Департамент образования Вологодской области
бюджетное профессиональное образовательное учреждение
Вологодской области
«ВОЛОГОДСКИЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ КОЛЛЕДЖ»

МЕТОДИЧЕСКИЕУКАЗАНИЯ

к практическим работам

по дисциплине ЕН.01. Математика

Специальность 43.02.08 Сервис домашнего и коммунального хозяйства

2017

Рассмотрено на заседании предметной цикловой комиссии общепрофессиональных, специальных дисциплин и дипломного проектирования по специальностям 08.02.01 «Строительство и эксплуатация зданий и сооружений», 08.02.07 «Монтаж и эксплуатация внутренних сантехнических устройств, кондиционирования воздуха и вентиляции», 43.02.08 «Сервис домашнего и коммунального хозяйства» и рекомендована для внутреннего использования, протокол № 11 от «13» июня 2017г

Данные методические указания предназначены для студентов обучающихся по специальности 43.02.08 Сервис домашнего и коммунального хозяйства БПОУ ВО «Вологодский строительный колледж» при выполнении практических работ.

Объем практической работы по дисциплине ЕН.01. Математика составляет 28 часов.

Перечень практических работ соответствует содержанию программы. Практическая работа студентов повышает интеллектуальный уровень обучающихся, формирует умение находить нужную информацию, систематизировать, обобщать, что необходимо для профессиональной подготовки будущего специалиста. Навыки исследовательской работы помогут студентам на старших курсах при выполнении и оформлении курсовых и дипломных проектов.

Методические указания могут быть рекомендованы к использованию студентами и преподавателями БПОУ ВО «Вологодский строительный колледж».

Автор: Е.А.Севалева, преподаватель

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания по организации практических работ по ЕН.01 Математика для студентов специальности 43.02.08. Сервис домашнего и коммунального хозяйства;

В данных методических указаниях приведена методика по организации практической работы с , а также указаны виды практической работы по темам раздела, формы контроля практической работы и рекомендуемая литература.

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Аудиторная практическая работа выполняется по заданию преподавателя, с/без его непосредственного участия.

При предъявлении видов заданий на аудиторную практическую работу преподаватель использует дифференцированный подход на индивидуальном уровне к студентам. Практическая работа может осуществляться индивидуально по группам обучающихся в зависимости от цели, объема, конкретной тематики, уровня сложности, уровня умений обучающихся.

Перед выполнением студентом аудиторной практической работы преподаватель проводит инструктаж по выполнению задания, который включает: цель задания, его содержание, сроки выполнения, ориентировочный объем работы, основные требования к результатам работы, критерии оценки. В процессе инструктажа преподаватель предупреждает студентов о возможных типичных ошибках, встречающихся при выполнении задания.

С целью получения высоких результатов использованы следующие виды заданий, которые дадут полноценный результат: практическая работа с книгой, журналом, газетой; подготовка сообщений, докладов, рефератов.

При выполнении работ студент должен изучить методические рекомендации по выполнению практической работы; подготовить ответы на контрольные вопросы. Все задания выполняются письменно (или устно), ответы на теоретические вопросы даются устно (слабоуспевающим студентам можно дать ответить на контрольные вопросы письменно для того, чтобы лучше запомнить теоретический материал).

Изучая теоретическое обоснование, студент должен знать, что основной целью изучения теории является умение применять ее при выполнении письменных заданий.

После выполнения работы студент должен представить отчет о проделанной работе с полученными результатами и устно ее защитить.

При отсутствии студента по неуважительной причине выполняет работу самостоятельно во внеаудиторное время и защищает на консультации.

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ВЫПОЛНЕНИЯ СТУДЕНТОМ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

- Оценка «5» ставится: практическая работа выполнена в полном объеме, в соответствии с заданием, с соблюдением последовательности выполнения, выполнена без ошибок; оформлена аккуратно.
- Оценка «4» ставится: практическая работа выполнена в полном объеме, в соответствии с заданием, с соблюдением последовательности выполнения, частично с помощью преподавателя, присутствуют незначительные ошибки; работа оформлена аккуратно.
- Оценка «3» ставится: практическая работа выполнена в полном объеме, в соответствии с заданием, частично с помощью преподавателя, присутствуют ошибки; по оформлению работы имеются замечания.
- Оценка «2» ставится: обучающийся не подготовился к практической работе, допустил грубые ошибки, по оформлению работы имеются множественные замечания.

ПЕРЕЧЕНЬ ФОРМ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ОБУЧАЮЩИХСЯ

№ п/п	Тема программы	Форма задания	Количество часов
	Тема 1. 1 Математический анализ.		
1.	Предел функции. Раскрытие неопределённостей	решение примеров	2
2.	Дифференцирование сложной и неявной функции. Частные производные функции двух переменных.	решение примеров	2
3.	Неопределенный интеграл. Интегрирование методом подстановки и по частям	решение примеров	2
4.	Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, однородные.	решение примеров	2
5.	Линейные дифференциальные уравнения, с постоянными коэффициентами	решение примеров	2
6.	Числовые ряды. Признаки сходимости.	решение примеров	2
7.	Вычисление значения функций с помощью ряда Маклорена	решение примеров	2
	Тема 1.2 Основы теории вероятности и математической статистики		
8.	Вероятность случайного события. Теоремы сложения и умножения вероятностей	решение примеров	2
9.	Случайные величины. Их виды и числовые характеристики	решение примеров	2
	Тема 1.3 Основы численных методов.		
10.	Численное интегрирование. Формулы прямоугольников и трапеций	решение примеров	2
11.	Численное дифференцирование. Аналитическое выражение производной по табличным данным.	решение примеров	
	Тема 1. 4 Основы дискретной математики.		
12.	Множества и операции над ними	решение примеров	2
13.	Элементы теории графов	решение примеров	2
14.	Итоговое занятие	решение примеров	2

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основные источники:

1. Богомолов Н. В. Сборник задач по математике Дрофа, 2014
2. Колмогоров А. Н. Алгебра и начала математического анализа 10-11 класс Просвещение, 2014
3. Кундышева Е.С. Экономико-математическое моделирование [Электронный ресурс]: учебник/ Кундышева Е.С.— Электрон. текстовые данные.— М.: Дашков и К, 2012.— 424 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/35333.html.— ЭБС «IPRbooks»

Дополнительные источники:

1. Методические указания к практическим работам по дисциплине ЕН.01. Математика, 2017г.
2. Методические рекомендации по организации внеаудиторной самостоятельной работы студентов по дисциплине ЕН.01. Математика, 2017
3. Башмаков М.И.,Математика, Академия, 2015
4. Богомолов Н.В.,Сборник задач по математике, Дрофа,2014

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

Методические указания для студентов специальности 43.02.08. Сервис домашнего и коммунального хозяйства предназначены, по оказанию методической помощи студентам при подготовке и проведении практической работы в урочное время.

Учебно-методические указания предусматривают следующие виды работ: доклады, презентации.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

по теме: Предел функции. Раскрытие неопределённостей

Цель: научиться вычислять пределы функции, раскрывать неопределённости $\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Теория:

<u>*Определение предела:*</u> Число b – предел функции f(x) при x стремящемся к a, если для каждого положительного числа ε можно указать такое положительной число δ, что для всех x, отличных от a и удовлетворяющих неравенству $|x-a|< \varepsilon$, имеет место неравенство $|f(x)-b|< \delta$.

<u>*Обозначение предела*</u>: Если b есть предел функции f(x) при x стремящемся к a, то записывают это так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$

Свойства пределов.

1. $\lim(x+y)=\lim x+\lim y$.

2. $\lim C=C, \quad C=const$.

3. $\lim(x\cdot y)=\lim x\cdot\lim y$.

4. $\lim\dfrac{x}{y}=\dfrac{\lim x}{\lim y}, \quad \lim y\neq 0$.

5. $\lim x^m=(\lim x)^m$.

6. $\lim\sqrt[m]{x}=\sqrt[m]{\lim x}$.

7. $\lim(\log_a x)=\log_a(\lim x)$.

При нахождении пределов применяют соотношения: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{k}{x}=0$ и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k}{x}=\infty$

Вычисление пределов функции основано на применении следующих основных теорем:

ТЕОРЕМА 1. Предел суммы двух функций при x стремящемся к a равен сумме пределов этих функций , то есть $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to a}(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

ТЕОРЕМА 2. Предел произведения двух функций при x стремящемся к a равен произведению пределов этих функций, то есть $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to a}(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$.

ТЕОРЕМА 3. Предел частного двух функций при x стремящемся к a равен частному пределов, если предел знаменателя отличен от нуля, то есть $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$.

Вычисление предела функции способом подстановки.

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 7}(x+3)$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 7}(x+3)=\left|\, 7+3=10 \,\right|=10$.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+2}{2x-7}=\left|\dfrac{3\cdot 1+2}{2\cdot 1-7}=\dfrac{5}{-5}=-1\right|=-1$.

Раскрытие неопределённости $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Для раскрытия неопределенности необходимо разложить числитель и знаменатель на множители, для чего обычно решается квадратное уравнение или используются формулы сокращенного умножения.

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\left|\dfrac{2^2-4}{2-2}=\dfrac{0}{0}\right|$. Мы получили неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ для раскрытия которой необходимо разложить числитель и знаменатель на множители: $\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$. Это преобразование справедливо при всех значениях *x*, отличных от 2, поэтому в соответствии с определением предела можем написать: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=\left|\,2+2=4\,\right|=4$.

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-3x-5}{x+1}$.

Решение: Подставим в место *x* число -1: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-3x-5}{x+1}=\left|\dfrac{2(-1)^2-3(-1)-5}{-1+1}\right|=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Получили неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, для раскрытия которой необходимо разложить числитель и знаменатель на множители, для чего в свою очередь обычно решается квадратное уравнение или используются формулы сокращенного умножения.

В нашем случае решаем уравнение: $2x^2-3x-5=0$.

Находим дискриминант: $D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5)=49,\quad \sqrt{D}=7$.

Если корень не извлекается целый, то вероятней всего D вычислен неправильно.

Теперь находим корни уравнения: $x_1=\dfrac{-(-3)-7}{2\cdot 2}=\dfrac{3-7}{4}=\dfrac{-4}{4}=-1$

$$x_2=\dfrac{-(-3)+7}{2\cdot 2}=\dfrac{3+7}{4}=\dfrac{10}{4}=\dfrac{5}{2}$$

Подставляем: $2x^2-3x-5=2(x-(-1))(x-\dfrac{5}{2})=2(x+1)(x-5)$.

В знаменателе $x + 1$, что и так является простейшим множителем. Тогда предел примет вид: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(2x-5)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}(2x-5)=\left|\,2(-1)-5\,\right|=-7$.

Раскрытие неопределённости $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Существует группа пределов, когда $x\to\infty$, а функция представляет собой дробь, подставив в которую значение $x=\infty$ получим неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Для раскрытия неопределенности нужно разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени.

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$.

Решение: Подставим ∞ в функцию. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\left|\dfrac{\infty-\infty-5}{1+\infty+\infty}\right|=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Получили неопределенность $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. В числителе находим x в старшей степени, которая равна 2. В знаменателе старшая степень так же равна 2. Надо из двух найденных степеней выбрать самую старшую. В нашем случае степень числителя и знаменателя совпадают и равна 2. Итак, для раскрытия неопределенности $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ потребуется разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени, т.е. на x^2 :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+3}=\left|\begin{matrix}\dfrac{2-\frac{3}{\infty}-\frac{5}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}+3}= \\ \dfrac{2-0-0}{0+0+3}=\dfrac{2}{3}\end{matrix}\right|=\frac{2}{3}.$$

Пример 6. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.

Подставим вместо x число 2 : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\left|\dfrac{\sqrt{2^2+5}-3}{2-2}=\dfrac{0}{0}\right|$.

Получили неопределённость $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, для раскрытия которой необходимо числитель и знаменатель дроби умножить на выражение, сопряжённое числителю:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}-3)\cdot(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5})^2-3^2}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}=$$

Ответ:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\left|\frac{2+2}{\sqrt{2^2+5}+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\right|$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}=\frac{2}{3}.$$

Контрольные вопросы:

1. Дайте понятие предела функции в точке.
2. Перечислите свойства пределов.
3. Как раскрываются неопределённости вида $\left(\frac{0}{0}\right),\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

1 вариант.

Задание №1. Вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4+2x^2-1}{x^3+x+2}$; 2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^2-3x+1)^3}{x+4}$; 3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+1}{x^2-3}$.

Задание №2. Вычислите пределы, раскрывая неопределённость $\left(\frac{0}{0}\right)$:

1. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x-4}$;
2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-x-15}{3x^2-8x-3}$;
3. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}$;
4. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{6-x-2x^2}$

Задание №3. Вычислите пределы, раскрывая неопределённость $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+4}{3x^3+x^2-x+5}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x^2-x}{x^3-1}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x+2}{3x^2+x-1}$; 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3x-2}{2x^4-x+1}$;

Задание №4. Вычислите пределы, уничтожив иррациональность:

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x-4}{\sqrt{5x-6}-2}$.

2 вариант.

Задание №1. Вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+2}{x^3+3x+1}$; 2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+7}{x^3+1}$; 3. $\lim\limits_{x\to-1}(x^5+2x^2-6)$.

Задание №2. Вычислите пределы, раскрывая неопределённость $\left(\dfrac{0}{0}\right)$:

1. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+3x-2}$; 3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$;

2. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{10x^2+9x-7}{4x^2-1}$; 4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x^2-5x-1}{x^2-3x+2}$.

Задание №3. Вычислите пределы, раскрывая неопределённость $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x+4}{3x^3+x^2-x+5}$; 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^2-x}{x^3-1}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+3x-1}{3x-x^2}$; 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x+6}{x^5-2x^3+9}$.

Задание №4. Вычислите пределы, уничтожив иррациональность:

1. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2x}-x}{x^2-x-2}$; 2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-2x}}{x}$.

3 вариант.

Задание №1. Вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x-5}{x+1}$; 2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x+6}{3x^2-2x-1}$; 3. $\lim\limits_{x\to -1}(2x^4-2x^2+3)$

Задание №2. Вычислите пределы, раскрывая неопределённость $\left(\dfrac{0}{0}\right)$:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$;

2. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{15x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$;

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$;

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$.

Задание №3. Вычислите пределы, раскрывая неопределённость $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$:

1. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+3x+5}{2x^3-6x+1}$;

2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+3x^2+5x}{x^2-x-6}$;

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^2+3x+1}{x^2+2x-2}$;

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^3-x^2+6}{x^2-4}$.

Задание №4. Вычислите пределы, уничтожив иррациональность:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

4 вариант.

Задание №1. Вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{17x^2+7x-10}{7x^2-x-8}$; 2. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+5x}{2x-1}$; 3. $\lim\limits_{x\to -1}(2x^3-5x^2+1)$

Задание №2. Вычислите пределы, раскрывая неопределённость $\left(\dfrac{0}{0}\right)$**:**

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-6x+8}$;

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$;

2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{15x^2+13x-2}{3x^2+2x-1}$;   4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-8x+12}$.

Задание №3. Вычислите пределы, раскрывая неопределённость $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$**:**

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x+1}{2x^3-x+2}$;   3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+7}{2x^2+3x-2}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2+3x}{4x^2-x-5}$;   4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x^2+6}{x^2-2}$.

Задание №4. Вычислите пределы, уничтожив иррациональность:

1. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-6}-1}{x-7}$;   2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{13-x^2}-3}{x+2}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2.

Тема: Дифференцирование сложной и неявной функции. Частные производные функции двух переменных.

Цель: научиться вычислять производные функций, производные сложной и неявной функций,   частные производные и полный дифференциал.

Теория.

Определение: *Производной* функции $y=f(x)$ в точке x называется предел приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю: $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Правила вычисления производных:

1. $(u+v)'=u'+v'$;

2. $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$;

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v+u\cdot v'}{v^2}$.

Определение: Если $y=f(u)$, где $u=u(x)$, то есть y - сложная функция, то производная сложной функции находится по следующему правилу: $y'=f'(u)\cdot u'(x)$, то есть производную внешней функции нужно умножить на производную внутренней функции.

Пример 1: Найти производную функции $y=\sin(x^2-3x)$.

Решение:

$$y' = \left(\sin(x^2 - 3x)\right)' = \left| \; x^2 - 3x = t \; \right| = \sin' t = \cos t \cdot t' = \sin(x^2 - 3x) \cdot \left(x^2 - 3x\right)' = \sin(x^2 - 3x)$$

$$\cdot (2x - 3) = (2x - 3)\sin(x^2 - 3x)$$

Пример 2: Найти производную функции $y = \sqrt{4x^3 - 12x + 8}$.

Решение:

$$y' = \left(\sqrt{4x^3 - 12x + 8}\right)' = \left| \; 4x^3 - 12x + 8 = t \; \right| = \left(\sqrt{t}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot t' = \frac{1}{2\sqrt{4x^3 - 12x + 8}} \cdot$$

$$\cdot \left(4x^3 - 12x + 8\right)' = \frac{1}{2\sqrt{4x^3 - 12x + 8}} \cdot \left(12x^2 - 12\right) = \frac{12x^2 - 12}{2\sqrt{4x^3 - 12x + 8}} =$$

$$= \frac{2\left(6x^2 - 6\right)}{2\sqrt{4x^3 - 12x + 8}} = \frac{6x^2 - 6}{\sqrt{4x^3 - 12x + 8}}$$

Частная производная и полный дифференциал.

Определение: Частная производная функции двух переменных по одному из её аргументов равна пределу отношения частного приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю: $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$.

Пример 3: Найти частные производные функции: $z = x^2 y - 3y^2 + 5x$.

Решение: $\frac{\partial z}{\partial x}(y = const) = (x^2 y - 3y^2 + 5x)' = 2xy - 0 + 5 = 2xy + 5$;

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x = const) = (x^2 y - 3y^2 + 5x)' = x^2 \cdot 1 - 6y + 0 = x^2 - 6y.$$

Определение: Полный дифференциал функции $z = f(x; y)$ обозначается dz и имеет вид: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ или $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$.

Пример 4: Найти полный дифференциал функции $z = xy^2 + 4y$.

Решение: Найдём частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(y = const) = (xy^2 + 4y)' = 1 \cdot y^2 + 0 = y^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x = const) = (xy^2 + 4y)' = x \cdot 2y + 4 = 2xy + 4 \;;$$

тогда полный дифференциал будет иметь вид: $dz = y^2 dx + (2xy + 4)dy$

Пример 5: Найти полный дифференциал функции $z = \frac{x^3}{2} - \frac{y^4}{8}$ при $x = 2, \quad y = 1, \quad \Delta x = 0{,}1, \quad \Delta y = 0{,}2$.

Решение: Полный дифференциал функции имеет вид: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$. Тогда найдём частные производные заданной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(y = const) = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{y^4}{8}\right)' = \frac{3x^2}{2} - 0 = \frac{3x^2}{2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x = const) = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{y^4}{8}\right)' = 0 - \frac{4y^3}{8} = \frac{y^3}{2};$$

тогда полный дифференциал будет иметь вид: $dz = \frac{3x^2}{2}\Delta x - \frac{y^3}{2}\Delta y$. Подставим в формулу полного дифференциала заданные значения: $dz = \frac{3 \cdot 2^2}{2} \cdot 0{,}1 + \frac{1^3}{2} \cdot 0{,}2 = 6 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}6 + 0{,}1 = 0{,}7$.

Производная неявной функции .

Во многих задачах *функция y(x) задана неявным* образом. Например, для приведенных ниже функций $x^3 + y^3 = 3x^2 y^5$, $\frac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 4xy^2$ невозможно получить зависимость $y(x)$ в явном виде. Алгоритм вычисления производной $y'(x)$ от неявной функции выглядит следующим образом:

- Сначала необходимо продифференцировать обе части уравнения по отношению к *x*, предполагая, что *y* - это дифференцируемая функция *x* и используя правило вычисления производной от сложной функции;
- Решить полученное уравнение относительно производной $y'(x)$.

Пример 6: Продифференцировать функцию $y(x)$, заданную уравнением $y = \cos(x + y)$.

Решение: Продифференцируем обе части уравнения по переменной *x*:
$y' = \left(\cos(x + y)\right)' = \left| \, x + y = t \, \right| = \cos' t = -\sin t \cdot t' = -\sin(x + y) \cdot (x + y)' =$ что приводит $-\sin(x + y) \cdot (1 + y') = -\sin(x + y) - y' \cdot \sin(x + y)$
к результату $y' = -\frac{\sin(x + y)}{1 + \sin(x + y)}$.

*Пример 7:*_ Вычислить производную функции $y(x)$, заданной уравнением $x^2+2xy+2y^2=1$, при условии $y = 1$.

Решение: Дифференцируем обе части уравнения по x (левую часть дифференцируем как сложную функцию):

$$(x^2+2xy+2y^2)'=1'$$
$$(x^2)'+(2xy)'+(2y^2)'=0$$
$$2x+(2x'y+2xy')+2\cdot 2yy'=0$$
$$2x+(2y+2x\cdot 1\cdot y')+4yy'=0$$
$$2x+2y+2xy'+4yy'=0$$
$$2xy'+4yy'=-2x-2y$$
$$y'(2x+4y)=-2x-2y$$
$$y'=\frac{-2x-2y}{2x+4y}=-\frac{2(x+y)}{2(x+2y)}=-\frac{x+y}{x+2y} \qquad ....(1)$$

Если $y=1$, то из исходного уравнения находим x : $x^2+2xy+2y^2=1$

$$x^2+2x\cdot 1+2\cdot 1^2=1$$
$$x^2+2x+2=1$$
$$x^2+2x+1=0$$
$$(x+1)^2=0$$
$$x+1=0$$
$$x=-1$$

Подставим в уравнение (1) значения $x = -1$ и $y = 1$. В результате получаем :

$$y'=-\frac{-1+1}{-1+2}=-\frac{0}{1}=0.$$

Отсюда следует, что $y' = 0$ при $y = 1$.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение производной функции.
2. Перечислите правила вычисления производной.
3. Как определяется производная сложной функции?
4. Как определяется производная неявной функции?
5. Дайте понятие частной производной функции.

6. Дайте понятие полного дифференциала.

Таблица производных.

Функция	Производная функции	Функция	Производная функции
$C = const$	0	$sin\ x$	$cos\ x$
x	1	$cos\ x$	$-\ sin\ x$
x^n	nx^{n-1}	$tg\ x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$ctg\ x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$arcsin\ x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \ln a$	$arcos\ x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$arctg\ x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$arcctg\ x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$ln\ x$	$\frac{1}{x}$		

1 вариант.

Задание №1. Найдите производные сложных функций:

1. $y = \cos 2x + 4\cos x$;

2. $y = x^2 \cdot ctg 2x$;

3. $y = \ln(x^2 + x + 1)$;

4. $y = arctg\left(\dfrac{x}{2}\right)$

Задание №2. Найдите производные неявных функций:

1. $xy + x + y = 1$;

2. $y = x + arctg\ y$;

3. $\sin y = \ln x$.

Задание №3. Найдите частные производные функций:

1. $z = y^3 - 3y + 3x$;

2. $z = \ln y + \dfrac{y}{x}$;

3. $z = x^3 + y^3$;

4. $z = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{36}$.

Задание №4. Найдите полный дифференциал функции:

1. $z = 3xy - 2x^2y^3$;

2. $z = \arccos(x - y)$;

3. $z = 3x^2 - \sin xy^2$.

Задание №5. Найдите полный дифференциал при заданных значениях $x, y, \Delta x, \Delta y$:

1. $z = y^2 + 3xy + x, \quad x = 1, y = 2, \Delta x = 0{,}05, \Delta y = -0{,}05$;

2. $z = x^2 + 2xy + y^2, \quad x = 2, y = 1, \Delta x = 0{,}06, \Delta y = -0{,}02$

2 вариант.

Задание № 1. Найдите производные сложных функций:

1. $y = 5\sin^2 4x$;
2. $y = \ln^2 4x$;
3. $y = \sqrt{5x^2 + 4x}$;
4. $y = 2x^3 \cdot \cos 5x$.

Задание № 2. Найдите производные неявных функций:

1. $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$;
2. $xy + \ln y + \ln x = 0$;
3. $2x^3 y + 5x^2 + 3y^3 = 0$.

Задание № 3 . Найдите частные производные функций:

1. $z = y^2 - 2y + 5x$;
2. $z = 2y^3 x - 3x^3 y + 5x$;
3. $z = \ln(x^3 - 5y^2)$;
4. $z = \cos(x^2 - y^2)$.

Задание № 4. Найдите полный дифференциал функции:

1. $z = 2x^3 + 4y^2 + 5xy$;
2. $z = \arcsin(x + y)$;
3. $z = 2xy - \cos xy$.

Задание № 5. Найдите полный дифференциал при заданных значениях $x, y, \Delta x, \Delta y$:

1. $z = x^2 + 3xy + y^2, \quad x = 1, y = 1, \Delta x = -0{,}02, \Delta y = 0{,}04$;
2. $z = x^2 + y^2 + 2x - 2y, \quad x = 1, y = 1, \Delta x = -0{,}06, \Delta y = 0{,}05$.

3 вариант.

Задание № 1. Найдите производные сложных функций:

1. $y = x^3 \cdot \sin 5x$;
2. $y = tg(\ln 2x)$;
3. $y = \sqrt{2x+5}$;
4. $y = \ln(\cos 2x)$.

Задание № 2. Найдите производные неявных функций:

1. $x^2 - y^2 = 0$;
2. $e^x + e^y - 2x - 1 = 0$;
3. $\sin(y + x^2) - x^2 + 4y = 0$.

Задание № 3. Найдите частные производные функций:

1. $z = y^4 - 3x^2 + 2xy$;
2. $z = 3y^2x^3 - 4yx^2 + 3y$;
3. $z = \ln(x^2 - 4y^3)$;
4. $z = e^{x^2 y}$.

Задание № 4. Найдите полный дифференциал функции:

1. $z = 3xy - 2x^2y^3$;
2. $z = \arccos(x - y)$;
3. $z = 3x^2 - \sin xy^2$.

Задание № 5. Найдите полный дифференциал при заданных значениях $x, y, \Delta x, \Delta y$:

1. $z = y^2 + 3xy + x, \quad x = 1, y = 2, \Delta x = 0{,}05, \Delta y = -0{,}05$;
2. $z = x^2 + 2xy + y^2, \quad x = 2, y = 1, \Delta x = 0{,}06, \Delta y = 0{,}02$.

4 вариант.

Задание № 1. Найдите производные сложных функций:

1. $y = x^2 \cdot \cos 3x$;
2. $y = \sin(\ln x)$;
3. $y = \sqrt{3x^2 + 2x}$;
4. $y = \ln(2x - 4)$.

Задание № 2. Найдите производные неявных функций:

1. $x^2 y - y^2 x = 0$;
2. $e^x + e^y - 2xy - 1 = 0$;
3. $\sin x^2 - 5x^2 + y = 0$.

Задание № 3. Найдите частные производные функций:

1. $z = xy^3 + x^2 + 2y$;
2. $z = y^2 x - 2yx^3 + 3x$;
3. $z = \ln(x \;\; - 4xy^3)$;
4. $z = e^{x^2 y^2}$.

Задание № 4. Найдите полный дифференциал функции:

1. $z = 2xy - 2x^2 y^2$;
2. $z = \arcsin(x - y)$;
3. $z = 3x^2 - \cos xy$.

Задание № 5. Найдите полный дифференциал при заданных значениях $x, y, \Delta x, \Delta y$:

1. $z = y^2 + 3x^2 y + y, \quad x = 1,\ y = 2,\ \Delta x = 0{,}05,\ \Delta y = -0{,}05$;
2. $z = x^2 + 2xy^3 + x^2, \quad x = 2,\ y = 1,\ \Delta x = 0{,}06,\ \Delta y = 0{,}02$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

По теме: Неопределенный интеграл. Интегрирование методом подстановки и по частям

Цель: научиться интегрировать функции, используя основные формулы интегрирования, а также способом подстановки и по частям.

Теория.

Неопределённый интегра́л для функции $f(x)$— это совокупность всех *первообразных* данной функции. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $(a;b)$ и $F(x)$ - её первообразная, то есть $F'(x)=f(x)$ при $a \langle x \langle b$, то $\int f(x)dx = F(x)+C$, где C – произвольная постоянная.

Методы интегрирования.

Таблица интегралов.

1	$\int dx = x + C$;	**9**	$\int \sin x dx = -\cos x + C$;
2	$\int a dx = ax + C$;	**10**	$\int \cos x dx = \sin x + C$;
3	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$;	**11**	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$;
4	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C$;	**12**	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$
5	$\int \frac{1}{x^n} dx = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$;	**13**	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2} arctg \frac{x}{a} + C$;
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$;	**14**	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{a+x}{a-x} \right\rvert + C$;
7	$\int e^x dx = e^x + C$;	**15**	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$;
8	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;		

Пример 1. Вычислить неопределенный интеграл $\int x^5 dx$.

Решение: Для решения данного интеграла не нужно использовать свойства неопределенных интегралов, достаточно формулы интеграла степенной функции:

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;$ в нашем случае $n = 5$, тогда искомый интеграл равен: $\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} = \frac{x^6}{6} + C$.

Пример 2. Вычислить неопределенный интеграл: $\int (4x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}})dx$.

Решение: Для этого интеграл суммы разложим на сумму интегралов. $\int (4x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}})dx = 4\int x^2 dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} + 2\sqrt{x} = \frac{4x^3}{3} + 2\sqrt{x} + C$.

Метод замены переменной (метод подстановки).

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (то есть подстановки). При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся. Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой. Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $dx = \varphi'(t)dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем *формулу интегрирования подстановкой:*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Пример 3: Вычислить интеграл $\int \frac{tg^3 x}{\cos^2 x} dx$.

Решение: Сделаем замену переменной tg x = t, тогда $dt = (tgx)' \cdot dx = \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

Получим табличный интеграл $\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C$, где C - произвольная постоянная. Производя обратную замену переменной, получим: $\int \frac{tg^3 x}{\cos^2 x} dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} tg^4 x + C$.

Пример 4: Вычислить интеграл $\int \frac{x+1}{x^2 + 2x - 5} dx$.

Решение: Сделаем замену переменной $x^2+2x-5=t$, тогда $dt=(x^2+2x-5)'\cdot dx=(2x+2)dx=2(x+1)dx$. Отсюда $(x+1)dx=\frac{dt}{2}$.

Получим табличный интеграл $\int\frac{\frac{dt}{2}}{t}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln t+C$, где C - произвольная постоянная.

Производя обратную замену переменной, получим: $\int\frac{x+1}{x^2+2x-5}dx$ = $\int\frac{\frac{dt}{2}}{t}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln t+C=\frac{1}{2}\ln\left|\,x^2+2x-5\,\right|+C$.

Метод интегрирования по частям.

Интегрирование по частям – применение следующей формулы интегрирования:

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du.$$

Пример 5: Найти интеграл $\int x\cdot\ln^2 xdx$.

Решение: Применим формулу интегрирования по частям $\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$.

$$\int x\cdot\ln^2 xdx=\left|\begin{array}{ll} u=\ln^2 x & dv=xdx \\ du=\left(\ln^2 x\right)'dx & \int dv=\int xdx \\ du=\frac{2\ln x}{x}dx & v=\frac{x^2}{2}dx \end{array}\right|=\frac{x^2}{2}\cdot\ln^2 x-\int x\cdot\ln xdx.$$

Снова применим формулу интегрирования по частям:

$$\int x\ln xdx=\left|\begin{array}{ll} u=\ln x & dv=xdx \\ du=\left(\ln x\right)'dx & \int dv=\int xdx \\ du=\frac{1}{x}dx & v=\frac{x^2}{2} \end{array}\right|=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$. Таким образом, получим:

$$\int x\cdot\ln^2 xdx=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}+C=\frac{x^2}{4}\left(2\ln^2 x-\ln x+1\right)+C.$$

Пример 6. Вычислить $\int xe^x dx$.

$$\text{Решение. } \int xe^x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & \int dv = \int e^x dx \\ & v = e^x \end{array} \right| = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C.$$

Контрольные вопросы:

1. Дайте понятие первообразной функции.
2. Дайте понятие неопределённого интеграла.
3. Перечислите свойства неопределённого интеграла.
4. В чём заключается интегрирование функций способом подстановки?
5. В чём заключается интегрирование функций по частям?

1 вариант.

Задание № 1. Вычислите интегралы следующих функций:

1. $\int 2xdx$;
2. $\int x^{11}dx$;
3. $\int 4\sqrt{x}dx$;
4. $\int \sin 2xdx$;
5. $\int \left(\cos x - \dfrac{4}{\cos^2 x}\right)dx$;
6. $\int \dfrac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$;
7. $\int 2^x dx$;
8. $\int \left(\dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{3}{4}x^{\frac{1}{3}} + 5\right)dx$;
9. $\int \sqrt[3]{x^2}dx$;
10. $\int \dfrac{x^3 + 3x^2 + 4x - 1}{x}dx$.

Задание № 2. Проинтегрируйте функции способом подстановки:

1. $\int \dfrac{dz}{(5z+1)^3}$;
2. $\int \sqrt[4]{3x-1}dx$;
4. $\int \dfrac{x^2dx}{x^3-2}$;
5. $\int tgxdx$;

3. $\int \frac{5dx}{x-3}$;

6. $\int \frac{6z^3 dz}{1-2z^4}$.

Задание № 3. Проинтегрируйте функции по частям:

1. $\int x \cdot \sin x dx$;
2. $\int x \cdot \ln x dx$.

2 вариант.

Задание № 1. Вычислите интегралы следующих функций:

1. $\int \frac{3dx}{x}$;
2. $\int -5z dx$;
3. $\int 5x^{20} dx$;
4. $\int 4(x^2 - x + 3)dx$;
5. $\int \cos 3x dx$;
6. $\int \frac{2dx}{9+x^2}$;
7. $\int \sqrt[4]{x^3} dx$;
8. $\int \left(\frac{7}{8} x^{\frac{1}{5}} - \frac{4}{3} x^{\frac{2}{3}} + 4 \right) dx$;
9. $\int 3(2x^2 - 1)^2 dx$;
10. $\int \frac{x^2 - x + x^3 + 1}{x} dx$

Задание № 2. Проинтегрируйте функции способом подстановки:

1. $\int \frac{dx}{(4-3x)^3}$;
2. $\int \sqrt{(2x+1)^3} dx$;
3. $\int \frac{2x dx}{x^2+1}$;
4. $\int \frac{\cos x}{2\sin x + 1} dx$;
5. $\int \frac{x^7 dx}{x^8 + 4}$;
6. $\int \frac{2x-4}{x^2 - 4x - 6} dx$.

Задание № 3. Проинтегрируйте функции по частям:

1. $\int x \cdot \cos x dx$;
2. $\int x^2 \cdot e^x dx$.

3 вариант.

Задание № 1. Вычислите интегралы следующих функций:

1. $\int\left(\frac{3}{x}+2x\right)dx$;

2. $\int(5x^{20}-\frac{1}{\sqrt{x}})dx$;

3. $\int 4(x^2-x+3)dx$;

4. $\int(\cos x-e^x)dx$;

5. $\int\frac{5dx}{\sin^2 x}$;

6. $\int\frac{2dx}{9+x^2}$;

7. $\int\left(\cos x-\frac{4}{\cos^2 x}\right)dx$;

8. $\int\frac{2}{x^2+25}dx$;

9. $\int\frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

10. $\int\left(\frac{1}{x}+\sin x\right)dx$.

Задание № 2. Проинтегрируйте функции способом подстановки:

1. $\int\frac{dz}{(5z+1)^3}$;

2. $\int\frac{x^2dx}{x^3-2}$;

3. $\int\frac{5dx}{x-3}$;

4. $\int\frac{\cos x}{2\sin x+1}dx$;

5. $\int\sqrt{(2x+1)}\,dx$;

6. $\int\frac{x^7dx}{x^8+4}$;

Задание № 3. Проинтегрируйте функции по частям:

1. $\int x\cdot\sin x dx$;

2. $\int\ln x\cdot e^x dx$.

4 вариант.

Задание № 1. Вычислите интегралы следующих функций:

1. $\int \frac{5dx}{\sin^2 x}$;

2. $\int \frac{2}{x^2+25}dx$;

3. $\int (2x - 3\sqrt{x} + \sin x)dx$;

4. $\int \frac{3dx}{\sqrt{x}}$;

5. $\int (\cos x + tgx + 5)dx;$;

6. $\int \frac{dz}{3\sqrt{1-z^2}}$;

7. $\int \frac{3dx}{x}$;

8. $\int (\frac{2}{x} - 6x + e^x)dx;$;

9. $\int (\frac{1}{2\sqrt{x}} + ctgx)dx;$;

10. $\int (2 - 3x + 5x^2)dx$.

Задание № 2. Проинтегрируйте функции способом подстановки:

1. $\int \frac{6x^3dx}{1-2x^4}$;

2. $\int \frac{dx}{(4-3x)^3}$;

3. $\int \frac{\cos xdx}{\sin^2 x}$;

4. $\int \frac{2xdx}{x^2+1}$;

5. $\int \frac{2x}{x^2-6}dx$;

6. $\int \frac{4xdx}{5+2x^2}$.

Задание № 3. Проинтегрируйте функции по частям:

1. $\int x^2 \cdot e^x dx$;

2. $\int e^x \cdot \cos xdx$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

По теме: Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, однородные

Цель: научиться находить общие и частные решения дифференциального уравнения с

разделяющимися переменными, однородного дифференциального уравнения.

Теория:

<u>Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.</u>

Определение: Уравнение вида $f(x)P(y)dx + \varphi(y)Q(x)dy = 0$называется уравнением с *разделяющимися переменными.*

Это уравнение можно привести к виду $f(x)dx + \varphi(y)dy = 0$, разделив все члены исходного уравнения на произведение $P(y)Q(x)$.

<u>Пример 1:</u> решить уравнение $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$.

Решение:

- Разделим все члены данного уравнения на xy, получим: $\frac{(1+x)ydx}{xy} + \frac{(1-y)xdy}{xy} = 0$

  $\frac{(1+x)dx}{x} + \frac{(1-y)dy}{y} = 0$.

- Перенесём второе слагаемое в правую часть: $\frac{(1+x)dx}{x} = -\frac{(1-y)dy}{y}$

  $\frac{(1+x)dx}{x} = \frac{(y-1)dy}{y}$.

- Проинтегрируем полученное уравнение: $\int \frac{1+x}{x}dx = \int \frac{y-1}{y}dy$.

- Разделим почленно числитель на знаменатель: $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x}\right)dx = \int \left(\frac{y}{y} - \frac{1}{y}\right)dy$

  $\int \left(\frac{1}{x} + 1\right)dx = \int \left(1 - \frac{1}{y}\right)dy$.

- Интегрируя, получим: $\int \frac{1}{x}dx + \int 1dx = \int 1dy - \int \frac{1}{y}dy$

$$\ln x + x = y - \ln y + C \ .$$

- Произвольную постоянную C можно обозначить через $-\ln C$, тогда получим: $\ln x + x = y - \ln y - \ln C$.

- Перенесём натуральные логарифмы в левую часть и представим их сумму как логарифм произведения: $\begin{matrix} \ln x + \ln y + \ln C = y - x \\ \ln\left(\ xyC \ \right) = y - x \end{matrix}$.

- По определению логарифма числа получим: $xyC = e^{y-x}$. Это и есть общее решение данного дифференциального уравнения.

<u>Пример 2:</u> найти частное решение уравнения $(1+y^2)dx = \sqrt{x}dy$, если $y=1$ при $x=0$.

Решение:

- Разделим все члены данного уравнения на $(1+y^2)\cdot\sqrt{x}$, получим: $\frac{(1+y^2)dx}{(1+y^2)\cdot\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}dy}{(1+y^2)\cdot\sqrt{x}}$

$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{1+y^2}$

- Проинтегрируем полученное уравнение: $\int\frac{dx}{\sqrt{x}} = \int\frac{dy}{1+y^2}$.

- Интегрируя, получим: $2\sqrt{x} = arctgy + C$. Это есть общее решение дифференциального уравнения.

- Согласно условию $y=1$ при $x=0$, подставим данные значения в общее решение: $2\sqrt{0} = arctg1 + C$.

- Выразим C: $0 = arctg1 + C$

$$C = -\,arctg1$$

$$C = -\frac{\pi}{4}.$$

- При найденном значении C из общего решения получим: $2\sqrt{x} - arctgy + \frac{\pi}{4} = 0$. Это и есть частное решение дифференциального уравнения.

<u>Однородные дифференциальные уравнения.</u>

Определение: *однородным* дифференциальным уравнением называется уравнение, которое может быть представлено в виде $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Для интегрирования такого уравнения производят замену переменно, полагая $\frac{y}{x} = t$ или $y = xt$. Эта подстановка приводит к дифференциальному уравнению относительно x и t, в котором переменные отделяются, после чего можно интегрировать. Для получения окончательного ответа переменную t заменяют отношением $t = \frac{y}{x}$.

<u>Пример 3:</u> решить уравнение $x^2dy + y^2dx = xydy$.

Решение:

- Преобразуем данное уравнение: $y^2dx = xydy - x^2dy$

$$y^2dx = (xy - x^2)dy.$$

- Разделим полученное уравнение на $(xy - x^2)dx$ и получим: $\frac{y^2dx}{(xy - x^2)dx} = \frac{(xy - x^2)dy}{(xy - x^2)dx}$

$$\frac{y^2}{xy - x^2} = \frac{dy}{dx} \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2} \text{ …..(1)}$$

- Введём подстановку $y = xt$ ….. (2)

- Продифференцируем данную подстановку: $y' = (xt)' = x't + xt'$ или $\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$ …..(3)

- Подставим в уравнение (1) вместо y и $\frac{dy}{dx}$ их значения из равенств (2) и (3), получим: $t + x\frac{dt}{dx} = \frac{(xt)^2}{x \cdot (xt) - x^2}$

$$t + x\frac{dt}{dx} = \frac{x^2 t^2}{x^2 t - x^2}$$

$$t + x\frac{dt}{dx} = \frac{x^2 t^2}{x^2 (t - 1)}$$

$$t + x\frac{dt}{dx} = \frac{t^2}{(t - 1)}$$

$$x\frac{dt}{dx} = \frac{t^2}{(t - 1)} - t$$

$$x\frac{dt}{dx} = \frac{t^2 - t(t - 1)}{(t - 1)}$$

$$x\frac{dt}{dx} = \frac{t^2 - t^2 + t}{(t - 1)}$$

$$x\frac{dt}{dx} = \frac{t}{(t - 1)}$$

- Разделим переменные в полученном уравнении: $x\frac{dt}{dx} = \frac{t}{(t-1)}$ для этого:

умножим на dx: $xdt = \frac{t}{(t-1)}dx$

разделим на x: $dt = \frac{t}{(t-1)} \cdot \frac{dx}{x}$

разделим на $\frac{t}{(t-1)}$: $\frac{t-1}{t}dt = \frac{dx}{x}$

числитель левой части почленно разделим на t: $\left(1 - \frac{1}{t}\right)dt = \frac{dx}{x}$.

- Проинтегрируем полученное уравнение: $\int \left(1 - \frac{1}{t}\right)dt = \int \frac{dx}{x}$

$$\int 1dt - \int \frac{1}{t}dt = \int \frac{dx}{x}$$

$$t - \ln t = \ln x + C$$

- Произвольную постоянную C можно обозначить через $\ln C$, тогда получим: $t - \ln t = \ln x + \ln C$.
- Выразим t: $t = \ln t + \ln x + \ln C$.
- Представим сумму логарифмов как логарифм произведения: $t = \ln(Cxt)$.
- По определению логарифма числа получим: $Cxt = e^t$.
- Заменим t на $\frac{y}{x}$, а C на $\frac{1}{C}$: $\frac{1}{C} x \frac{y}{x} = e^{\frac{y}{x}}$ или $\frac{1}{C} y = e^{\frac{y}{x}}$.
- Выразим y: $y = Ce^{\frac{y}{x}}$. Это и есть общее решение данного дифференциального уравнения.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение дифференциального уравнения.
2. Что является общим решением дифференциального уравнения?
3. Что является частным решением дифференциального уравнения?
4. Дайте определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
5. Приведите алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
6. Дайте определение однородного дифференциального уравнения.
7. Какие подстановки необходимы для решения однородного дифференциального уравнения?

1 вариант.

Задание № 1. Решите дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

1. $y^2 dx + (x-2)dy = 0$;
2. $y^2 dx - (3xy + 2x)dy = 0$.

Задание № 2. Найдите частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными при заданных условиях:

$$y' \cdot e^x = y^2, \quad y = 1 \text{ при } x = 0.$$

Задание № 3. Решите однородное дифференциальное уравнение:

$$xyy' = y^2 + 2x^2.$$

2 вариант.

Задание № 1. Решите дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

1. $(1 + x^2)dx + y^2 dy = 0$;
2. $(1 + y^2)dx + \sqrt{1 - x^2}\,dy = 0$.

Задание № 2. Найдите частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными при заданных условиях:

$$y'(x^2 + 1) = 2xy, \quad y = 1 \text{ при } x = 0.$$

Задание № 3. Решите однородное дифференциальное уравнение:

$$y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}.$$

3 вариант.

Задание № 1. Решите дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

1. $(1 + y)dx = (x - 1)dy$;
2. $x^2 dy - (2 + 3y)dx = 0$;
3. $x^2(1 - y)dy + y^2(1 + x)dx = 0$.

Задание № 2. Найдите частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными при заданных условиях:

$$y'(1 - x) = 1 + y, \quad y = 3 \text{ при } x = -2.$$

Задание № 3. Решите однородное дифференциальное уравнение:

$(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$.

4 вариант.

Задание № 1. Решите дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

1. $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$;

2. $xy' + y = 0$.

Задание № 2. Найдите частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными при заданных условиях:

$y'(2+x) = 1-y, \quad y = 1 \ \text{при} \ x = 2$.

Задание № 3. Решите однородное дифференциальное уравнение:

$xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5.

по теме: «Линейные дифференциальные уравнения, с постоянными коэффициентами».

Цель: научиться находить общее и частное решение линейных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Теория:

Линейные дифференциальные уравнения.

Линейными дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, которые содержат неизвестную

функцию и её производную в первой степени. Такие уравнения имеют следующий вид: $y' + yf(x) = \varphi(x)$ или $\dfrac{dy}{dx} + yf(x) = \varphi(x)$.

Для решения линейных дифференциальных уравнений пользуются подстановками: $y = uv$ и $\dfrac{dy}{dx} = v\dfrac{du}{dx} + u\dfrac{dv}{dx}$.

<u>Пример 1:</u> решить уравнение $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x} = x$.

Решение:

- В заданном уравнении заменим $y = uv$ и $\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$:
$v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} - \frac{2uv}{x} = x$ ….(1)

- Сгруппируем второе и третье слагаемое и вынесем u за скобку:
$v\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{2v}{x}\right) = x$ ….(2)

- Примем выражение, стоящее в скобках, равным нулю: $\frac{dv}{dx} - \frac{2v}{x} = 0$ ….(3)

- Решим уравнение (3) : $\frac{dv}{dx} - \frac{2v}{x} = 0$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x}.$$

- разделим на v: $\frac{dv}{vdx} = \frac{2}{x}$.

- умножим на dx: $\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x}$.

- Проинтегрируем данное уравнение: $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2dx}{x}$

$$\int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln v = 2\ln x$$

$\ln v = \ln x^2$, отсюда $v = x^2$ …(4)

- Так как в уравнении (2) скобка принята равной нулю, то уравнение (2) примет вид: $v\frac{du}{dx} = x$ …(5)

- В уравнение (5) подставим значение v из уравнения (4): $x^2\frac{du}{dx} = x$.

- Разделим полученное уравнение на x^2: $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$.

- Умножим на dx : $du = \frac{dx}{x}$.
- Проинтегрируем данное уравнение: $\int du = \int \frac{dx}{x}$.
- Получим: $u = \ln x + C$ и заменим произвольную постоянную C на $\ln C$.
- Тогда получим: $u = \ln x + \ln C$ или $u = \ln xC$ …..(6).
- Заменим u и v в подстановке $y = uv$, получим $y = x^2 \ln xC$ - это и есть общее решение линейного дифференциального уравнения.

Дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Общий вид линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$y'' + py' + qy = 0 \; \ldots(1)$$

Алгоритм решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

- Составить *характеристическое уравнение.* Для его составления достаточно в уравнение (1) вместо y'', y' и y написать соответственно k^2, k и 1. Получим квадратное уравнение $k^2 + pk + q = 0$.
- Решить полученное квадратное уравнение и найти его корни k_1 и k_2.
- В зависимости от значения корней выбрать частное и общее решение уравнения.

Рассмотрим три случая решения уравнения (1) :

	Корни характеристического уравнения k_1 **и** k_2	**Частное решение**	**Общее решение**
1	k_1 и k_2 действительные и различные	$y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

2	k_1 и k_2 действительные и равные $k_1 = k_2 = k$	$y_1 = e^{k\ x}$ и $y_2 = xe^{k\ x}$	$y = C_1 e^{k\ x} + C_2 x e^{k\ x}$
3	k_1 и k_2 мнимые, т.е. $k_1 = a + bi$, $k_2 = a - bi$, где $b \neq 0$	$y_1 = e^{ax}\cos(bx)$ и $y_2 = e^{ax}\sin(bx)$	$y = e^{ax}\left(C_1\cos(bx) + C_2\sin(bx)\right)$

<u>Пример 1:</u> решить уравнение $y'' + 10y' - 11y = 0$.

Решение:

- Составим характеристическое уравнение: $k^2 + 10k - 11 = 0$.
- Решим его и найдём, что $k_1 = 1$ и $k_2 = -11$. Это два действительных и различных корня.
- Получим два частных линейно независимых решения $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-11x}$.
- Общим решением данного уравнения будет: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-11x}$.

<u>Пример 2:</u> решить уравнение $y'' + 14y' + 49y = 0$.

Решение:

- Составим характеристическое уравнение: $k^2 + 14k + 49 = 0$.
- Решим его и найдём, что $k_1 = -7$ и $k_2 = -7$. Это два действительных и равных корня.
- Получим два частных линейно независимых решения $y_1 = e^{-7x}$ и $y_2 = xe^{-7x}$.
- Общим решением данного уравнения будет: $y = C_1 e^{-7x} + C_2 x e^{-7x}$.

<u>Пример 3:</u> решить уравнение $y'' + 6y' + 13y = 0$.

Решение:

- Составим характеристическое уравнение: $k^2 + 6k + 13 = 0$.

- Решим его и найдём, что $D=36-52=-16$, тогда $\sqrt{D}=\sqrt{-16}=4i$ и $k_{1,2}=\dfrac{-6\pm 4i}{2}=\dfrac{2(-3\pm 2i)}{2}=-3\pm 2i$, т. е. $k_1=-3+2i$ и $k_2=-3-2i$. Это два мнимых корня, где $a=-3,\ b=2$.

- Получим два частных линейно независимых решения $y_1=e^{-3x}\cos 2x$ и $y_2=e^{-3x}\sin 2x$.

- Общим решением данного уравнения будет: $y=e^{-3x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)$.

<u>Пример 4:</u> найти частное решение уравнения $y''-3y'+2y=0$, если $y=2,\ y'=3$ при $x=0$.

Решение:

- Составим характеристическое уравнение: $k^2-3k+2=0$.

- Решим его и найдём, что $k_1=1$ и $k_2=2$. Это два действительных и различных корня.

- Получим два частных линейно независимых решения $y_1=e^x$ и $y_2=e^{2x}$.

- Общим решением данного уравнения будет: $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ …..(1)

- Найдём производную уравнения (1): $y'=C_1e^x+2C_2e^{2x}$ …..(2)

- Согласно условию $y=2,\ y'=3$ при $x=0$, из уравнений (1) и (2) составим систему: $\begin{cases}2=C_1e^0+C_2e^{2\cdot 0}\\ 3=C_1e^0+2C_2e^{2\cdot 0}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2=C_1+C_2\\ 3=C_1+2C_2\end{cases}$.

- Из второго уравнения вычтем первое $\begin{cases}1=C_2\\ 2=C_1+C_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_2=1\\ 2=1+C_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_2=1\\ C_1=1\end{cases}$.

- Подставим в уравнение (1) вместо C_1 и C_2 найденные значения получим частное решение данного дифференциального уравнения: $y=1\cdot e^x+1\cdot e^{2x}=e^x+e^{2x}$.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

2. Что является общим решением линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами?
3. Дайте определение линейного дифференциального уравнения.
4. Какие подстановки используются при решении линейного дифференциального уравнения?

Вариант 1.

Задание № 1. Решите линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

а) $y'' - 8y' + 16y = 0$;

б) $y'' - y' - 2y = 0$;

в) $2y'' + 2y' + 5y = 0$.

Задание № 2. Найти частное решение уравнения:

$y'' - y = 0$, если $y = 2$, $y' = 0$ при $x = 0$;

Задание № 3. Решите линейное дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$

Вариант 2.

Задание № 1. Решите линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

а) $y'' - 9y = 0$;

б) $y'' - 4y' + 4y = 0$;

в) $2y'' + 4y' + 4y = 0$.

Задание № 2. Найти частное решение уравнения:

$y'' - 10y' + 25y = 0$, если $y = 2$, $y' = 8$ при $x = 0$;

Задание № 3. Решите линейное дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2$

Вариант 3.

Задание № 1. Решите линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

а) $y'' - 10y' + 25y = 0$;

б) $9y'' - 12y' + 4y = 0$;

в) $y'' + 2y' + 17y = 0$.

Задание № 2. Найти частное решение уравнения:

$y'' + 6y' + 9y = 0$, если $y = 1$, $y' = 2$ при $x = 0$;

Задание № 3. Решите линейное дифференциальное уравнение $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = x^3$.

Вариант 4.

Задание № 1. Решите линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

а) $y'' - 14y' + 49y = 0$;

б) $4y'' - 25y' + 25y = 0$;

в) $y'' + 16y = 0$.

Задание № 2. Найти частное решение уравнения:

а) $y'' - 4y' + 5y = 0$, если $y = 1$, $y' = -1$ при $x = 0$.

Задание № 3. Решите линейное дифференциальное уравнение $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2y}{x} = x^2$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

По теме: «Числовые ряды. Признаки сходимости»

Цель: научиться исследовать числовые ряды , используя признаки сходимости.

Теория.

Определение и основные понятия.

Числовым рядом называется выражение вида $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n + \ldots$ (1), в котором a_1, a_2, a_3, a_n.. (члены ряда) – определенные числа, для которых известен закон, позволяющий определить каждый член a_n, по заданному номеру n.

Выражение, определяющее n- *ый* член ряда (1) при любом значении n = 1, 2, 3, 4…., называется общим членом ряда и обозначается a_n. Числа $A_1 = a_1$, $A_2 = a_1 + a_2$, $A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots . A_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n$ называются частичными суммами.

Сумма ряда. Сходимость и расходимость ряда.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, то говорят, что ряд сходится; число A называют его суммой и записывают: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$. Если предела не существует, то говорят, что ряд расходится.

Признаки сходимости числовых рядов.

<u>Необходимый признак сравнения ряда.</u>

Общий член a_n сходящегося ряда стремится к нулю при $n\to\infty$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$(необходимый признак не выполняется), то ряд $a_1 + a_2 + a_3 + ...+ a_n + ...$ расходится. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то вопрос о сходимости ряда исследуется дополнительно по достаточному признаку.

<u>Пример 1: </u>Используя необходимый признак исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{100n-1}$.

Решение:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{100n-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{100n}{n}-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{100-\frac{1}{n}} = \left|\frac{1}{100-\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{100-0} = \frac{1}{100}\right| =$$

$$= \frac{1}{100} \neq 0$$

Следовательно, необходимый признак не выполняется, и данный ряд расходится.

<u>Достаточные признаки сходимости числовых рядов.</u>

1. <u>*Признак Даламбера.*</u> Пусть все члены ряда (1) положительны и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, тогда

а) если $l \langle 1$, то ряд сходится;

б) если $l \rangle 1$, то ряд расходится;

в) если $l = 1$, то признак определённого ответа не даёт.

<u>Пример 2:</u> при помощи признака Даламбера исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

Решение:

- Записываем общий член ряда: $a_n = \dfrac{n}{2^n}$ ….(1) ;

- Находим a_{n+1}, для чего в (1) подставляем *n+1* вместо *n* : $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{2^{n+1}} = \dfrac{n+1}{2^n \cdot 2}$;

- Находим отношение a_{n+1}- го члена к a_n: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{2^n \cdot 2} : \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{n+1}{2^n \cdot 2} \cdot \dfrac{2^n}{n} = \dfrac{n+1}{2n}$;

- Вычислим предел этого отношения при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{2n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \left| \frac{1 + \frac{1}{\infty}}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \langle 1.$$

Таким образом, по признаку Даламбера, данный ряд сходится.

2. <u>*Признак Коши.*</u> Пусть все члены ряда (1) положительны и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, тогда

а) если $l \langle 1$, то ряд сходится;

б) если $l \rangle 1$, то ряд расходится;

в) если $l = 1$, то признак определённого ответа не даёт.

<u>Пример 3:</u> при помощи признака Коши исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$.

Решение:

- Записываем общий член ряда: $a_n = \dfrac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$;

- Применим признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}{3} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

$$=\frac{1}{3}\left|\ \left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}=(1+0)^{\infty}=1^{\infty}=1\right|=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}\langle 1.$$

Таким образом, по признаку Коши, данный ряд сходится.

3. *<u>Признак сравнения рядов.</u>* Пусть даны два ряда с положительными членами:

$$a_1+a_2+a_3+.....+a_n+...\ (\ 1\ )\qquad \text{и} \qquad b_1+b_2+b_3+.....+b_n+...\ (\ 2\ )$$

и пусть $a_1 \le b_1$, $a_2 \le b_2$, $a_3 \le b_3$, …. $a_n \le b_n$…. Тогда:

- если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1);

- если расходится ряд (1), то расходится и ряд (2).

<u>Пример 4:</u> При помощи сравнения рядов установить, сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$ …(1)

Решение:

- Необходимый признак сходимости ряда выполняется, т.к. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}=0$.
- Исследуем данный ряд по достаточному признаку сравнения рядов. Для сравнения выберем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ ....(2)
- Сравним члены исследуемого ряда (1) с соответствующими членами ряда (2) :

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3\cdot 2^3}\le\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{5\cdot 2^5}\le\frac{1}{2^3}$, ...т.е. члены ряда (1) не больше соответствующих членов ряда (2).

- Ряд (2) сходится, так как его члены являются членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2}\langle 1$. Следовательно ряд (1) тоже сходится.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение числового ряда.
2. Приведите примеры частичных сумм числового ряда.

3. Сформулируйте необходимый признак сходимости рядов.
4. Сформулируйте достаточные признаки сходимости рядов.

1 вариант.

Задание № 1. Исследуйте ряд на сходимость, применяя сначала необходимый признак, а затем признак Даламбера:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n+2}$ю

Задание № 2. Исследуйте ряд на сходимость, используя признак Коши:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n}\right)^{n}$.

Задание № 3. Исследуйте ряд на сходимость при помощи сравнения рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n+2}$.

2 вариант.

Задание № 1. Исследуйте ряд на сходимость, применяя сначала необходимый признак, а затем признак Даламбера:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3\cdot 2^{n}}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{2n}$.

Задание № 2. Исследуйте ряд на сходимость, используя признак Коши:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n}{3n-4}\right)^{n}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$.

Задание № 3. Исследуйте ряд на сходимость при помощи сравнения рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+1}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$.

3 вариант.

Задание № 1. Исследуйте ряд на сходимость, применяя сначала необходимый признак, а затем признак Даламбера:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n-1}$.

Задание № 2. Исследуйте ряд на сходимость, используя признак Коши:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{n+1}\right)^n$.

Задание № 3. Исследуйте ряд на сходимость при помощи сравнения рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{5^n+1}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$.

4 вариант.

Задание № 1. Исследуйте ряд на сходимость, применяя сначала необходимый признак, а затем признак Даламбера:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)^2}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n-1}$.

Задание № 2. Исследуйте ряд на сходимость, используя признак Коши:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n}{n-1}\right)^n$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

Задание № 3. Исследуйте ряд на сходимость при помощи сравнения рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{5^n}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-2}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7

По теме: Вычисление значения функций с помощью ряда Маклорена

Цель: научиться раскладывать функции в ряд Маклорена.

Теория.

Пусть функция $f(x)$ есть многочлен n – ой степени, т.е.

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+a_3(x-x_0)^3+\ldots+a_n(x-x_0)^n \quad \ldots..(\ 1\ )$$

Найдем коэффициенты $a_1, a_2, a_3, \ldots.a_n$:

- при $x=x_0, a_0=f(x_0)$;
- $f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\ldots+na_n(x-x_0)^{n-1}$

при $x=x_0$, $a_1=\frac{f'(x_0)}{1!}$;

- $f''(x)=2a_2+6a_3(x-x_0)+\ldots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$

при $x=x_0$, $a_2=\frac{f''(x_0)}{2!}$;

- $f'''(x)=6a_3+\ldots+n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3}$

при $x=x_0$, $a_3=\frac{f'''(x_0)}{3!}$;

…………………………………………………………..

при $x=x_0$, $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

После подстановки выражений $a_1, a_2, a_3, \ldots.\ a_n$ в формулу (1) получим так называемый ряд Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots\ldots\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

При $x_0 = 0$, получим ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 + \ldots\ldots\ldots \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + \ldots \quad (2),$$ где

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k \quad (3)$$

Приведем ряды Маклорена для некоторых функций:

- $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \ldots. + \frac{u^n}{n!} + \ldots$ (сходится при любом u);
- $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}u^n}{n} + \ldots$ (сходится при $-1 \langle u \langle 1$);
- $(1+u)^m = 1 + mu + \frac{m(m-1)}{2!}u^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}u^3 + \ldots$ (сходится при $-1 \langle u \langle 1$);
- $\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \ldots$ (сходится при любом u);
- $\cos u = u - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \ldots$ (сходится при любом u).

Пример 1 : Разложить в ряд Маклорена функцию $\sin\frac{x}{2}$.

Решение:

первый способ:

- воспользуемся разложением в ряд Маклорена функции $\sin u$: $\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \ldots$
- пусть $u = \frac{x}{2}$, тогда получим $\sin\frac{x}{2} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3\cdot 3!} + \frac{x^5}{2^5\cdot 5!} - \frac{x^7}{2^7\cdot 7!} + \ldots$

второй способ:

- ряд Маклорена имеет вид: $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 + \ldots\ldots\ldots \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + \ldots$

- найдем коэффициенты ряда Маклорена :

$$f(x)=\sin\frac{x}{2}, \qquad f(0)=\sin\frac{0}{2}=\sin 0=0$$

$$f'(x)=\left(\sin\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, \qquad f'(0)=\frac{1}{2}\cos 0=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)'=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}=-\frac{1}{2^2}\sin\frac{x}{2}, \qquad f''(0)=-\frac{1}{2^2}\sin 0=0$$

$$f'''(x)=\left(\frac{1}{2^2}\sin\frac{x}{2}\right)'=-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2^3}\cos\frac{x}{2}, \qquad f'''(0)=-\frac{1}{2^3}\cos 0=-\frac{1}{2^3}$$

$$f^{(IV)}=\left(-\frac{1}{2^3}\cos\frac{x}{2}\right)'=-\frac{1}{2^3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2^4}\sin\frac{x}{2}, \qquad f^{(IV)}=\frac{1}{2^4}\sin 0=0$$

$$f^{(V)}=\left(\frac{1}{2^4}\sin\frac{x}{2}\right)'=-\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2^5}\cos\frac{x}{2}, \qquad f^{(V)}=-\frac{1}{2_5}\cos 0=-\frac{1}{2^5}$$

……………………………………………………………………………………

- Заметим, что производные четного порядка равны 0, а знаки производных нечетного порядка чередуются: плюс, минус, плюс, минус и т. д. Получим:

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^3\cdot 3!}+\frac{x^5}{2^5\cdot 5!}-\frac{x^7}{2^7\cdot 7!}+\ldots$$

Контрольные вопросы:

1. Запишите ряд Тейлора.
2. Запишите ряд Маклорена.
3. Перечислите способы разложения функции в ряд Маклорена.

1 вариант.

Задание № 1. Разложите функцию $f(x)$ в ряд Маклорена двумя способами.

а) $f(x)=\sin 2x$; б) $f(x)=e^{2x}$; в) $f(x)=\cos\frac{x}{2}$;

г) $f(x)=(1+3x)^4$; д) $f(x)=\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$.

2 вариант.

Задание № 1. Разложите функцию $f(x)$ в ряд Маклорена двумя способами.

а) $f(x)=\sin\frac{x}{3}$; б) $f(x)=e^{3x}$; в) $f(x)=\cos 2x$;

г) $f(x)=\left(1+\frac{x}{2}\right)^4$; д) $f(x)=\ln(1+3x)$.

3 вариант.

Задание № 1. Разложите функцию $f(x)$ в ряд Маклорена двумя способами.

а) $f(x)=\sin 3x$; б) $f(x)=e^{4x}$; в) $f(x)=\cos\frac{x}{3}$;

г) $f(x)=(1+2x)^5$; д) $f(x)=\ln\left(1+\frac{x}{4}\right)$.

4 вариант.

Задание № 1. Разложите функцию $f(x)$ в ряд Маклорена двумя способами.

а) $f(x)=\sin\frac{x}{4}$; б) $f(x)=e^{5x}$; в) $f(x)=\cos 3x$;

г) $f(x)=\left(1+\frac{x}{2}\right)^3$; д) $f(x)=\ln(1+2x)$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8

По теме: Вероятность случайного события. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Цель: научиться решать задачи по комбинаторике, на классическое определение вероятности и теорем сложения и умножения вероятностей.

Теория.

1. Задачи, в которых производится подсчет всех возможных различных комбинаций, составленных из конечного числа элементов по некоторому правилу называются *комбинаторными.* Раздел математики, занимающийся их решением, называется комбинаторикой.

Размещением из n элементов по m называется любой упорядоченный набор из m различных элементов, выбранных из совокупности в n элементов. Число всевозможных размещений из n элементов по m в каждом равно $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Например: Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различные и нечетные?
Решение: т.к. нечетных цифр пять, а именно 1, 3, 5, 7, 9, то эта задача сводится к выбору и размещению на две разные позиции двух из пяти различных цифр, т.е. указанных чисел будет: $A_5^2 = \dfrac{5!}{(5-2)!} = \dfrac{5!}{3!} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 4\cdot 5 = 20$. Ответ 20 двузначных чисел.

Перестановка – размещение из n элементов по n. Число перестановок из n элементов равно $P = n!$

Например: Составьте всевозможные перестановки из элементов множества A = $\{a, b, c, h\}$.

Решение: число элементов множества $n = 4$. Составим перестановку $P = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$. Ответ: 24 перестановки.

Сочетание - подмножество из m элементов множества n элементов, порядок которых не играет роли. Число сочетаний их n элементов по m в каждом равно $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$.

Например: Сколькими способами читатель может выбрать две книжки из шести имеющихся?
Решение: Число способов равно числу сочетаний из шести книжек по две, т.е.

m = 2, n = 6. Тогда $C_6^2 = \frac{6!}{2!\cdot(6-2)!} = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{(1\cdot 2)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)} = 15$. Ответ: 15 способами.

2. Основными понятиями в теории вероятностей являются понятия *события* и *вероятности события*. Под *событием* понимается такой результат эксперимента или наблюдения, который при реализации данного комплекса условий может произойти или не произойти. Обозначается событие большими буквами латинского алфавита A, B, C и т. д. если событие неизбежно произойдет при каждой реализации комплекса условий, то оно называется *достоверным*; если же оно не может произойти, то *невозможным*. Если событие при реализации комплекса условий может произойти, а может не произойти, то оно называется *случайным*.

Вероятностью события А называют отношение числа m исходов, благоприятствующих этому событию, к числу n всех равновозможных исходов, т. е. $P = \frac{m}{n}$.

Например: В ящике 15 шаров: 5 белых и 10 черных. Какова вероятность вынуть из ящика белый шар?

Решение: число всех шаров n = 15, число белых шаров m = 5. Тогда вероятность вынуть белый шар $P = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \approx 0,33$. Ответ: Р = 0,33 .

Например: В корзине 10 яблок: 6 красных и 4 желтых. Вынули два яблока. Какова вероятность того, что оба яблока красные?

Решение: число всех случаев – взять 2 яблока из 10 : n = $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!\cdot(10-2)!} = 45$. Число благоприятствующих случаев взять 2 яблока из 6 красных: $m = C_6^2 = \frac{6!}{2!\cdot(6-2)!} = 15$. Тогда вероятность достать 2 красных яблока $P = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.

Контрольные вопросы:

1. Что изучает комбинаторика?
2. Перечислите основные виды комбинаций.
3. Что называется перестановкой? Запишите формулу.
4. Что называется размещением? Запишите формулу.
5. Что называется сочетанием? Запишите формулу.
6. Дайте классическое определение вероятности.
7. Какие события называются достоверным? невозможным? случайным?

1 вариант.

Задание № 1. Решите задачи по комбинаторике:

1. В ящике 20 фруктов: 15 яблок и 5 груш. Какова вероятность вынуть из ящика апельсин?
2. Из пункта А в пункт В ведут 5 дорог. Колонну автомашин необходимо разделить и направить по трём дорогам из имеющихся пяти. Сколькими способами это можно сделать?
3. В местные органы самоуправления выбрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, заместителя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?
4. Вычислите C_{15}^{12}.

Задание № 2. Решите задачи по теории вероятностей.

1. В читальном зале имеется 6 учебников по теории вероятностей, из которых 3 в переплёте. Библиотекарь на удачу взял 2 учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в переплёте.
2. В ящике 10 деталей, среди которых 6 окрашенных. Из ящика извлекли 2 детали. Найти вероятность того, что все извлечённые детали окажутся окрашенными?
3. Произведя 100 выстрелов, стрелок попал в цель 86 раз. Найти вероятность попадания в цель данного стрелка.
4. В лотерее 100 билетов. Из них 50 выигрышных и 50 – невыигрышных. Куп
5. лено 2 билета. Какова вероятность того , что оба билета выигрышные?

2 вариант.

Задание № 1. Решите задачи по комбинаторике:

1. Сколькими способами можно составить трёхцветный полосатый флаг, если имеется материал пяти цветов?
2. Сколькими способами можно распределить 12 классных комнат под 12 учебных кабинетов?
3. Из спортивного клуба, насчитывающего 15 членов, необходимо составить команду из 4 человек для участия в беге на 1000 м. Сколькими способами можно это сделать?
4. Вычислите C_{16}^{14}.

Задание № 2. Решите задачи по теории вероятностей.

1. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень первого стрелка – 0,7, а второго – 0,8. Найти вероятность того, что один из стрелков попадёт в мишень.
2. Среди 100 лотерейных билетов 5 выигрышных. Найти вероятность того, что2 выбранных билета будут выигрышными.
3. Студент знает 20 вопросов из 25. Найти вероятность того, что студент знает 2 предложенных ему экзаменатором вопроса.
4. В группе 25 студентов, среди которых 8 отличников. Найти вероятность того, что среди 6 отобранных студентов все отличники.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9.

По теме: Случайные величины. Их виды и числовые характеристики

Цель: научиться вычислять математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение, графически изображать функцию распределения.

Теория.

Случайные величины. Функция распределения и плотность распределения случайной величины.

Величина называется *случайной*, если в результате испытания она принимает одно заранее неизвестное значение из некоторого числового множества. Случайная величина называется *дискретной*, если она принимает значения из некоторого фиксированного конечного или счетного множества.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между её возможными значениями и их вероятностями. Закон распределения задается аналитически, графически или таблично.

Функцией распределения случайной величины X называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение меньшее *x*, т.е. $F(x) = P(\ X \rangle\ x\ )$.

Свойства функции распределения:

1. Значения функции распределения $F(x)$ принадлежат отрезку $\left[\ 0;1\ \right]$; $0 \le F(x) \le 1$.
2. $F(x)$ - неубывающая функция, т.е. $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 \rangle x_1$.
3. Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $\left(\ a\ ;b\ \right)$, то $F(x)= 0$ при $x \le a$ и $F(x)= 1$ при $x \ge b$.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины называют первую производную $f(x)$ от функции распределения $F(x)$: $f(x) = F'(x)$.

Если известна функция плотности распределения $f(x)$, то функция распределения $F(x)$ находится по формуле: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Свойства плотности распределения:

1. $f(x)$ является неотрицательной функцией: $f(x) \ge 0$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины.

Математическим ожиданием M(X) дискретной случайной величины *X* называют сумму произведений всех её возможных значений на их вероятности: для дискретной случайной величины *X*, принимающей значения $x_1, x_2, x_3,....x_n$ с вероятностями соответственно $p_1, p_2, p_3, ...p_n$, имеем: $M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_n \cdot p_n$.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины называется величина

$$M(x) = \int_a^b x \cdot f(x)dx.$$

Дисперсией $D(x)$ *дискретной* случайной величины *X* называют величину, равную

$$D(x) = M(X^2) - \left(M(X) \right)^2.$$

Дисперсией $D(x)$ *непрерывной* случайной величины называется величина

$$D(x) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx - \left[M(X) \right]^2.$$

Средним квадратичным отклонением называется квадратный корень из дисперсии: $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$.

Пример 1: по заданному закону распределения дискретной случайной величины *X* найти её: 1) математическое ожидание; 2) дисперсию; 3) среднее квадратичное отклонение; 4) привести графическое изображение функции распределения.

X	17	21	29	31	35
p	0,4	0,1	0,2	0,1	0,2

Решение:

1) математическое ожидание:
$M(X) = 17 \cdot 0{,}4 + 21 \cdot 0{,}1 + 29 \cdot 0{,}2 + 31 \cdot 0{,}1 + 35 \cdot 0{,}2 = 24{,}8$.

2) дисперсия: $D(x) = M(X^2) - \left(M(X) \right)^2$

Закон распределения случайной величины X^2:

X	17^2=289	21^2=441	29^2=841	31^2=961	35^2=1225
p	0,4	0,1	0,2	0,1	0,2

Тогда $M(X^2) = 289 \cdot 0,4 + 441 \cdot 0,1 + 841 \cdot 0,2 + 961 \cdot 0,1 + 1225 \cdot 0,2 = 773,1$.

$$\left(M(X) \right)^2 = 24,8^2 = 615,4$$

$$D(X) = 773,1 - 615,4 = 98,06.$$

3) среднее квадратичное отклонение: $\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{98,06} \approx 9,9$.

4) учитывая закон распределения случайной величины X имеем:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \le 7 \\ 0,4, & 17 \langle\ x \le 21 \\ 0,5, & 21 \langle\ x \le 29 \\ 0,7, & 29 \langle\ x \le 31 \\ 0,8, & 31 \langle\ x \le 35 \\ 1, & 35 \langle\ x \end{cases}$$

5) графическое изображение функции распределения.

Пример 2:

Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = c(4x^2 + 2x)$ в интервале $(0;1)$. Найти: 1) параметр c; 2) функцию распределения $F(x)$ случайной величины X; 3) математическое ожидание; 4) дисперсию.

Решение: 1) плотность распределения должна удовлетворять условию:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Следовательно, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 c(4x^2 + 2x)dx =$

$$c\int_0^1 (4x^2 + 2x)dx = c\left(4 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 = c\left(4 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} \right) = c\left(\frac{4}{3} + 1 \right) = \frac{7}{3}c = 1 \quad .$$

Отсюда находим $c = 1 : \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{3}{7}$.

2) функцию распределения $F(x)$ находим по формуле

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{3}{7}\left(4\cdot\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}\right)=\frac{4}{7}x^3+\frac{3}{7}x^2, & 0\langle\, x\le 1\\ 1, & 1\langle\, x\end{cases}$$

3) математическое ожидание находим по формуле $M(x)=\int_a^b x\cdot f(x)dx$.

$$M(x)=\int_0^1 x\cdot\frac{3}{7}(4x^2+2x)dx=\frac{3}{7}\int_0^1\left(4x^3+2x^2\right)dx=\frac{3}{7}\left(4\cdot\frac{x^4}{4}+2\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{7}\left(1+2\cdot\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{3}=\frac{5}{7}.$$

2) дисперсию находим по формуле $D(x)=\int_a^b x^2\cdot f(x)dx-\left[\,M(X)\,\right]^2$.

2) $D(x)=\int_0^1 x^2\cdot\frac{3}{7}(4x^2+2x)dx-\left[\,M(X)\,\right]^2=\frac{3}{7}\int_0^1(4x^4+2x^3)dx-\left[M\left(X^2\right)\right]=$

$$\frac{3}{7}\left(4\cdot\frac{x^5}{5}+2\cdot\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1-\left[M\left(X^2\right)\right]=\frac{3}{7}\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{3}{7}\cdot\frac{13}{10}-\frac{25}{49}=\frac{39}{70}-\frac{25}{49}=$$

$$=\frac{273-250}{490}=\frac{23}{490}.$$

Контрольные вопросы:

1. Какая величина называется случайной?
2. Перечислите свойства функции распределения.
3. Что называется математическим ожиданием? Запишите формулу.
4. Что называется дисперсией? Запишите формулу.
5. Что называется средним квадратическим отклонением? Запишите формулу.

1 вариант.

Задание №1.

По заданному закону распределения случайной величины X найти её математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение, привести графическое изображение функции распределения.

X	11	16	20	25	30
P	0,4	0,1	0,3	0,1	0,1

Задание №2.

Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = c(x^2 + 4x)$ в интервале (0;1), вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти параметр *c*; функцию распределения случайной величины X; математическое ожидание и дисперсию величины X.

2 вариант.

Задание №1.

По заданному закону распределения случайной величины X найти её математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, привести графическое изображение функции распределения.

X	14	18	23	28	30
P	0,1	0,2	0,2	0,1	0,4

Задание №2.

Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = c(1{,}5x^2 + 2x)$ в интервале (0;1), вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти параметр *c*; функцию распределения случайной величины X; математическое ожидание и дисперсию величины X.

3 вариант.

Задание №1.

По заданному закону распределения случайной величины X найти её математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, привести графическое изображение функции распределения.

X	14	16	22	38	50
P	0,2	0,2	0,1	0,1	0,4

Задание №2.

Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = c(5x^2 + 2x)$ в интервале (0;1), вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти параметр c; функцию распределения случайной величины X; математическое ожидание и дисперсию величины X.

4 вариант.

Задание №1.

По заданному закону распределения случайной величины X найти её математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, привести графическое изображение функции распределения.

X	10	26	32	40	50
P	0,1	0,2	0,2	0,2	0,3

Задание №2.

Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = c(3x^2 + 4x)$ в интервале (0;1), вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти параметр c; функцию распределения случайной величины X; математическое ожидание и дисперсию величины X.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 12.

По теме: «Множества и операции над ними».

Цель **:** научиться выполнять операции над множествами.

Теория.

Множество - одно из основных, неопределяемых понятий математики. Его синонимы – класс, совокупность, коллекция и т. д. Под множеством понимают совокупность объектов любой природы, обладающих общим свойством. Обозначается множество большими буквами латинского алфавита А, В, С и т. д. Множество считается данным, если о каждом его элементе можно сказать, является ли он элементом этого множества или нет.

Для обозначения *принадлежности* данного предмета множеству вводится символ $\in$ **,** например , если А – множество букв слова «*пух*», то $п \in$ А, $у \in$ А и $х \in$ А.

Для обозначения *непринадлежности* данного предмета множеству вводится символ $\overline{\in}$, например $к\ \overline{\in}$ А, $з \overline{\in}$ А и т. д.

Множество можно записать с помощью фигурных скобок, например $\{п, у, х\}$; означает это то же множество, что и обозначенное буквой А, иначе А = $\{п, у, х\}$.

Множества, содержащие одни и те же элементы, называются *равными*. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется странным или *пустым* (обозначается О).

Множество А называется *подмножеством* множества В, если каждый элемент множества А является так же элементом множества В. Например: если А = $\{a, b, c\}$ и В = $\{a, b, c, d\}$, то множество А есть подмножество множества В. Для обозначения понятия подмножества вводится символ $\subset$, в примере $А \subset В$.

Операции над множествами:

Пересечением двух множеств А и В называется новое множество, в которое входят те и только те элементы, которые принадлежат множеству А и множеству В. Для пересечения вводится символ $\cap$. Например, пересечением двух множеств А = $\{a, b, c, h\}$ и В = $\{a, b, c, d\}$, является множество С = $\{a, b, c\}$, т. е. $А \cap В$ = С.

Объединением двух множеств А и В называется такое множество, в которое входят те и только те элементы, которые принадлежат множеству А или множеству В. Для пересечения вводится символ $\cup$. Например, пересечением двух множеств А = $\{a, b, c, h\}$ и В = $\{a, b, c, d\}$, является множество С = $\{a, b, c, d, h\}$, т. е. А $\cup$ В = С.

Разностью двух множеств А и В называется такое множество, элементы которого есть элементы множества А, не принадлежащие множеству В. Для разности вводится символ А \ В . Например, если А $=\{a, b, c, d\}$ и В = $\{a, c, e, f\}$, то А \ В = $\{e, f\}$.

Когда множество В есть подмножество множества А, разность А \ В называют *дополнением* множества В и обозначают так: $\overline{B}$, т. е. $\overline{B}$= А \ В, если только В $\subset$ А. Например, если А = $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ и В = $\{1, 3, 4\}$, то $\overline{B}$ = $\{2, 5\}$.

Декартовым произведением множеств А и В называется множество, элементами которого являются упорядоченные пары, первая координата принадлежит множеству А, а вторая множеству В, и обозначается так: А $\times$В . Например, декартовым произведением множества А = $\{a, b\}$ и множества В = $\{c, d\}$ является множество А $\times$В = $\{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение множества.
2. Дайте определение пустого множества.
3. Дайте определение подмножества множеств.
4. Дайте определение пересечения множеств, его символ и графическое представление.
5. Дайте определение объединения множеств, его символ и графическое представление.
6. Дайте определение разности множеств, его символ и графическое представление.
7. Дайте определение дополнения множества и его символ.
8. Дайте определение декартово произведения множеств и его символ.

1 Вариант.

Задание 1. Пусть А = $\{1, 3, 5\}$. Образуйте все возможные подмножества этого множества.

Задание 2. Даны множества

А = $\{a, c, e, p\}$,

В = $\{a, b, c, d, e, f, p\}$

С = $\{a, d, f, g\}$.

Выполните следующие операции:

1. А ∪ В.
2. А ∪ С.
3. С ∪ В.
4. А ∩ В.
5. А ∩С.
6. С ∩В.
7. А ∩ В ∪ С.
8. С ∪ В ∩ А.
9. А ∩В ∩С.
10. С \ В.
11. А \ С.
12. В \ С.
13. А × В.
14. С × В.
15. А × С.
16. В × С.

2 Вариант.

Задание 1. Пусть А = $\{a, b, c\}$. Образуйте все возможные подмножества этого множества.

Задание 2. Даны множества

А = $\{1, 2, 3, 4\}$,

В = $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$,

С = $\{1, 4, 7, 9\}$.

Выполните следующие операции:

1. А ∪ В.
2. А ∪ С.
3. С ∪ В.
4. А ∩ В.
5. А ∩ С.
6. С ∩ В.
7. А ∩ В ∪С.
8. С ∪ В ∩ А.
9. А ∩ В ∩С.
10. С \ В.
11. А \ С.
12. В \ С.
13. А × В.
14. С × В.
15. А × С.
16. В × С.

3 вариант.

Задание 1. Пусть A = $\{1, b, 2\}$. Образуйте все возможные подмножества этого множества.

Задание 2. Даны множества

A = $\{\ a, b, c, d\ \}$,

B = $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$,

C = $\{1, 2, 3, 4\}$.

Выполните следующие операции:

1. A ∪ B.
2. A ∪ C.
3. C ∪ B.
4. A ∩ B.
5. A ∩ C.
6. C ∩ B.
7. A ∩ B ∪C.
8. C ∪ B ∩ A.
9. A ∩ B ∩C.
10. C \ B.
11. A \ C.
12. B \ C.
13. A × B.
14. C × B.
15. A × C.
16. B × C.

4 вариант.

Задание 1. Пусть A = $\{2, 4, 6\}$. Образуйте все возможные подмножества этого множества.

Задание 2. Даны множества

A = $\{a, c, e,\ p\}$,

B = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

C = $\{a, b, c, d\}$.

Выполните следующие операции:

1. A ∪ B.
2. A ∪ C.
3. C ∪ B.
4. A ∩ B.
5. A ∩C.
6. C ∩B.
7. A ∩ B ∪ C.
8. C ∪ B ∩ A.
9. A ∩B ∩C.
10. C \ B.
11. A \ C.
12. B \ C.
13. A × B.
14. C × B.
15. A × C.
16. B × C.