:

1. Запишем систему линейных уравнений в матричной форме $AX = b$,

где $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$.

2. Вычислим определитель матрицы A: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -60$.

3. Вычислим алгебраические дополнения и составим матрицу из алгебраических дополнений:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -12,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 18, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 18 .$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -6 & -1 & -11 \\ -6 & -11 & -1 \\ -12 & 18 & 18 \end{pmatrix}.$$

4. Находим транспонированную матрицу: $\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -12 \\ -1 & -11 & 18 \\ -11 & -1 & 18 \end{pmatrix}.$
5. Находим обратную матрицу: $A^{-1} = -\frac{1}{60}\begin{pmatrix} -6 & -6 & -12 \\ -1 & -11 & 18 \\ -11 & -1 & 18 \end{pmatrix} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 12 \\ 1 & 11 & -18 \\ 11 & 1 & -18 \end{pmatrix}.$
6. Находим $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot b$

$$X = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 12 \\ 1 & 11 & -18 \\ 11 & 1 & -18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 6\cdot 21 + 6\cdot 9 + 12\cdot 10 \\ 1\cdot 21 + 11\cdot 9 - 18\cdot 10 \\ 11\cdot 21 + 1\cdot 9 - 18\cdot 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} 300 \\ -60 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = 5$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера:

Переходим к рассмотрению правила Крамера для системы трех уравнений с тремя неизвестными:

1. Вычислить определитель Δ матрицы A.
2. Составим ещё три определителя следующим образом: заменим в определителе D последовательно 1, 2 и 3 столбцы столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

3. Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то рассматриваемая система имеет одно и только одно решение, причём: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$.

Пример 2: Решить предыдущую систему по формулам Крамера: $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}.$

Решение: Решим систему по формулам Крамера:

1. Вычислим определитель матрицы *A*: $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -60 \neq 0$, значит система имеет единственное решение.
2. Вычислим определители Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 21 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -300, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 2 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 60, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 21 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = -60.$$

3. Найдем значения: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-300}{-60} = 5$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{60}{-60} = -1$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-60}{-60} = 1$.

Ответ: $x_1 = 5$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Контрольные вопросы:

1. Запишите систему линейных уравнений с тремя переменными в общем виде.
2. Запишите формулы Крамера.
3. Запишите простейшее матричное уравнение.
4. Запишите алгоритм решения матричного уравнения.

<u>1 вариант.</u>

Задание № 1. Решите данную систему матричным методом и по формулам Крамера:

1. $\begin{cases} x-3y+z=-2 \\ x-2y-4z=-11 \\ -2x-y=1 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} -x+3y=4 \\ 3x-2y+z=-3 \\ 2x+y-z=-3 \end{cases}$.

<u>2 вариант.</u>

Задание № 1. Решите данную систему матричным методом и по формулам Крамера:

1. $\begin{cases} -x+2y+z=5 \\ 2x-3y+3z=1 \\ y-5z=-9 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} -2y-5z=-12 \\ -2x-2y+3z=7 \\ -x+y+z=4 \end{cases}$.

<u>3 вариант.</u>

Задание № 1. Решите данную систему матричным методом и по формулам Крамера:

1. $\begin{cases} -x+2z=5 \\ 2x+2y+5z=10 \\ 3x-2y+2z=-1 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 2x-y-6z=-15 \\ 3x-y+z=-2 \\ -x+3z=7 \end{cases}$.

<u>4 вариант.</u>

Задание № 1. Решите данную систему матричным методом и по формулам Крамера:

1. $\begin{cases} 5x-5y-4z=-3 \\ x-y+5z=11 \\ 4x-3y-6z=-9 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} x-4y-2z=0 \\ 3x-5y-6z=-21 \\ 3x+y+z=-4 \end{cases}$.